DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

VOLUME QUINTO

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

COMPILATO DA UNA SOCIETA'
DI ANTICHI ALLIEVI DELLA SCUOLA POLITECNICA DI PARIGI

SOTTO LA DIREZIONE

DI

A.-S. DE MONTFERRIER

MEMBRO DELL' ANTICA SOCIETÀ REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE
DI PARIGI, DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MARSIGLIA,
DI QUELLA DI METZ EC. EC.

PRIMA VERSIONE ITALIANA

CON NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI

DEL D. GIUSEPPE GASBARRI

E

DI GIUSEPPE FRANÇOIS

VOLUME QUINTO

FIRENZE
PER V. BATELLI E COMPAGNI
1843

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

FAB

FABRI (ONORATO), gesuita e geometra distinto del secolo XVII, nacque a Bugey verso il 1607. Insegnò filosofia a Lione nel collegio della Trinità pel corso di parecchi anni: fu in seguito chiamato a Roma per esercitarvi le funzioni di gran penitenziere, e morì in questa città il 9 Marzo 1688. Dotato di grande ingegno e di estrema facilità scrisse moltissime opere di teologia, di scienze e di lettere; ma, pel poco studio che vi pose, niuna ha quella profondità che è indispensabile per far passare alla posterità il nome del suo autore; così quegli che avrebbe potuto essere uno de' più begli ornamenti del suo secolo, non ha lasciato ne' suoi scritti traccia nessuna dei talenti che realmente possedeva.

Il nome del padre Fabri non figurerebbe forse in questo Dizionario se non richiamasse le memorie di una importante decisione della Chiesa relativamente al sistema di Copernico, decisione che è stata l'oggetto delle più violente e delle più ingiuste critiche. Questo dotto religioso occupava già la carica di gran penitenziere nel tempo in cui la scoperta del vero sistema del mondo risvegliava a un tempo l'attenzione dei geometri e i timori esagerati di alcuni uomini pii, che credevano vedervi una manifesta contraddizione con diversi passi delle sacre carte. Col fine appunto di conservare il rispetto dovuto a quei libri sui quali riposano i fondamenti della fede e di cui il volgo non può comprendere che il solo senso letterale, e quindi con altre vedute ancora che non possono esser qui esposte, ma che non hanno nulla di ostile contro la scienza, la Chiesa dovette mantenere una decisione che le è stata tanto ingiustamente rimproverata. Ma il padre Fabri dichiarò che questa decisione sarebbe stata ferma solamente finchè non vi fosse alcuna dimostrazione scientifica del moto della terra, la quale come si fosse trovata, la Chiesa non avrebbe fatto difficoltà niuna a dichiarare come si possono intendere i passi della Scrittura contrarj al moto della terra. Così la Chiesa si associava realmente al vero progresso della scienza, ed usava delle necessarie precauzioni contro le ipotesi meno fondate di quella di Copernico. Del resto, una tal questione era stata anticipatamente tolta di mezzo dai Padri della Chiesa, che, leggendo per così dire attraverso ai secoli, avevano presagito il movimento ascendente della umana intelligenza e fatto una saggia distinzione tra le

verità morali e le verità scientifiche che non sono del dominio della rivelazione e della coscienza.

Delle opere scientifiche del p. Fabri citeremo soltanto le seguenti: I *Physica, seu rerum corporearum scientia*, Parigi e Lione, 6 vol: lavoro di poca importanza; II *Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide*: questo scritto, sebbene annunzi un ingegno versato nella geometria, non tratta come sembrerebbe prometterlo il suo titolo i problemi difficili che Pascal sotto lo pseudanonimo di *A. Dettonville* aveva proposto ai geometri intorno alla cicloide; III *Breve trattato sulle leggi dell'urto de' corpi e della comunicazione del moto*: la teoria che si espone in questo libro non è conforme a quanto si rileva dalla esperienza e dalla sana fisica; IV *Brevis annotatio in Saturnum C. Hugenii*, Roma, di 166 pagine. Il Fabri, dopo avere cercato in tale opuscolo, pubblicato col finto nome di *Eustachio a Divinis*, di abbattere in un modo non poco acre la spiegazione semplice ed evidente che Huygens aveva dato delle diverse apparenze dell'anello di Saturno, propone un altro sistema di spiegazione, a cui Huygens replicò con la dolcezza e la fiducia che gli dava la bontà della sua causa: ma dobbiamo aggiungere che Fabri convinto di essersi ingannato ebbe la buona fede di confessare il suo errore, e di riparare l'inconsiderata offesa rendendo omaggio all'illustre suo avversario.

FABRICIO (David), pastore di Osterla villaggio presso Norden nell'Ost-Frisia, è stato uno degli osservatori che tanto hanno contribuito nel secolo XVII ai progressi dell'astronomia. L'illustre Kepler cita con elogio le sue osservazioni sul pianeta di Marte e le sue idee sulla teoria della luna. David Fabricio scoprì nel 1596 la stella cangiante nel collo della Balena, ed è soprattutto per questa importante osservazione che il suo nome ha diritto ad un posto nei fasti dell'astronomia. Osservò pure la cometa del 1607, e diede una spiegazione del moto ellittico da Kepler assegnato ai pianeti. Morì ad Osterla nel 1617.

FABRICIO (Giovanni), figlio del precedente, nacque ad Osterla nella Ost-Frisia, fece un viaggio in Olanda, ove imparò a costruire i telescopj per rifrazione. Tostochè fu fatta la scoperta di tale specie di canocchiali, furono con essi osservati la Luna, Giove e Saturno, e vi si scopersero cose notabili. Spinto dalla stessa curiosità, Fabricio diresse i suoi sguardi sul sole e non tardò a scorgervi alcune macchie. Riconobbe che tali apparenze non erano nè nell'occhio, nè nell'aria, nè nel vetro; che si movevano insieme col sole, che dovevano essergli aderenti, e che in fine la rotondità del globo solare era la causa della diminuzione delle sue macchie verso gli orli. Fabricio ricorda ancora la congettura di Kepler sulla rotazione del sole. Fece stampare il ragguaglio delle sue osservazioni col titolo: *Johannis Fabricii Phrysii de maculis in sole observatis, et apparente earum cum sole conversione narratio*, Wittemberg, 1611, in-4 piccolo. L'epistola dedicatoria è de' 13 Giugno 1611: essa è la prima opera in cui si faccia menzione delle macchie solari. Lalande l'ha inserita quasi per l'intero nel quarto tomo della sua *Astronomia*, 1781, e nelle memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1778. Quando la data indicata di sopra sia veramente esatta, è quando voglia giudicarsi unicamente sui documenti pubblici, è forza il dire che Fabricio ha osservato e descritto le macchie solari prima di Galileo. Ma è indubitato che questo grand'uomo ha esso pure fatto dal canto suo la stessa scoperta, ed è andato assai più innanzi di Fabricio tanto nel modo di spiegare il fenomeno, come nell'esporre i vantaggi che se ne sarebbero potuti trarre. S'ignora l'epoca della nascita e della morte di Fabricio, ma è noto che viveva ancora nel Maggio del 1617.

FABRIS (Niccolò), valente meccanico d'Italia e prete dell'Oratorio, nato a Chioggia nel 1739 e morto in patria il 13 Agosto 1801. Studiò con successo le mate-

matiche e si occupò specialmente della loro applicazione al perfezionamento della scienza musicale. Inventò una tavola di progressioni armoniche per accordare prontamente e facilmente, senza bisogno di corista, gli strumenti a tastiera. Fra le altre non poco numerose invenzioni che fece nello stesso genere, è da notarsi quella di un gravicembalo, mediante il quale le note percosse dai tasti erano in pari tempo scritte da essi (*Vedi* ENGRAMELLA). Gli si deve altresì una macchinetta assai semplice per le molle della quale una mano di legno batteva ogni sorta di tempo. Il suo talento in meccanica non si limitò però alle cose musicali: e per tacere di altre innumerevoli ingegnose invenzioni, ricorderemo soltanto un oriuolo da lui costruito, il quale segnava colla più esatta concordanza le ore italiane e le ore francesi, coi minuti e coi secondi respettivi, e indicava del pari gli equinozj ed i solstizj.

FACCETTA (*Geom.*) Diminutivo di *faccia*. Si usa quest'espressione quando i piani del poliedro sono piccolissimi. I vetri che moltiplicano l'immagine d'un oggetto sono tagliati a *faccette*.

FACCIA (*Geom.*). S'indica con questo nome i piani che compongono la superficie di un poliedro: così le *facce* di un cubo sono i sei quadrati che lo limitano.

La *faccia* sulla quale si suppone appoggiato il solido prende il nome di *base*. Ciascuna faccia può esser presa per base.

FACOLTA' ALGORITMICHE (*Alg.*). Modo universale di generazione delle quantità con l'aiuto di fattori legati tra loro con una legge.

1. Sia φx una funzione qualunque della variabile x e sia ξ l'accrescimento della variabile, chiameremo *facoltà algoritmica*, la funzione

$$\varphi x^{m|\xi} \ldots\ldots (a),$$

la quale esprime il prodotto di m fattori

$$\varphi x \cdot \varphi(x+\xi) \cdot \varphi(x+2\xi) \ldots\ldots \varphi[x+(m-1)\xi] \ldots\ldots (b),$$

prevenendo una volta per tutte che l'esponente m si rapporta alla funzione φx e non alla variabile x.

2. Quando la funzione φx è semplicemente x, la *facoltà* diviene

$$x^{m|\xi} = x(x+\xi)(x+2\xi)(x+3\xi) \ldots [x+(m-1)\xi],$$

vale a dire una *fattoriella* (*vedi* questa parola). Le fattorielle sono perciò il caso più particolare delle facoltà.

3. Resulta evidentemente da questa costruzione, che se prendiamo l'ultimo fattore di (*b*), cioè

$$\varphi[x+(m-1)\xi]$$

per base della facoltà, bisognerà considerare l'accrescimento ξ come negativo e il prodotto (*b*) potrà esprimersi ancora con

$$\varphi[x+(m-1)\xi]^{m|-\xi};$$

dimodochè si ha generalmente l'identità

$$\varphi x^{m|\xi} = \varphi[x+(m-1)\xi]^{m|-\xi}.$$

4. Si ha ancora per costruzione

$$\varphi x^{m|\xi} = \varphi x . \varphi (x+\xi)^{m-1|\xi} = \varphi x^{2|\xi} . \varphi (x-2\xi)^{m-2|\xi}$$
$$= \varphi x^{3|\xi} . \varphi (x+3\xi)^{m-3|\xi} = \varphi x^{4|\xi} . \varphi (x-4\xi)^{m-4|\xi}$$
$$= \text{ec.}$$

e in generale

$$\varphi x^{m|\xi} = \varphi x^{n|\xi} . \varphi (x+n\xi)^{m-n|\xi} \dots . (c),$$

n essendo minore di m.

Facendo in quest'espressione $m-n=p$, donde $m=n+p$, e sostituendo si ha

$$\varphi x^{n+p|\xi} = \varphi x^{n|\xi} . \varphi (x+n\xi)^{p|\xi} \dots . (d).$$

5. L'espressione (c) dà ancora

$$\varphi x^{n|\xi} = \frac{\varphi x^{m|\xi}}{\varphi (x+n\xi)^{m-n|\xi}} .$$

e, per conseguenza, facendo come sopra $m-n=p$, donde $n=m-p$, si ha

$$\varphi x^{m-p|\xi} = \frac{\varphi x^{m|\xi}}{\varphi [x+(m-p)\xi]^{p|\xi}} \dots . (e)$$

6. Facendo $m=p$, nell'espressione (e), essa diviene

$$\varphi x^{0|\xi} = \frac{\varphi x^{m|\xi}}{\varphi x^{m|\xi}} = 1 ,$$

così le *facoltà* sono, come le *potenze*, eguali all'*unità* quando l'esponente è *zero*.

7. L'espressione (e) dà ancora l'idea che bisogna farsi delle facoltà a esponenti negativi, poichè facendovi $m=0$, essa diviene

$$\varphi x^{-p|\xi} = \frac{1}{\varphi (x-p\xi)^{p|\xi}} \dots . (f),$$

l'espressioni (d) (e) ed (f) nel caso di $\varphi x = x$, si riducono a quelle che daremo per le fattorielle ai numeri 3, 5 e 6.

8. In virtù delle espressione (d), si ha generalmente,

$$\varphi x^{m+n'|\xi} = \varphi x^{m|\xi} . \varphi (x+m\xi)^{n'|\xi},$$

così facendo $n'=n+p$, si avrà ancora

$$\varphi x^{m+n+p|\xi} = \varphi x^{m|\xi} . \varphi (x+m\xi)^{n+p|\xi}$$
$$= \varphi x^{m|\xi} . \varphi (x+m\xi)^{n|\xi} . \varphi [x+(m+n)\xi]^{p|\xi},$$

si troverebbe egualmente

$$\varphi x^{m+n+p+q|\xi} = \varphi x^{m|\xi} . \varphi (x+m\xi)^{n|\xi} . \varphi [x+(m+n)\xi]^{p|\xi}$$
$$\times \varphi [x+(m+n+p)\xi]^{q|\xi}$$

e così di seguito per un numero qualunque di esponenti.

Ora, se si fa

$$m = n = p = q = \text{ec.}$$

si avrà, indicando per μ il numero di queste quantità

$$\varphi x^{\mu m|\xi} = \varphi x^{m|\xi} . \varphi(x+m\xi)^{m|\xi} . \varphi(x+2m\xi)^{m|\xi} \dots \dots \dots \varphi[x+(\mu-1)m\xi]^{m|\xi} \dots \dots (g),$$

ma l'accrescimento dovendo sempre applicarsi alla variabile, si ha evidentemente, ψx essendo una funzione qualunque di x,

$$\varphi x^{m|\xi} . \psi x^{m|\xi} = (\varphi x . \psi x)^{m|\xi},$$

poichè il primo membro di quest' eguaglianza indica il prodotto

$$\left\{ \varphi x . \varphi(x+\xi) \dots \dots \varphi[x+(m-1)\xi] \right\} \times \left\{ \psi x . \psi(x+\xi) \dots \dots \psi[x+(m-1)\xi] \right\},$$

e che il secondo indica il prodotto identico.

$$(\varphi x . \psi x)[\varphi(x+\xi) . \psi(x+\xi)] \dots \dots [\varphi(x+(m-1)\xi] . \psi[x+(m-1)\xi)],$$

Mediante quest' osservazione l'espressione (g) diviene

$$\varphi x^{\mu m|\xi} = \left\{ \varphi x . \varphi(x+m\xi) \dots \dots \varphi[x+(\mu-1)m\xi] \right\}^{m|\xi},$$

e siccome la quantità racchiusa fra le parentesi è eguale a $\varphi x^{\mu|m\xi}$, si ha definitivamente

$$\varphi x^{\mu m|\xi} = (\varphi x^{\mu|m\xi})^{m|\xi} \dots \dots (h),$$

ovvero ancora

$$\varphi x^{\mu m|\xi} = (\varphi x^{m|\xi})^{\mu|m\xi},$$

a motivo della proprietà generale

$$(\varphi x^{p|\xi})^{q|\xi} = (\varphi x^{q|\xi})^{p|\xi},$$

che resulta immediatamente dalla costruzione di queste funzioni.

9. Se esprimiamo con ψx la facoltà $\varphi x^{m|\xi}$ avremo l'eguaglianza

$$\varphi x^{m|\xi} = \psi x,$$

donde

$$\varphi x = \sqrt[m|\xi]{\psi x},$$

indicando col radicale $\sqrt[m|\xi]{\ }$ (a motivo dell' analogia delle facoltà e delle potenze) l' operazione che bisogna eseguire sopra le facoltà ψx per risalire alla sua base φx; operazione che può chiamarsi *estrazione delle basi delle facoltà*.
Mediante questa notazione abbiamo

$$\sqrt[m|\xi]{\varphi x^{m|\xi}} = \varphi x.$$

10. Applicando le precedenti considerazioni all' eguaglianza (h), essa dà

$$\sqrt[\mu|m\xi]{\varphi x^{\mu m|\xi}} = \varphi x^{m|\xi},$$

così facendo $\mu m = n$, donde $m = \frac{n}{\mu}$, avremo

$$\sqrt[\mu|\frac{n}{\mu}\xi]{\varphi x^{n|\xi}} = \varphi x^{\frac{n}{\mu}|\xi} \dots\dots (i),$$

e la base potrà estrarsi esattamente fintantochè μ sarà fattore di n. In tutti gli altri casi la quantità $\varphi x^{\frac{n}{\mu}|\xi}$ sarà una quantità *irrazionale* di un ordine superiore. L' espressione (i) ci dà l' idea che bisogna farsi delle facoltà a *esponenti frazionari*.

11. Con facilità possiamo vedere che il prodotto di due facoltà *radicali* del medesimo esponente e del medesimo accrescimento danno l' identità

$$\sqrt[m|\xi]{\varphi x} . \sqrt[m|\xi]{\psi x} = \sqrt[m|\xi]{\varphi x . \psi x},$$

poichè facendo

$$\sqrt[m|\xi]{\varphi x} = \mathrm{X}, \quad \sqrt[m|\xi]{\psi x} = \mathrm{Z},$$

si ricava

$$\varphi x = \mathrm{X}^{m|\xi}, \quad \psi x = \mathrm{Z}^{m|\xi}$$

donde (n.° 8)

$$\varphi x . \psi x = \mathrm{X}^{m|\xi} . \mathrm{Z}^{m|\xi} = (\mathrm{X} . \mathrm{Z})^{m|\xi},$$

e per conseguenza

$$\sqrt[m|\xi]{\varphi x . \psi x} = \mathrm{X} . \mathrm{Z} = \sqrt[m|\xi]{\varphi x} . \sqrt[m|\xi]{\psi x}.$$

12. Si troverebbe nella medesima maniera

$$\sqrt[m|\xi]{\left(\sqrt[n|\xi]{\varphi x}\right)} = \sqrt[n|\xi]{\left(\sqrt[m|\xi]{\varphi x}\right)},$$

e più generalmente

$$\sqrt[m|z]{\left(\sqrt[n|\xi]{\varphi x}\right)} = \sqrt[n|\xi]{\left(\sqrt[m|z]{\varphi x}\right)}.$$

13. Se nell' eguaglianza

$$\sqrt[\mu\left|\frac{n}{\mu}\xi\right.]{\varphi x^{n|\xi}} = \varphi x^{\frac{n}{\mu}\big|\xi},$$

(*vedi* il n.° 10) si fa $n = 1$ e $\frac{\xi}{\mu} = z$, si ottiene

$$\sqrt[\mu|z]{\varphi x} = \varphi x^{\frac{1}{\mu}\big|\mu z} \; \ldots\ldots (l);$$

premesso ciò, facciamo

$$\sqrt[n|\xi]{\left(\sqrt[m|z]{\varphi x}\right)} = X,$$

ne ricaveremo

$$\varphi x = \left[X^{n|\xi}\right]^{m|z}.$$

Ma in virtù dell' espressione (*h*) (n.° 8) abbiamo, facendo $\xi = mz$,

$$\left[X^{n|mz}\right]^{m|z} = X^{nm|z},$$

donde

$$\varphi x = X^{nm|z}, \text{ e } \sqrt[nm|z]{\varphi x} = X,$$

abbiamo dunque ancora

$$\sqrt[n|mz]{\left(\sqrt[m|z]{\varphi x}\right)} = \sqrt[mn|z]{\varphi x}$$

eguaglianza che in virtù dell' espressione (*l*) possiamo anco scrivere come segue:

$$\left(\varphi x^{\frac{1}{m}\big|mz}\right)^{\frac{1}{n}\big|nmz} = \varphi x^{\frac{1}{nm}\big|nmz}$$

servendosi di esponenti frazionari.

Ora, facendo $nmz = r$, avremo $mz = \frac{r}{n}$ e quest' ultima espressione diverrà

$$\left(\varphi x^{\frac{1}{m}|\frac{1}{n}r}\right)^{\frac{1}{n}|r} = \varphi x^{\frac{1}{mn}|r},$$

la quale risulta immediatamente dall' espressione (h) (n.° 8) sostituendovi $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$ in luogo di μ e m. Così quest' espressione ha luogo ancora nel caso degli esponenti frazionari $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$.

Con processi simili si dimostrerebbero le identità più generali

$$\left.\begin{aligned}\left(\varphi x^{\frac{n}{m}|\frac{p}{q}\xi}\right)^{\frac{p}{q}|\xi} &= \varphi x^{\frac{np}{mq}|\xi}\\ \left(\varphi x^{\frac{n}{m}|\xi}\right)^{\frac{n}{m}|\frac{p}{q}\xi} &= \varphi x^{\frac{np}{mq}|\xi}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (m).$$

14. Se nella prima di queste eguaglianze si fa $m = 1$, essa diviene

$$\left(\varphi x^{\frac{p}{q}|\xi}\right)^{n|\frac{p}{q}\xi} = \varphi x^{n\frac{p}{q}|\xi}$$

e il suo primo membro esprime il prodotto

$$\varphi x^{\frac{p}{q}|\xi} \cdot \varphi\left(x+\frac{p}{q}\xi\right)^{\frac{p}{q}|\xi} \cdot \varphi\left(x+2\frac{p}{q}\xi\right)^{\frac{p}{q}|\xi} \ldots\ldots$$
$$\varphi\left(x+(n-1)\frac{p}{q}\xi\right)^{\frac{q}{p}|\xi},$$

possiamo dunque metterla sotto la forma

$$\varphi x^{\frac{p}{q}|\xi} \cdot \left(\varphi\left(x+\frac{p}{q}\xi\right)^{n-1|\frac{p}{q}\xi}\right)^{\frac{p}{q}|\xi},$$

che si riduce, in virtù delle espressioni medesime dalle quali siamo partiti, a

$$\varphi x^{\frac{p}{q}|\xi} \cdot \varphi\left(x+\frac{p}{q}\xi\right)^{\frac{p(n-1)}{q}|\xi};$$

dimodochè abbiamo l' eguaglianza

$$\varphi x^{n\frac{p}{q}|\xi} = \varphi x^{\frac{p}{q}|\xi} \cdot \varphi\left(x+\frac{p}{q}\xi\right)^{\frac{p(n-1)}{p}|\xi}.$$

Se, in quest' ultima espressione, facciamo $\frac{p(n-1)}{q} = \frac{r}{s}$ donde si ricava

$n = \frac{qr}{ps}+1$, avremo definitivamente

$$\varphi x^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}|\xi} = \varphi x^{\frac{p}{q}|\xi} \cdot \varphi\left(x+\frac{p}{q}\xi\right)^{\frac{r}{s}|\xi}.$$

Così la proposizione del numero 4

$$\varphi x^{n+p|\xi} = \varphi x^{n|\xi} \cdot \varphi(x+n\xi)^{p|\xi},$$

si trova dimostrata per qualunque valore positivo intero o frazionario dei due termini dell' esponente binomio.

15. Si proverà nella medesima maniera che

$$\varphi x^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}|\xi} = \frac{\varphi x^{\frac{p}{q}|\xi}}{\varphi\left(x+\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)\xi\right)^{\frac{m}{n}|\xi}},$$

donde si ricava facendo $\frac{p}{q} = 0$

$$\varphi x^{-\frac{m}{n}|\xi} = \frac{1}{\varphi\left(x-\frac{m}{n}\xi\right)^{\frac{m}{n}|\xi}},$$

espressione che dà la significazione delle facoltà a esponenti frazionari negativi.

16. Le proprietà generali, che abbiamo dimostrate per gli esponenti interi o frazionari positivi, possono per analogia estendersi agli esponenti negativi, ma se vogliamo ottenerne la deduzione diretta possiamo ricorrere a trasformazioni facilissime, delle quali daremo un esempio.

m essendo un numero intero o frazionario, abbiamo (n.i 7 e 15)

$$\varphi x^{-m} = \frac{1}{\varphi(x-m\xi)^{m|\xi}}$$

e, conseguentemente, n essendo un numero intero o frazionario abbiamo ancora

$$\varphi x^{-(m+n)|\xi} = \frac{1}{\varphi[x-(m+n)\xi]^{m+n|\xi}}$$

ma per i numeri 4 e 14

$$\varphi\,[x-(m+n)\xi]^{m+n|\xi}=\varphi\,[x-(m+n)\xi]^{m|\xi}\,.\,\varphi\,(x-n\xi)^{n|\xi},$$

dunque

$$\varphi\,x^{-(m+n)|\xi}=\frac{1}{\varphi\,[x-(m+n)\xi]^{m|\xi}\,.\,\varphi(x-n\xi)^{n|\xi}},$$

ora

$$\frac{1}{\varphi(x-n\xi)^{n|\xi}}=\varphi x^{-n|\xi},$$

$$\frac{1}{\varphi\,[x-(m+n)\xi]^{m|\xi}}=\varphi(x-n\xi)^{-m|\xi},$$

dunque sostituendo, avremo ancora

$$\varphi\,x^{-m-n|\xi}=\varphi\,x^{-n|\xi}\,.\,\varphi\,(x-n\xi)^{-m|\xi},$$

e in questo modo la proposizione del numero 4 si trova dimostrata per tutti i valori dei due termini dell' esponente binomio.

Faremo osservare che operando in un modo analogo al presente esempio potremo assicurarsi che tutte le proprietà delle facoltà esposte nei precedenti numeri sussistono qualunque sieno gli esponenti interi o frazionari, positivi o negativi.

17. Procediamo ora alla deduzione della legge fondamentale delle facoltà.

Se indichiamo con Log. φx, il logaritmo naturale della funzione φx, avremo evidentemente

$$\text{Log}\,[\varphi\,x^{m|\xi}]=\log.\varphi\,x+\log.\varphi\,(x+\xi)+\ldots.$$
$$+\log.\varphi\,[x+(m-1)\,\xi\,],$$

ed otterremo, sviluppando i termini del secondo membro di questa eguaglianza per mezzo della formula del Taylor, (*Vedi* DIFFERENZIALE, n.° 60) la serie dell' espressioni

$$\log.\varphi\,x=\log.\varphi\,x$$

$$\log.\varphi\,(x+\xi)=\log.\varphi\,x+\frac{d\log.\varphi\,x}{dx}.\,\xi+\frac{d^2\log.\varphi\,x}{dx^2}.\frac{\xi^2}{1\,.\,2}$$
$$+\text{ec.}$$

$$\log.\varphi\,(x+2\xi)=\log.\varphi\,x+\frac{d\log.\varphi\,x}{dx}.\,2\xi+\frac{d^2\log.\varphi\,x}{dx^2}.\frac{4\xi^2}{1\,.\,2}$$
$$+\text{ec.}$$

$$\log.\varphi(x+3\,\xi)=\log.\varphi\,x+\frac{d\log.\varphi\,x}{dx}.\,3\xi+\frac{d^2\log.\varphi\,x}{dx^2}.\frac{9\xi^2}{1\,.\,2}$$

ec. ec. + ec.

$$\log.\varphi\,[x+(m-1)\xi] = \log.\varphi x + \frac{d\log.\varphi x}{dx}(m-1)\xi +$$

$$+\frac{d^2\log.\varphi x}{dx^2}\cdot\frac{(m-1)^2\xi^2}{1.2} + \text{ec.}$$

Così indicando con $M_{(m)1}$ la somma dei numeri 0, 1, 2, 3, 4, ec., fino ad $m-1$, con $M_{(m)2}$ la somma delle seconde potenze di questi medesimi numeri, e in generale con

$M_{(m)n}$ la somma delle loro potenze n, ovvero

$$0^n+1^n+2^n+3^n+4^n+ \text{ec:} \ldots\ldots\ldots + (m-1)^n,$$

avremo addizionando,

$$\log.(\varphi x^{m|\xi}) = m\log.\varphi x + M_{(m)1}\frac{d\log.\varphi x}{dx}.\xi$$

$$+ M_{(m)2}\frac{d^2\log.\varphi x}{dx^2}.\frac{\xi^2}{1.2} + \text{ec}.$$

o semplicemente

$$\log.(\varphi x^{m|\xi}) = A_0 + A_1.\xi + A_2.\frac{\xi^2}{1.2} + A_3.\frac{\xi^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

facendo per abbreviare

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= m\log.\varphi x \\ A_1 &= M_{(m)1}.\frac{d\log.\varphi x}{dx} \\ A_2 &= M_{(m)2}.\frac{d^2\log.\varphi x}{dx^2} \\ A_3 &= M_{(m)3}.\frac{d^3\log.\varphi x}{dx^3} \\ \text{ec.} &= \text{ec.} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(n).$$

Ora, e essendo la base dei logaritmi naturali, si ha generalmente

$$e^{\log.X} = X,$$

così

$$\varphi x^{m|\xi} = e^{A_0+A_1\xi+A_2.\frac{\xi^2}{1.2}+\text{ec.}}$$

Se ora indichiamo con $f\xi$ l'esponente di e e con $F\xi$ la potenza essa medesima o la facoltà $\varphi x^{m|\xi}$, avremo

$$F\xi = e^{f\xi}.$$

Ma $F\xi$ essendo considerata come una funzione della variabile ξ, il suo sviluppo per mezzo della formula del Maclaurin (*Vedi* Differenziale, n.° 34), è

$$F\xi = F\dot{\xi} + \frac{dF\dot{\xi}}{d\xi}.\xi + \frac{d^2.F\dot{\xi}}{d\xi^2}.\frac{\xi^2}{1.2} + \frac{d^3.F\dot{\xi}}{1.2.3} + \text{ec.},$$

il punto situato sopra ξ indicando il valore *zero* che bisogna dare a questa variabile dopo le differenziazioni.

Facendo dunque

$$N_0 = F\dot{\xi}$$

$$N_1 = \frac{dF\dot{\xi}}{d\xi}$$

$$N_2 = \frac{d^2F\dot{\xi}}{d\xi^2}$$

$$N_3 = \frac{d^3F\dot{\xi}}{d\xi^3}$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

avremo per lo sviluppo di $F\xi$ o di $\varphi x^{m|\xi}$ l'espressione

$$\varphi x^{m|\xi} = N_0 + N_1.\xi + N_2.\frac{\xi^2}{1.2} + N_3.\frac{\xi^3}{1.2.3} + \text{ec}, \ldots . (o),$$

e non ci rimane più da trovare che la legge dei coefficienti, vale a dire la legge delle differenziali successive della funzione $F\xi$.

Ora da

$$F\xi = e^{f\xi}$$

ricaviamo, differenziando (*Vedi.* Differenziale, n.° 42)

$$dF\xi = d\left(e^{f\xi}\right) = e^{f\xi}.df\xi = F\xi.df\xi;$$

avremo dunque, in virtù della legge fondamentale del calcolo differenziale (*Vedi* Differenziale, n.° 117)

$$dF\xi = F\xi.df\xi$$

$$d^2F\xi = dF\xi.df\xi + F\xi.d^2f\xi$$

$$d^3F\xi = d^2F\xi.df\xi + 2dF\xi.d^2f\xi + F\xi.d^3f\xi$$

$$d^4F\xi = d^3F\xi.df\xi + 3d^2F\xi.d^2f\xi + 3dF\xi.d^3f\xi + F\xi.d^4f\xi$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

Così dividendo per $d\xi$, $d\xi^2$, $d\xi^3$, ec, e facendo $\xi = 0$ dopo le differenziazioni,

troveremo per i coefficienti N_0, N_1, N_2, ec., le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
N_0 &= F\dot{\xi} \\
N_1 &= N_0 \cdot \frac{df\dot{\xi}}{d\xi} \\
N_2 &= N_1 \cdot \frac{df\dot{\xi}}{d\xi} + N_0 \cdot \frac{d^2 f\dot{\xi}}{d\xi^2} \\
N_3 &= N_2 \cdot \frac{df\dot{\xi}}{d\xi} + 2N_1 \cdot \frac{d^2 f\dot{\xi}}{d\xi^2} + N_0 \cdot \frac{d^3 f\dot{\xi}}{d\xi^3} \\
N_4 &= N_3 \cdot \frac{df\dot{\xi}}{d\xi} + 3N_2 \cdot \frac{d^2 f\dot{\xi}}{d\xi^2} + 3N_1 \cdot \frac{d^3 f\dot{\xi}}{d\xi^3} \\
&\quad + N_0 \cdot \frac{d^4 f\dot{\xi}}{d\xi^4} \\
ec. &= ec.
\end{aligned}\right\} \ldots \ldots (N).$$

La determinazione dei valori delle differenziali successive di $f\xi$, si fa senza alcuna difficoltà; poichè avendo

$$f\xi = A_0 + A_1\xi + A_2 \cdot \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} + A_3 \cdot \frac{\xi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.},$$

otterremo successivamente, differenziando i due membri di quest' eguaglianza e, facendo $\xi = 0$ dopo ciascuna differenziazione,

$$\frac{df\dot{\xi}}{d\xi} = A_1$$

$$\frac{d^2 f\dot{\xi}}{d\xi^2} = A_2$$

$$\frac{d^3 f\dot{\xi}}{d\xi^3} = A_3$$

e in generale

$$\frac{d^n f\dot{\xi}}{d\xi^n} = A_n.$$

Se osserveremo inoltre che quando

$$\xi = 0, \text{ si ha } F\dot{\xi} = \varphi x^m$$

avremo definitivamente, sostituendo nell'espressioni (N) tutti questi valori, o piuttosto quelli di A_1, A_2, ec., dati di sopra con le formule (m), l'espressioni finali

$$\left.\begin{aligned}
N_0 &= \varphi x^m \\
N_1 &= N_0 . M_{(m)1} . \left(\frac{d \log . \varphi x}{dx}\right) \\
N_2 &= N_1 . M_{(m)1} . \left(\frac{d \log . \varphi x}{dx}\right) + N_0 . M_{(m)2} . \left(\frac{d^2 \log . \varphi x}{dx^2}\right) \\
N_3 &= N_2 . M_{(m)1} . \left(\frac{d \log . \varphi x}{dx}\right) + 2N_1 . M_{(m)2} . \left(\frac{d^2 \log . \varphi x}{dx^2}\right) \\
&\quad + N_0 . M_{(m)3} . \left(\frac{d^3 \log . \varphi x}{dx^3}\right) \\
&\text{e in generale} \\
N_\omega &= N_{\omega-1} . M_{(m)1} . \left(\frac{d . \log . \varphi x}{dx}\right) \\
&\quad + \frac{\omega-1}{2} . N_{\omega-2} . M_{(m)2} . \left(\frac{d^2 . \log . \varphi x}{dx^2}\right) \\
&\quad + \frac{\omega-1}{1} . \frac{\omega-2}{2} . N_{\omega-3} . M_{(m)3} . \left(\frac{d^3 . \log . \varphi x}{dx^3}\right) \\
&\quad + \frac{\omega-1}{1} . \frac{\omega-2}{2} . \frac{\omega-3}{3} . N_{\omega-4} . M_{(m)4} . \left(\frac{d^4 . \log . \varphi x}{dx^4}\right) \\
&\quad + \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (p).$$

Questa bella legge dello sviluppo delle facoltà la dobbiamo al signor Wronski, che l' ha data senza dimostrazione, nella prima nota della sua *Confutazione della teoria delle funzioni analitiche*. Basta rammentarsi che tutte le proprietà delle facoltà hanno generalmente luogo, qualunque sieno gli esponenti interi o frazionari, per poter concludere che necessariamente segue il medesimo della loro legge fondamentale.

Nel seguito di questo Dizionario vedremo come si valutano in tutti i casi le quantità $M_{(m)1}$, $M_{(m)2}$, ec.

18. Nel caso in cui la funzione φx è semplicemente x, vale a dire, quando la facoltà può considerarsi come una semplice fattoriella, possiamo partendo dalle relazioni conosciute (*Vedi* FATTORIELLE)

$$\begin{aligned}
(mI1) &= M_{(m)1} \\
2(mI2) &= M_{(m)1} . (mI1) - M_{(m)2} \\
3(mI3) &= M_{(m)1} . (mI2) - M_{(m)2} . (mI1) + M_{(m)3} \\
4(mI4) &= M_{(m)1} . (mI3) - M_{(m)2} . (mI2) + \\
&\quad + M_{(m)3} . (mI1) - M_{(m)4} \\
\text{ec.} &= \text{ec.},
\end{aligned}$$

le quali esistono tra le somme delle potenze $M_{(m)n}$ e le somme dei prodotti (mIn), ridurre le espressioni (p) a

$$\left.\begin{aligned}
N_0 &= x^m\\
N_1 &= M_{(m)1}\,.\,x^{m-1} = (mI1)\,.\,x^{m-1}\\
N_2 &= [(mI1)\,.\,M_{(m)1}-M_{(m)2}]x^{m-2} = 1\,.\,2\,(mI2)x^{m-2}\\
N_3 &= 2[(mI2)M_{(m)1}-(mI1)M_{(m)2}+M_{(m)3}]\,x^{m-3}\\
&= 1\,.\,2\,.\,3\,(mI3)x^{m-3}\\
\text{ec.} &= \text{ec.}\\
&\text{e, in generale}\\
N_\omega &= 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\omega\,.\,(mI\omega)\,.\,x^{m-\omega}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(q),$$

avremo dunque, in questo caso particolare

$$x^{m|\xi} = x^m+(mI1)\,.\,x^{m-1}\,\xi+(mI2)\,.\,x^{m-2}\,\xi^2+$$
$$+(mI3)\,.\,x^{m-3}\,\xi^3+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (r),$$

e tale è infatti lo sviluppo che abbiamo trovato per le fattorielle. *Vedi* FATTORIELLA, n.° 14.

19. Dalla legge fondamentale delle facoltà ci rimane da dedurre, il *fattore elementare* (*vedi* questa parola) di queste funzioni. Ora considerando p come una quantità infinitamente piccola $\frac{1}{\infty}$, l'espressione (d), n.° 4, diviene

$$\varphi x^{n+\frac{1}{\infty}|\xi} = \varphi x^{n|\xi}\,.\,\varphi(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}|\xi}$$

e la quantità $\varphi(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}|\xi}$ è evidentemente il fattore elementare della facoltà $\varphi x^{n}|\xi$. Nel caso delle fattorielle si ha

$$x^{n+\frac{1}{\infty}|\xi} = x^{n|\xi}\,.\,(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}|\xi},$$

così $(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}|\xi}$ è il fattore elementare della fattoriella generale $x^{n|\xi}$. Resta dunque da applicare a questi due fattori le leggi respettive delle funzioni delle quali esse fanno parte, per ottenere le loro generazioni. Cominciamo dal fattore elementare delle fattorielle.

In virtù della legge (a), (*vedi* FATTORIELLA, n.° 14), riportata di sopra sotto l'indicazione (r), abbiamo

$$(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}|\xi} = (x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}}+\left(\frac{1}{\infty}I1\right)\,.\,\frac{\xi}{x+n\xi}+\left(\frac{1}{\infty}I2\right)\frac{\xi^2}{(x+n\xi)^2}$$
$$+\left(\frac{1}{\infty}I3\right)\,.\,\frac{\xi}{(x+n\xi)^3}+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ldots\ (s),$$

i coefficienti $\left(\frac{1}{\infty} 1\, 1\right)$, $\left(\frac{1}{\infty} 1\, 2\right)$, ec. essendo ciò che diventano $(m1\,1)$, $(m1\,2)$, ec. nel caso di $m = \frac{1}{\infty}$.

Ma sostituendo $\frac{1}{\infty}$ invece di m nell' espressioni (b) (*Vedi* FATTORIELLA n.° 14) le quali danno i valori di $(m1\,1)$, $(m1\,2)$, ec., si vede che tutti questi coefficienti diventano multipli di questa quantità infinitamente piccola e che essi sono tutti affetti dal segno —; indichiamo dunque con $-\frac{1}{\infty}\theta_1$, $-\frac{1}{\infty}\theta_2$, $-\frac{1}{\infty}\theta_3$, ec., ciò che diventano le quantità $(m1\,1)$, $(m1\,2)$, e dividendo da una parte e dall' altra per $\frac{1}{\infty}$, otterremo le seguenti relazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \theta_1 \\
\frac{1}{3} &= \theta_1 - 2\theta_2 \\
\frac{1}{4} &= \theta_1 - 3\theta_2 + 3\theta_3 \\
\frac{1}{5} &= \theta_1 - 4\theta_2 + 6\theta_3 - 4\theta_4 \\
\frac{1}{6} &= \theta_1 - 5\theta_2 + 10\theta_3 - 10\theta_4 + 5\theta_5 \\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \ldots (t).$$

e in generale

$$\frac{1}{n+1} = \theta_1 - \frac{n}{1}\theta_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}\theta_3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\theta_4 + \\ + \text{ec} \ldots\ldots\ldots\ldots - (-1)^n \theta_{n+1}$$

Se, con l' aiuto di queste relazioni, si effettuano i calcoli delle quantità θ_1, θ_2 ec., si vedrà che tutte quelle di un *indice* impari, come θ_3, θ_5, θ_7, ec., saranno eguali a zero, eccettuato la prima θ_1, e che tutte quelle di un *indice* pari sono alternativamente positive e negative. Si trova mediante ciò

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= +\frac{1}{2}, & \theta_8 &= -\frac{1}{240}, \\
\theta_2 &= +\frac{1}{12}, & \theta_{10} &= +\frac{1}{132}, \\
\theta_4 &= -\frac{1}{120}, & \theta_{12} &= -\frac{691}{32760}; \\
\theta_6 &= +\frac{1}{252}, & \theta_{14} &= +\frac{1}{12}\ \text{ec.} & \text{ec.}
\end{aligned}$$

Questi numeri di un grande uso nel calcolo sommatorio, sono conosciuti sotto il nome di *numeri del Bernoulli.*

L'espressione (r) diviene dunque

$$\left(x+n\xi\right)^{\frac{1}{\infty}}=(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}}-\frac{1}{\infty}\theta_1.\frac{\xi}{x+n\xi}-\frac{1}{\infty}\theta_2.\frac{\xi^2}{(x+n\xi)^2}-$$

$$-\frac{1}{\infty}\theta_3.\frac{\xi^3}{(x+n\xi)^3}-\text{ec.}\ \ldots$$

Così indicando con $\Lambda\,\frac{\xi}{x+n\xi}$, la serie

$$\theta_1.\frac{\xi}{x+n\xi}+\theta_2.\frac{\xi^2}{(x+n\xi)^2}+\theta_3.\frac{\xi^3}{(x+n\xi)^3}+\text{ec.}$$

e, osservando che per la teoria dei logaritmi (*vedi* questa parola),

$$(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}}=1+\frac{1}{\infty}\log.(x+n\xi),$$

otterremo definitivamente l'espressione

$$(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}|\xi}=1+\frac{1}{\infty}\left\{\log.(x+n\xi)-\Lambda\,\frac{\xi}{x+n\xi}\right\}\ \ldots\ (t'),$$

vale a dire

fattore elementare $\quad x^{m}|\xi=1+\frac{1}{\infty}\left\{\log.(x+n\xi)-\Lambda\,\frac{\xi}{x+n\xi}\right\}\ \ldots\ (t'')$.

In seguito vedremo importanti applicazioni di queste espressioni (*Vedi* SERIE ARMONICHE).

Per ottenere ora il fattore elementare della facoltà $\varphi x^{m}|\xi$, sviluppiamo

$\varphi(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}|\xi}$ per mezzo della legge fondamentale (o),

$$\varphi x^{m}|\xi=N_0+N_1.\xi+N_2.\frac{\xi^2}{1.2}+N_3.\frac{\xi^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

e, per ottenere i valori delle quantità $M_{(m)1}$, $M_{(m)2}$, ec., nel caso di $m=\frac{1}{\infty}$, partiamo dalle relazioni conosciute che esistono tra queste quantità e *i numeri del Bernoulli*, cioè:

$$M_{(m)0}=m,$$

$$M_{(m)1}=\frac{1}{2}m^2-\theta_1 m,$$

$$M_{(m)2} = \frac{1}{3} m^3 - \theta_1 m^2 + 2\theta_2 m ,$$

$$M_{(m)3} = \frac{1}{4} m^4 - \theta_1 m^3 + 3\theta_2 m^2 - 3\theta_3 m ,$$

ec. = ec.

e in generale

$$M_{(m)n} = \frac{1}{n+1} . m^{n+1} - \theta_1 m^n + \frac{n}{1} \theta_2 m^{n-1} -$$

$$- \frac{n(n-1)}{1 . 2} \theta_3 m^{n-2} + \ldots\ldots + (-1)^n \theta_{n+1} .$$

Con l' aiuto di queste relazioni possiamo effettuare facilmente la valutazione numerica delle quantità $M_{(m)1}$, $M_{(m)2}$, ec. per tutti i valori di m positivi o negativi, interi o frazionari.

Facendo dunque $m = \frac{1}{\infty}$, troveremo

$$M\left(\frac{1}{\infty}\right)_1 = -\theta_1 . \frac{1}{\infty}$$

$$M\left(\frac{1}{\infty}\right)_2 = +2\theta_2 . \frac{1}{\infty}$$

$$M\left(\frac{1}{\infty}\right)_3 = -3\theta_3 . \frac{1}{\infty}$$

$$M\left(\frac{1}{\infty}\right)_4 = +4\theta_4 . \frac{1}{\infty}$$

ec. = ec.

Le espressioni generali (p) diventeranno sostituendoci questi valori

$$N_1 = -\frac{1}{\infty} . \theta_1 \left[\frac{d \log . \varphi(x+n\xi)}{dx} \right]$$

$$N_2 = +\frac{2}{\infty} . \theta_2 \left[\frac{d^2 \log . \varphi(x+n\xi)}{dx^2} \right]$$

$$N_3 = -\frac{3}{\infty} . \theta_3 \left[\frac{d^3 \log . \varphi(x+n\xi)}{dx^3} \right]$$

ec. = ec.

e osservando inoltre, che

$$N_0 = \varphi(x+n\xi)^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty} . \log . \varphi(x+n\xi),$$

otterremo definitivamente

fattore elementare
$$\varphi x^{n|\xi} = 1 + \frac{1}{\infty}\Big\{ \log . \varphi(x+n\xi) - \theta_1 \left[\frac{d \log . \varphi(x+n\xi)}{dx} \right] . \xi + \frac{1}{1}\theta_2 \left[\frac{d^2 \log . \varphi(x+n\xi)}{dx^2} \right] . \xi^2 - \frac{1}{1.2}\theta_3 \left[\frac{d^3 \log . \varphi(x+n\xi)}{dx^3} \right] . \xi^3 + \text{ec.} \ldots \Big\}.$$

Facendo in quest' espressione $\varphi x = x$, ritroveremo il *fattore elementare* delle fattorielle dato di sopra sotto il contrassegno (t'').

20. Per completare la teoria delle facoltà algoritmiche, ci rimarrebbe da esaminare il caso delle funzioni di più variabili, le quali ricevono ciascuna un accrescimento differente, e soprattutto il caso più generale in cui gli accrescimenti di queste variabili sono essi medesimi delle quantità variabili; ma quest' esame ci trasporterebbe troppo in lungo, e siamo forzati di rinviare i nostri lettori all' opere di già citate del signor Wronski (*Confutazione della teoria delle funzioni analitiche*). Il motivo pel quale abbiamo dimostrato rigorosamente le proprietà fondamentali delle facoltà per i valori frazionari degli esponenti, è, perchè ciò non era stato ancora fatto, e perchè l' estrema importanza di queste funzioni nuove riposa, principalmente, sopra le quantità *irrazionali* superiori alle quali dà origine *l' estrazioni delle loro basi*; queste considerazioni basteranno a farci perdonare le particolarità, forse minusiose, nelle quali siamo entrati.

Vedremo altrove il posto che le facoltà occupano nella scienza. *Vedi* Matematiche.

Facolta' Esponenziali. Facoltà il cui esponente è una quantità variabile o una funzione di una quantità variabile.

FAESCH (Giovanni Ridolfo), ingegnere ed architetto al servizio dell' elettore di Sassonia, morto a Dresda nel 1742, ha lasciato: I *Trattato della maniera di rendere i fiumi navigabili*, Dresda, 1728, in-8; II *Dizionario degl' ingegneri*, ivi, 1735, in-8, e molte altre opere sull' architetture e le fortificazioni, tutte in tedesco.

FAESI (Giovanni Giacomo), nato a Zurigo, si applicò alle matematiche e all' astronomia. Si ha di lui: I *Deliciae astronomicae*, 1697; II *Planetoglobium, seu Paradoxum novum mechanico-astronomicum*, 1713, in-8.

FAGNANI (Conte Giulio Carlo di), marchese di Toschi e di S. Onorio, nato a Sinigaglia nel 1682, fu uno dei più distinti geometri italiani del secolo XVIII. Verso l' anno 1719 pubblicò nei giornali italiani e negli atti di Lipsia molte memorie sopra problemi di geometria e di analisi trascendente. Egli stesso poi riunì tali scritti e molti altri che non erano ancora venuti alla luce e pubblicò il tutto con questo titolo: *Produzioni matematiche*, Pesaro, 1750, 2 vol. in-4. In tale raccolta si trova una teoria generale e sommamente particolarizzata delle proporzioni geometriche; un trattato importantissimo delle proprietà dei triangoli rettilinei; la dimostrazione di un insigne teorema sui poligoni rettilinei; le

proprietà e la quadratura della *lemniscata*, la cui area è trovata eguale al quadrato del semiasse, la quadratura della sua evoluta ed un metodo per costruire con questa curva la curva elastica, metodo che il Maclaurin riprodusse senza citare Fagnani. Sembra che la *lemniscata* fosse la curva favorita del Fagnani: egli l'ha rigirata in tutti i versi, considerata in tutti gli aspetti, e ne ha anche fatto intagliare la figura nel frontespizio del suo libro. All' articolo LOGARITMICA, vedremo varie espressioni notabilissime della circonferenza del circolo per mezzo dei logaritmi immaginarj, trovate da questo geometra.

Tra le molte altre cose che arricchiscono la rammentata raccolta è da notarsi la soluzione dei seguenti problemi: I *Trovare un settore circolare, eguale allo spazio compreso tra il perimetro di un' iperbola equilatera, un asintoto e due ordinate all' asintoto, e viceversa*; II *Assegnare archi ellittici ed iperbolici la cui differenza sia una quantità algebrica*; problema che Leibnitz e Giovanni Bernoulli avevano giudicato inaccessibile al calcolo infinitesimale e la cui soluzione collocò il Fagnani nell'ordine de' più acuti analisti; III *Dato un circolo tra i lati di un dato angolo rettilineo, determinare qual sia la minima tra le tangenti limitate dai lati dell' angolo*. Supponendo che il circolo riducasi al centro, l'autore cerca la minima tra tutte le rette che possono tirarsi ai lati dell' angolo pel centro stesso: questo problema è stato trattato, ma in diverso modo, anco da Gabbriello Manfredi.

Fagnani era in carteggio cogli uomini più insigni d'Italia e di oltremonti. Fu consultato in molte questioni importanti, e specialmente nel 1737 intorno ai ripari da farsi alla cupola di S. Pietro di Roma, sul quale argomento stampò un opuscolo in cui cercò di dimostrare fino all' ultima evidenza le ragioni addotte da Le Seur, Jacquier e Boscovich. Morì il 26 Settembre 1776. Il lettore per maggiori particolarità su questo dotto e sui di lui scritti potrà consultare la *Biografia universale*, il *Saggio sulla storia delle matematiche* di Franchini, e l'articolo che intorno ad esso ha scritto Giuseppe Mamiani nel Tomo I della *Biografia degl' illustri italiani*, che si pubblica a Venezia da Emilio De Tipaldo.

FAGNANI (GIOVANNI FRANCESCO), marchese di Toschi e di Sant'Onorio, figlio del precedente, ed arcidiacono di Sinigaglia, diè prova di alto ingegno e di somma dottrina, sì nella geometria che nell'analisi, pubblicando parecchie memorie pregevolissime negli *Acta eruditorum* di Lipsia, e particolarmente negli anni 1774, 1775, 1776.

FAILLE (GIOVANNI CARLO DE LA), gesuita nato ad Anversa nel 1597, insegnò matematiche con molta reputazione prima a Dole, quindi a Lovanio e finalmente nel collegio reale di Madrid, ove poco tempo dopo fu chiamato alla corte per dare lezioni di questa scienza all'infante don Giovanni d'Austria, il quale si affezionò talmente a questo dotto religioso che volle che esso lo accompagnasse ne' suoi diversi viaggi in Catalogna, in Sicilia e a Napoli. La Faille morì a Barcellona il 4 Novembre 1652, e gli furono fatte magnifiche esequie per ordine del suo reale discepolo. Ha lasciato: I *Theses mechanicae*, Dole, 1625; II *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis*, Anversa, 1632, in-4. » Questo geometra, degno di elogj, dice Montucla, vi assegna per vero in un modo assai » prolisso e imbarazzante i centri di gravità delle diverse parti tanto del circolo » quanto dell'ellisse; vi fa soprattutto vedere il legame che esiste tra questa » determinazione e quella della quadratura di tali curve o loro rettificazione, » e come una delle due essendo data lo è del pari necessariamente anco l'altra. » Deve notarsi che l'opera di La Faille ha preceduto quella di Guldin tenuto comunemente per l'autore della teoria dei centri di gravità.

FAINO, astronomo ateniese, viveva l'anno 432 avanti l'era volgare. Suggerì a Metone la prima idea del suo ciclo di 19 anni conosciuto sotto il nome di *numero*

aureo, e cui Gemino attribuisce agli astronomi Euctemone, Filippo e Calippo. Faino fece varie osservazioni di solstizj egualmente che i suoi amici Metone ed Euctemone. Weidler gl' indica sotto la denominazione di *illustri triumviri*. Tolomeo, parlando di tali antiche osservazioni, dice assai chiaramente come non meritano che poca fede. Questo è quanto si sa intorno a Faino di cui non rimane alcuno scritto. Teofrasto narra che non era ateniese di nascita ma che solamente aveva fermato stanza ad Atene.

FALSA POSIZIONE (Regola di). (*Aritm.*) Operazione l' oggetto della quale è di risolvere, con l' aiuto di soli numeri, e senza il soccorso delle formule algebriche, tutti i problemi determinati a una sola incognita che appartengono alle quantità numeriche.

Risolvere un problema numerico, equivale a trovare un numero che soddisfaccia alle condizioni enunciate in questo problema. In algebra, indichiamo questo numero con x, e dopo avere espresso, con l' aiuto dei segni algebrici, le relazioni che esistono tra le quantità conosciute, che sono i *dati* del problema, e la quantità cercata x, si ottiene un' equazione la cui soluzione fa conoscere il valore di x. Se si domandasse, per esempio, qual' è il numero *due terzi* del quale superano la *metà* di una sola unità; indicando questo numero incognito con x, i suoi due terzi sarebbero espressi da

$\frac{2x}{3}$, la sua metà da $\frac{x}{2}$, e si avrebbe la relazione

$$\frac{2x}{3}=\frac{x}{2}+1,$$

la quale, trattata secondo le regole dell' equazioni del primo grado (*Vedi* questa parola), farebbe conoscere il valore di x, cioè: $x=6$.

Si fa una *falsa posizione*, quando in luogo di risolvere direttamente l' equazione, si mette invece dell' incognita x un numero preso interamente all' azzardo. Se si esamina inseguito ciò che diviene mediante questa supposizione la condizione enunciata, si troverà ordinariamente che essa non sarà soddisfatta; si vedrà conseguentemente di quanto ne differisce, e questa quantità espressa in numeri, sarà l' *errore* della *falsa posizione*.

Una seconda supposizione egualmente arbitraria, o una seconda *falsa posizione*, farà conoscere, egualmente, un secondo *errore*.

Avendo eseguito queste due operazioni preliminari, ecco la regola assolutamente generale con l' aiuto della quale si determinerà il vero valore dell' incognita.

1.° *Se i due errori sono della medesima natura, vale a dire, se essi sono tutti due in più o tutti due in meno, moltiplicate ciascuna supposizione per l' errore che l' altra avrà prodotto, prendete la differenza di questi prodotti, e dividetela per la differenza degli errori.*

2.° *Se gli errori sono di natura differente, vale a dire uno in più e l' altro in meno, moltiplicate egualmente ciascuna supposizione per l' errore dell' altra, prendete la somma di questi prodotti, e dividetela per la somma degli errori.*

Nei due casi il quoziente sarà il vero valore dell' incognita.

Prendendo, per esempio, il problema di sopra, e cominciando dal supporre che il numero domandato sia 12: allora, siccome i due terzi di questo numero sono equivalenti a 8, e che la sua metà più uno è 7, vediamo che la condizione del problema non è adempita, poichè 8 supera 7 di 1. L' *errore* di questa prima

falsa posizione è dunque 1 in *più*. Supponiamo ora che il numero cercato sia 18: siccome i due terzi di 18 sono eguali a 12, e che la sua metà più 1 è eguale a 10, abbiamo un secondo *errore* in *più* eguale a 2. Scriviamo come seguono i risultamenti delle false posizioni.

1.ª falsa posizione = 12, 1.° errore = + 1.

2.ª falsa posizione = 18, 2.° errore = + 2.

I due errori essendo della medesima natura, moltiplichiamo 12 per 2, 18 per 1, e dividiamo la *differenza* 6 dei due prodotti 24 e 18 per la *differenza* 1 dei due errori. Il quoziente 6 è il numero domandato. Infatti, i due terzi di 6 sono 4, e la sua metà più 1 è egualmente 4.

La regola di *falsa posizione* non dà soluzioni rigorose che nel caso, in cui il problema proposto conduca a un' equazione del primo grado. In tutti gli altri casi, la sua applicazione esige che con mezzi qualunque ci siamo procurati un valore approssimato dell' incognita, ma allora essa diviene di un uso tanto più prezioso che essa eguaglia almeno, se non supera, tutti i metodi algebrici conosciuti in facilità.

Tutte le volte dunque che l' incognita determinata con questa regola adempirà la condizione enunciata nel problema, questo problema sarà del primo grado, se essa non vi adempie, bisognerà concludere che il problema in questione passa il primo grado.

Quanto ai valori che vorremo supporre per l' incognita, essi sono assolutamente arbitrari; tutti i numeri possibili interi o frazionari conducono egualmente allo scopo; ma siccome i più semplici meritano la preferenza, e che i più semplici sono *zero* e *uno*, renderemo l' operazione molto più semplice prendendo *zero* per la prima *falsa posizione*, e *uno* per la seconda; poichè uno dei prodotti divenendo zero, e l'altro essendo solamente il prodotto di *uno* per l'*errore* risultante dalla supposizione zero, vale a dire questo primo errore esso stesso, la regola potrà enunciarsi così:

Dividere il primo errore per la somma o *la* differenza *dei due errori*, *secondo che questi due errori sono di natura differente o della medesima natura.*

Esempio. Dividere 47 in due parti tali che dividendo la più piccola per 3 e la più grande per 5, la somma dei quozienti sia eguale a 11.

Prendendo o per la parte più piccola, la più grande sarà 47. Ora o diviso per 3, dà o per quoziente, e 47 diviso per 5 da 9 più $\frac{2}{5}$. Così la somma dei dei quozienti è $9+\frac{2}{5}$, e differisce da 11 di $1+\frac{3}{5}$, o di $\frac{8}{5}$ *in meno*.

Prendendo 1 per la parte più piccola, la più grande sarà 46. Ne risulterà per i quozienti le frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{46}{5}$ la cui somma $\frac{143}{15}$ è più piccola di 11 di $\frac{22}{15}$. Abbiamo dunque:

1.ª supposizione = 0, 1.° errore $\frac{8}{5}$, in *meno*.

2.ª supposizione = 1, 2.° errore $\frac{22}{15}$, in *meno*.

$\frac{8}{5}$ essendo eguali a $\frac{24}{15}$, la *differenza* degli errori è $\frac{2}{15}$; così dividendo $\frac{8}{5}$ per

per $\frac{2}{15}$, otterremo per quoziente 12, che deve essere la più piccola delle parte cercate. Infatti, 12 essendo la più piccola parte, 35 sarà la più grande; e si ha

$$\frac{12}{3}+\frac{35}{5}=11.$$

Per dimostrare l'esattezza rigorosa di questa regola in tutte le questioni che non passano il primo grado, osserviamo che queste questioni si risolvono con l'aiuto di un'equazione la cui forma generale è

$$Ax+B=0.$$

Ora, sostituendo successivamente invece di x la serie dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec., si vede che il primo membro di quest' equazione diviene

Per $x=0$, la quantità,	B,
$x=1$,	A+B,
$x=2$,	2A+B,
$x=3$,	3A+B,
ec.	ec.

Vale a dire che i valori successivi di questo primo membro, formano una progressione aritmetica del prim' ordine la cui differenza è A, e il cui *termine generale* è $Ax+B$, x indicando l'*indice* o il posto dei termini. Così, la soluzione dell'equazione $Ax+B=0$, si riduce a determinare qual' è il termine della progressione che si riduce a *zero*, o in ultima analisi qual' è l'*indice* x del termine *zero*.

Questa questione non presenta veruna difficoltà, poichè (*Vedi* PROGRESSIONE) indicando semplicemente con

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \text{ec}\ldots\ldots A_m$$

i termini della progressione, si sa che un termine qualunque A_m è eguale al primo più tante volte la *differenza* della progressione quanti termini vi sono avanti di esso. Così indicando con D la differenza, abbiamo per un termine qualunque A_m, l'eguaglianza

$$A_m=A_0+mD\ ,$$

e per un altro termine qualunque A_n, l'eguaglianza

$$A_n=A_0+nD\ ,$$

il che ci dà pel valore delle differenze D, l'espressione

$$D=\frac{A_n-A_m}{n-m}.$$

Ma è evidente che per trovare l'*indice* del termine *zero* della progressione, basta dividere il termine A_m, o il termine A_n, per la differenza D; poichè li

quoziente di questa divisione indicherà quante volte bisogna togliere la differenza da ciascuno di questi termini, per renderlo eguale a zero, e conseguentemente l' *indice* del termine zero sarà eguale all' uno o all' altro degli *indici* m, n diminuiti di questo quoziente. Così A_m e A_n diviso per D dando respettivamente

$$\frac{nA_m - mA_m}{A_n - A_m}, \quad \frac{nA_n - mA_n}{A_n - A_m},$$

l' *indice* domandato sarà

$$m - \frac{nA_m - mA_m}{A_n - A_m}, \quad \text{ovvero} \quad n - \frac{nA_n - mA_n}{A_n - A_m}$$

e dalla natura del problema, queste due espressioni debbono essere equivalenti. Esse si riducono infatti, l' una e l' altra a

$$\frac{mA_n - nA_m}{A_n - A_m}.$$

Così per trovare l' *indice* domandato, bisogna moltiplicare ciascuno dei due termini per l' *indice* dell' altro, e dividere la differenza dei prodotti per quello dei termini: cioè, il principio stabilito per la regola di *falsa posizione*. Le conseguenze ulteriori sono abbastanza evidenti per tralasciare gli sviluppi.

Qualunque sia l' utilità della regola di falsa posizione nell' Aritmetica, la sua importanza sarebbe piccola se essa si limitasse strettamente ai problemi del primo grado; ma quando con altri processi, o solamente col semplice tasto ci siamo procurati un valore approssimato dell' incognita, questa regola diviene applicabile a tutti i problemi determinati qualunque essi possano essere, e offre allora una risorsa preziosa al calcolatore, quando i mezzi diretti gli mancano o sono troppo complicati. Infatti, se in un' espressione algebrica qualunque dipendente da una quantità incognita x, si sostituisce invece di x una serie di numeri in progressione aritmetica, i valori corrispondenti dell' espressione formeranno essi stessi una serie di termini che si ravvicineranno tanto più a una progressione aritmetica, quanto la differenza della progressione dei numeri sostituiti sarà minore. Così, l' applicazione della regola di falsa posizione a questioni al di sopra del primo grado, dovrà dare risultamenti tanto più vicini al vero valore cercato, quanto le supposizioni saranno esse medesime più vicine a questo valore.

Avendo perciò trovato un valore approssimato dell' incognita, se ne sceglierà un secondo preso a piacere, ma che differisca pochissimo dall' altro; applicheremo a questi due valori la regola di falsa posizione. Il risultamento sarà digià più vicino al vero valore dei due numeri che si erano supposti. Questo secondo valore approssimato ne farà conoscere un terzo, mediante una nuova applicazione della regola a così di seguito fintantochè si sia ottenuto una sufficiente approssimazione. Nella maggior parte dei casi, il terzo valore sarà esatto fino alla sesta ed ancora alla settima decimale.

L' esempio seguente sarà sufficiente a far conoscere l' andamento dell' operazioni:

Esempio. *Si domanda un numero tale, che se dal suo cubo, si tolga la sua radice quadrata, rimanga* 1.

Questo problema conduce a un' equazione del sesto grado, e la scienza non possiede ancora verun mezzo diretto per risolverla. Si vede facilmente che il numero domandato è maggiore di 1 e minore di 2, e spingendo un poco più avanti i tentativi si riconosce che esso dev' essere un poco minore di 1, 3; così

1.ª *Supposizione*, $x = 1,3$; si trova $x^3 = 2,197$, e $\sqrt{x} = 1,140175$, la differenza di questi numeri è, 1,056825; vi è perciò un errore in *più* di 0,056825.

2.ª *supposizione*, $x = 1,29$; si trova $x^3 = 2,146689$, $\sqrt{x} = 1,135782$; la differenza di questi numeri è 1,010907; vi è perciò un errore in *più* di 0,010907.

Applicando la regola, troveremo :

Differenza dei prodotti = 0,0591251,
Differenza degli errori = 0,045918,

la divisione dà 1,2876 per valore approssimato dell'incognita. Infatti, facendo $x = 1,2876$, si ha

$$x^3 = 2,13472976, \quad e \quad \sqrt{x} = 1,13472464,$$

quantità la cui differenza 1,00000512 non differisce in *più* dall'unità che di 0,00000512. Una seconda operazione prendendo per seconda supposizione $x = 1,28759$, farebbe trovare il valore dell'incognita con almeno dieci decimali esatti.

FARDELLA (Michelangiolo), nato nel 1650 a Trapani in Sicilia, entrò giovanissimo nel terzo ordine di S. Francesco. I segni non equivoci che diede di pronto ingegno decider fecero i suoi superiori ad inviarlo a Messina a studiare fisica e matematiche sotto il celebre Borelli. Nè deluse rimasero le speranze che di lui eransi concepite; perocchè fu ben presto in grado di dare egli stesso lezioni di quelle scienze con tale riputazione, che non molto dopo, nel 1676, fu chiamato a Roma a professare geometria nel collegio di S. Paolo *ad arenulam*. Successivamente ottenne il permesso di recarsi in Francia, e soggiornò tre anni a Parigi, ove conversando cogli Arnauld, coi Regis, coi Mallebranche e con altri illustri personaggi di quell'epoca, acquistò una perfetta cognizione dei principj filosofici di Cartesio, di cui divenne uno dei più zelanti partigiani. Tornato in Italia, occupò varie cattedre che diversi Stati tratti dalla sua fama fecero a gara ad offrirli, e tra le altre quella di astronomia e di fisica nell'Università di Padova nella quale successe al celebre Geminiano Montanari. Ma un'applicazione troppo continuata aveva omai logorata la sua salute di natura sua robustissima. Colpito nel 1712 da un primo attacco di apoplessia in Barcellona, ove aveva accompagnato l'areiduca d'Austria in qualità di matematico, si trasferì per consiglio dei medici a Napoli onde riacquistarvi la salute: ma egli non fece che languire per alcuni anni, finchè nel 2 Gennaio 1718 un secondo attacco di apoplessia pose fine ai suoi giorni. Delle molte opere da lui lasciate, che sebbene non prive di molto merito sono oggi cadute in oblio, non citeremo che la seguente: *Universae usualis mathematicae theoria: tomus primus qui dialecticam mathematicae, seu organum ad universalis quantitatis naturam experiendam comparatum complectitur*, Venezia, 1691: tale volume è il solo che sia comparso. Estesi ragguagli intorno a Fardella ed ai suoi scritti si troveranno nel tomo VI della *Biografia degli illustri italiani* pubblicata da Emilio de Tipaldo.

FARINI (Giovanni), nato a Russi vicino a Ravenna nel 1778, e morto nel 1822, studiò con molto successo le matematiche nell'università di Pisa sotto il celebre Pietro Paoli. Essendosi fatto conoscere vantaggiosamente per un articolo inserito negli *Atti della Società di Incoraggiamento di Milano*, Tom. III, nel quale dimostrava come il nuovo sostegno immaginato dal Betancourt non poteva dare quei vantaggiosi risultati che se ne aspettavano, quantunque l'Istituto di Francia avesse dato il suo suffragio all'invenzione dell'idraulico francese, fu nominato ingegnere nell'arsenale di Venezia, e nel 1810 fu chiamato a Padova a coprire la

cattedra di fisica generale, e poscia quella d' introduzione al calcolo sublime e di matematica pura elementare. Per altre notizie su questo dotto e sui suoi scritti si legga l'articolo che lo riguarda nella traduzione italiana della *Biografia Universale*.

FASCE di Giove e di Saturno (*Astron.*). Sono così chiamate certe zone oscure ed irregolari che sembrano circondare questi pianeti e far parte dei loro globi. Queste fasce non presentano sempre lo stesso aspetto; la loro grandezza e la loro posizione cangia, ma la loro direzione generale è invariabile. Una lunga serie di osservazioni sulle fasce di Giove ha fatto conoscere che questo pianeta gira intorno ad un asse perpendicolare alla loro direzione nel brevissimo periodo di 9 ore e 55 minuti. Per le leggi della gravitazione, un moto così rapido di rotazione doveva influire in un modo sensibilissimo sulla forma del pianeta, il che infatti è stato chiaramente dimostrato dalle osservazioni. Giove è un'ellissoide molto schiacciata verso i poli: il rapporto del suo diametro equatoriale al diametro polare è eguale a 107 : 100, cioè precisamente quello medesimo che dà la teoria matematica in circostanze simili di dimensione e di durata di rotazione. La figura 4 della Tavola XXXIV rappresenta Giove come è stato osservato a Slough il 23 Settembre 1832 con un telescopio a riflessione di 20 piedi.

Le fasce di Saturno sono più larghe e meno apparenti; esse sono paralelle al piano dell' anello (*Tav.* XIX, *fig.* 1). Esse pure hanno servito a far conoscere la durata della rotazione di questo singolarissimo pianeta, che è di 10 ore e 18 minuti. Herschel suppone che le fasce di Giove e di Saturno abbiano la loro sede nell' atmosfera di questi pianeti, e che ne costituiscano le parti più trasparenti, attraverso alle quali si scorgono i corpi opachi di questi pianeti. Egli le attribuisce a correnti analoghe ai nostri venti alisei. Huygens vide pure una specie di fascia sul disco di Marte, ma essa non è stata più riveduta in seguito, il che, avuto riguardo alla forza tanto maggiore dei telescopj moderni, fa credere che egli possa essersi ingannato. La figura 2 della tavola XXXIV rappresenta l' aspetto di Marte come si osserva coi migliori telescopj.

FASE (*Astron.*). Si dà questo nome alle diverse apparenze che presentano la luna e i pianeti secondo i differenti modi con cui rimandano la luce del sole. Questa parola viene dal greco φαίνω, io *brillo*.

Le *fasi* più notabili sono quelle della luna: noi ne daremo la spiegazione alla parola Luna. Venere e Mercurio presentano fasi esattamente simili a quelle della luna, ma non si possono osservare che coll' aiuto dei canocchiali. Marte pure ha le sue fasi, come le hanno, quantunque più difficili ad osservarsi, gli altri pianeti più lontani.

FATIO DE DUILLER (Niccolò), geometra nato a Basilea il 16 Febbrajo 1664. Fece i suoi studj a Ginevra, quindi recossi a Parigi, all'Aja, e finalmente a Londra ove fermò stanza. Buon matematico, e d' ingegno pronto e fecondo, Fatio si fece di buon'ora distinguere per diverse interessanti ricerche e per un gran numero di utili ed ingegnose invenzioni. In età appena di diciassette anni scrisse una lettera a Cassini, in cui esponeva il saggio di una teoria per la ricerca della distanza della terra dal sole, con un' ipotesi per ispiegare le apparenze dell'anello di Saturno. Nel 1684 diresse a Mariotte una lettera, nella quale gli dava ragguaglio di varie importanti ricerche intorno alla struttura dell' occhio. Trovò una maniera particolare di lavorare con maggior facilità le lenti, un mezzo di misurare la velocità delle navi, un mezzo di traforare i rubini e di farli servire al perfezionamento degli orologj: immaginò una camera di osservazione sospesa in modo che potessero facilmente osservarsi gli astri sopra un vascello, ec.

Fatio se non fu l' autore diede almeno la prima occasione di una disputa celebre nella storia delle matematiche. Il calcolo differenziale era nato allora (1684)

Leibnitz e Newton, per l'intromissione di Oldembourg, avevano tenuto un commercio epistolare, nel quale si erano comunicate le loro reciproche scoperte; la morte di Oldembourg aveva posto fine a questo carteggio, ma i due illustri dotti non avevano cessato di stimarsi. Essi non pensavano a disputarsi una scoperta che doveva immortalarli; Leibnitz ne raccoglieva pacificamente tutti gli onori, mentre Newton, anteponendo il riposo alla gloria, pareva che obliasse i diritti cui gli dava il suo metodo delle flussioni. Alcune lettere scritte in Inghilterra, nelle quali sembrava che Leibnitz si arrogasse con esclusiva l'invenzione del suo calcolo, risvegliarono l'attenzione dei dotti inglesi. Leibnitz vi proponeva ancora problemi difficili, e nominava i dotti da cui ne attendeva la soluzione. Fatio, dicesi, offeso di non vedersi in quella lista, diede il segnale e vendicò il suo amor proprio offeso, movendo dubbj sulla proprietà che Leibnitz aveva circa al calcolo differenziale; egli dichiarò altamente che quanto possedeva di questa nuova scienza non gli veniva da Leibnitz, e che ne riconosceva Newton come primo inventore. Leibnitz, incolpato così gravemente, se ne dolse alla Società Reale di Londra. I giornalisti di Lipsia presero le parti del loro compatriotta ed assalirono Newton senza riguardo. Keill replicò con pari imperizia ed ingiustizia. Le lagnanze si rinnovarono alla Società Reale; Newton, sempre tranquillo spettatore di quanto accadeva, discese alla fine nella palestra; i partiti si dichiararono, e la contesa mossa da Fatio ebbe in tal guisa conseguenze che fermarono l'attenzione di tutta l'Europa dotta.

Fatio godeva meritamente la stima dei dotti, la Società Reale di Londra lo aveva accolto tra i suoi membri mentre aveva appena ventiquattro anni, tutto sembrava promettergli una vita pacifica ed onorevole, quando abbracciato avendo gli errori dei fanatici delle Cevenne abbandonò i suoi studj e cadde in tali trascorsi che gli attirarono le più gravi sventure. Dopo aver vagato in Asia e in altri luoghi lontani, ritornato in Inghilterra, visse nell'oscurità e morì nella contea di Worcester nel 1753, in età di quasi novant'anni, senza esser risanato del suo accecamento. Tra' suoi fogli si trovarono varj scritti sull'astronomia, sulla meccanica, sull'alchimia, sulla cabala ec. Ha lasciato: I *Lettera a Cassini sopra una luce straordinaria che comparisce nel cielo da alcuni anni*, Amsterdam, 1686, in-8: si tratta della luce zodiacale; II *Epistola de Mari aenea Salomonis, ad Bernardum, in qua ostenditur geometrice satisfieri posse mensuris, quae de Mari aenea in sacra scriptura habentur*, Oxford, 1688; III *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi in quo minima sit resistentia*, Londra, 1699, in-4; IV *La navigazione perfezionata*, 1728, in-8: l'autore vi considera meglio che non si era fatto fino allora il problema di trovare la latitudine, mediante due osservazioni dell'altezza del sole e il calcolo del tempo decorso tra essa: V *Excerpta ex sua responsione ad excerpta ex litteris J. Bernoulli*, negli *Acta eruditorum* di Lipsia per l'anno 1700; VI *Epistola Nic. Facii ad Joh. Christoph. Facium qua vindicat solutionem problematis de inveniendo solida rotunda seu tereti in quo minor sit resistentia*, nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1713. Si trovano inoltre pressochè in tutti i numeri del *Gentlemen's Magazine* per gli anni 1737 e 1738 scritti interessantissimi di Fatio.

FATTORE (*Alg.*). Numero che entra nella composizione di un altro per mezzo di moltiplicazione. Per esempio, quando si considera 12 come il risultamento delle moltiplicazioni di 3 per 4, 3 e 4 si dicono i *fattori* del 12.

In generale a, b, c, d, ec., saranno i *fattori* di M, se si ha

$$a.b.c.d.\text{ ec.} = M.$$

I *fattori* di un numero si chiamano ancora i suoi *divisori*, perchè è evidente che un numero è esattamente divisibile per ciascuno dei suoi fattori.

La ricerca dei fattori di un numero, o la decomposizione di un nomero nei suoi fattori è di un oggetto importantissimo nell'aritmetica e nell'algebra. Quando si tratta di numeri interi si sa che:

1.° Ogni nomero pari è divisibile per 2.

2.° Ogni numero la cui cifra dell'unità è o ovvero 5 è divisibile per 5; è divisibile nel medesimo tempo per 2 e per 5, o per 10 nel primo caso.

3.° Ogni numero la cui somma delle cifre è un multiplo di 3 è divisibile per 3.

4.° Ogni numero la cui somma delle cifre è un multiplo di 9 è divisibile per 9.

5.° Ogni numero la cui somma delle cifre di posto impari, è eguale alla somma delle cifre di posto pari, o non ne differisce che di un multiplo di 11, è divisibile per 11.

Queste proprietà eminentemente semplici si trovano dimostrate in tutte l'opere elementari. Applichiamole alla ricerca dei fattori di 12870.

Prima di tutto, questo numero è divisibile per 2 e per 5 poichè è pari e perchè la sua prima cifra e o. Eseguendo queste divisioni avremo $12870 = 1287 \times 5 \times 2$. Ora prendendo la somma delle cifre di 1287, cioè $1+2+8+7=18$, vediamo che questa somma è un multiplo di 9, e ne concludiamo che 1287 è divisibile per 9. Infatti $1287 = 143 \times 9$, e per conseguenza $12870 = 143 \times 9 \times 5 \times 2$. Il fattore 143 non essendo divisibile nè per 2, nè per 3, nè per 5, paragoniamo la somma delle cifre di posto impari con quella delle sue cifre di posto pari, troveremo $(3+1)-4=0$, vale a dire che 143 è divisibile per 11. Avremo effettivamente $143 = 13 \times 11$, e per conseguenza

$$12870 = 13 \times 11 \times 9 \times 5 \times 2,$$

ovvero

$$12870 = 13 \times 11 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2,$$

a motivo che $9 = 3 \times 3$. Ora, il più gran fattore 13 essendo un numero primo non è più decomponibile, e concluderemo perciò che i fattori primi di 12870 sono 2, 3, 5, 11, e 13.

Quando nella composizione di un numero entrano dei fattori differenti da 2, 3, 5, 9 e 11, la loro ricerca presente allora delle difficoltà tali che, all'eccezione di alcuni casi particolari, siamo forzati a tentare successivamente, se fra i numeri primi più piccoli del proposto se ne trovi alcuno che possa dividerlo esattamente. Questi ultimi sono allora i suoi fattori. Ed è così, per esempio, che per scoprire i fattori di 186611 bisogna tentare successivamente tutti i nomeri primi da 1 fino a 431, mentre questo numero è formato dal prodotto dei due numeri primi 181 e 1031. Quanto alle regole particolari che si danno per i fattori 7, 13, 17, ec., è ancora più pronto tentare immediatamente la divisione, che adoprarle.

Fattore elementare. Nome dato dal Signor Wronski, nella sua *Filosofia delle Matematiche*, al fattore ideale $1 + \mu \frac{1}{\infty}$, la cui potenza infinitamente grande $\left(1 + \mu \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ dà la generazione di un nomero qualunque n.

Se supponiamo che l'esponente m della potenza a^m cresca di una quantità indefinitamente piccola $\frac{1}{\infty}$, avremo

$$a^{m + \frac{1}{\infty}} = a^m \times a^{\frac{1}{\infty}}$$

e la quantità $a^{\frac{1}{\infty}}$ sarà il *fattore elementare* di a^m, poichè evidentemente dipende dall'aiuto di questo fattore *ideale* di poter concepire una *continuità indefinita* nella generazione della quantità a^m. Continuità indefinita che reclama la ragione perchè il terzo modo di costruzione dei numeri (*Vedi* ALGEBRA, 19)

$$A^B = C$$

sia universalmente possibile. (*Vedi* FILOSOFIA DELLA MATEMATICHE).

Ma dalla teoria dei logaritmi (*Vedi* Questa parola) abbiamo, indicando con $\log a$, il logaritmo naturale di a,

$$\log a = \infty\left(a^{\frac{1}{\infty}} - 1\right),$$

il che ci dà

$$a^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \log a.\frac{1}{\infty},$$

così, la quantità $1 + \log a\frac{1}{\infty}$ è il *fattore elementare* della potenza a^m.

Vedremo altrove l'estrema importanza di questi fattori. *Vedi* FACOLTÀ e SOMMATORIO.

FATTORIELLA o FATTORIALE (*Alg.*) Prodotto i cui fattori sono in progressione aritmetica.

Il Vandermonde è stato il primo a considerare (Vedi *Memorie dell' Accademia delle Scienze* di Parigi dell'anno 1772, prima parte) i prodotti della forma

$$a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-(m-1)),$$

egli gli ha chiamati *potenze del secondo ordine* e gli ha indicati con la notazione

$$[a]^m,$$

conservata dal Lacroix nel suo gran trattato del calcolo differenziale. Seguendo questa notazione si ha

$$[a]^1 = a,$$
$$[a]^2 = a(a-1),$$
$$[a]^3 = a(a-1)(a-2),$$
ec. ec.

Dopo aver esaminato le principali proprietà di queste nuove funzioni, il Vandermonde ne ha ricavate diverse conseguenze che meritano di essere osservate, e tra le altre questa bella espressione della circonferenza del circolo

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 2\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}|-1},$$

della quale in altra parte ne abbiamo data una deduzione (*Vedi* CIRCOLO n.° 44).

Inseguito, il Kramp ha reso generale l'uso di queste funzioni, applicandole a

tutte le funzioni circolari e alla determinazione degli integrali degli ordini superiori (*Vedi Analisi delle refrazioni astronomiche*). Aveva cominciato dal dar loro il nome di *facoltà numeriche*, ma quindi l'Arbogast, nel suo trattato delle derivazioni, avendole indicate sotto quello di *fattorielle*, il Kramp ha creduto dovere adottare quest'ultima denominazione nella sua *aritmetica universale*.

Indicheremo dunque, secondo questi geometri, col nome di *fattoriella* un prodotto della forma

$$a(a+r)(a+2r)(a+3r)\ldots\ldots(a+(m-1)r),$$

l'accrescimento r potendo essere positivo o negativo, e conserveremo la notazione del Kramp che è

$$a^{m|r};$$

dimodochè abbiamo

$$a^{1|r}=a,$$
$$a^{2|r}=a(a+r),$$
$$a^{3|r}=a(a+r)(a+2r),$$
$$a^{4|r}=a(a+r)(a+2r)(a+3r),$$
$$\text{ec.}\qquad\text{ec.},$$
$$a^{m|r}=a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots(a+(m-1)r).$$

Finalmente in ultimo, il signor Wronski ha dato un nuovo grado d'importanza a queste funzioni, considerandole sotto un punto di vista interamente nuovo e sostituendo ai fattori a, $(a+r)$, $(a+2r)$, ec.; una funzione arbitraria di questi medesimi fattori. Prese così in generale, queste nuove funzioni formano una delle parti più importanti della scienza dei numeri; esse sono state trattate in questo Dizionario all'articolo Facoltà algoritmiche, nome adottato dal sapiente autore della *Filosofia delle matematiche*. In questo puoto non ci occuperemo che delle *fattorielle* semplici o elementari, delle quali sopra abbiamo dato la costruzione, e che possono considerarsi come un caso particolare delle *Facoltà algoritmiche*.

1. Nel prodotto

$$a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots(a+(m-1)r)$$

o, ciò che significa lo stesso nella fattoriella

$$a^{m|r},$$

il primo termine a si chiama la *base*; la differenza r, l'*accrescimento*; e il numero m dei fattori, l'*esponente*.

2. Possiamo ancora esprimere questo medesimo prodotto con

$$(a+(m-1)r)^{m|-r},$$

prendendo l'ultimo termine pel primo, e considerando l'accrescimento r come negativo. Si ha perciò

$$a^{m|r}=(a+(m-1)r)^{m|-r}.$$

Per la medesima ragione la fattoriella ad accrescimento negativo

$$a^{m|-r};$$

che indica il prodotto

$$a(a-r)(a-2r)\ldots\ldots(a-(m-1)r)$$

può mettersi sotto la forma

$$(a-(m-1)r)^{m|r}.$$

3. La fattoriella a esponente binomio $a^{m+n|r}$ è equivalente al prodotto di due fattorielle monomie $a^{m|r}$, $(a+mr)^{n|r}$. Vale a dire che si ha

$$a^{m+n|r}=a^{m|r}(a+mr)^{n|r}$$
$$=a^{n|r}(a+nr)^{m|r}.$$

Infatti

$$a^{m|r}(a+mr)^{n|r}=\left\{a(a+r)\ldots\ldots\left(a+(m-1)r\right)\right\}\times$$
$$\left\{(a+mr)\left(a+(m+1)r\right)\ldots\ldots\left(a+(m+n-1)r\right)\right\}$$
$$=a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots\left(a+(m+n-1)r\right)$$
$$=a^{m+n|r}$$

ed egualmente per il secondo prodotto.

4. La fattoriella $a^{m-n|r}$, può ancora decomporsi in

$$\frac{a^{m|r}}{\left[a+(m-n)r\right]^{n|r}},$$

poichè questa fattoriella esprime il prodotto di m fattori

$$a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots\left(a+(m-1)r\right)$$

diminuito, o piuttosto diviso per n fattori

$$\left(a+(m-n)r\right)\left(a+(m-n+1)r\right)\ldots\ldots\left(a+(m-1)r\right);$$

ossia per la fattoriella

$$\left(a+(m-n)r\right)^{n|r}.$$

5. Se nella precedente identità

$$a^{m-n|r}=\frac{a^{m|r}}{\left[a+(m-n)r\right]^{n|r}},$$

si fa $m=n$, si ottiene

$$a^{0|r}=\frac{a^{m|r}}{a^{m|r}}=1,$$

così, la fattoriella a esponente *zero* è, come la semplice potenza, eguale all'unità.

6. Facendo $m=0$, nella medesima identità, essa diviene

$$a^{-n|r}=\frac{1}{(a-nr)^{n|r}},$$

eguaglianza che determina l'idea, che dobbiamo annettere alle fattorielle con esponenti negativi.

7. Si vede facilmente che facendo l'accrescimento r eguale a zero, le fattorielle si riducono a semplici potenze, e che le proprietà che abbiamo dedotte, sono allora infatti quelle delle potenze. (*Vedi.* ALGEBRA, n.i 23, 24, e 25). Mediante questa considerazione si potrebbe concludere, per analogia, che tutte le relazioni precedenti dimostrate pel caso degli esponenti interi sussistono ancora, quando questi esponenti sono numeri frazionari, il che effettivamente ha luogo; ma siccome con estendere così, per analogia, al caso dell' esponente qualunque, alcune decomposizioni che generalmente non possono effettuarsi, il Kramp è caduto in contradizioni matematiche capaci di fargli mettere in dubbio i primi principii della scienza, abbiamo già dimostrato rigorosamente queste proprietà fondamentali delle fattorielle, all'articolo FACOLTA', ove abbiamo considerate queste fonzioni in tutta la loro generalità.

8. Di tutte le proprietà delle fattorielle, la più osservabile è quella che si può, con l'aiuto di semplici trasformazioni, dar loro basi o accrescimenti qualunque. Questo è quello che resulta dal seguente teorema.

La fattoriella $a^{m|r}$ *può decomporsi in due fattori di cui l'uno è la semplice potenza* a^m *e l'altro la fattoriella* $1^{m|\frac{r}{a}}$, *che ha per base l'unità. Vale a dire che si ha*

$$a^{m|r} = a^m \cdot 1^{m|\frac{r}{a}},$$

poichè, dividendo successivamente i fattori

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \text{ec}, \ldots\ldots a+(m-1)r$$

della fattoriella proposta, per la base a, essi diventano

$$\frac{a}{a}=1,\quad \frac{a+r}{a}=1+\frac{r}{a},\quad \frac{a+2r}{a}=1+\frac{2r}{a},\ \text{ec.}$$

e la fattoriella essa medesima può mettersi sotto la forma

$$a\times 1 . a\times\left(1+\frac{r}{a}\right) . a\times\left(1+2\frac{r}{a}\right)\ldots\ldots$$

$$a\times\left(1+(m-1)\frac{r}{a}\right),$$

ovvero riunendo gli m fattori a,

$$a^m\times 1\left(1+\frac{r}{a}\right)\left(1+2\frac{r}{a}\right)\ldots\ldots\left(1+(m-1\frac{r}{a}\right),$$

il che in ultima analisi si riduce a

$$a^m \cdot 1^{m|\frac{r}{a}}.$$

9. Moltiplicando ciascun fattore della fattoriella generale $a^{m|r}$, per una medesima quantità qualunque c, si ottiene ancora un' altra trasformazione impor-

tante; infatti la fattoriella diviene

$$ac(ac+cr)(ac+2cr)\dots\left(ac+(m-1)cr\right),$$

ovvero

$$(ac)^{m|cr},$$

ma, siccome moltiplicare ciascun fattore per c equivale a moltiplicare il prodotto degli m fattori per c^m, si ha perciò ancora

$$c^m . a^{m|r} = (ac)^{m|cr}$$

10. Premesso ciò, possiamo sempre trasformare la fattoriella $a^{m|r}$ in un'altra, la cui base sia una quantità qualunque b, poichè pel (n.° 8) abbiamo

$$a^{m|r} = a^m . 1^{m|\frac{r}{a}}$$

donde

$$\frac{a^{m|r}}{a^m} = 1^{m|\frac{r}{a}}.$$

Moltiplicando i due membri di quest'eguaglianza per b^m, essa diviene

$$\frac{b^m}{a^m} . a^{m|r} = b^m . 1^{m|\frac{r}{a}},$$

ma in virtù del n.° 9 abbiamo

$$b^m . 1^{m|\frac{r}{a}} = b^{m|\frac{br}{a}}$$

e, per conseguenza,

$$\frac{b^m}{a^m} . a^{m|r} = b^{m|\frac{br}{a}};$$

si ha dunque definitamente, dividendo pel fattore $\frac{b^m}{a^m}$

$$a^{m|r} = \frac{a^m}{b^m} . b^{m|\frac{br}{a}}.$$

11. Con i medesimi principii possiamo ancora trasformare la fattoriella $a^{m|r}$ in un'altra il cui accrescimento sia una quantità qualunque z. Poichè per quello che abbiamo dimostrato

$$a^{m|r} = r^m . \left(\frac{a}{r}\right)^{m|1},$$

ora, da questa eguaglianza si ricava

$$\frac{a^{m|r}}{r^m} = \left(\frac{a}{r}\right)^{m|1}$$

e, molliplicando da una parte e dall' altra per z^m

$$\frac{z^m}{r^m} \cdot a^{m|r} = z^m \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{m|1} = \left(\frac{az}{r}\right)^{m|z},$$

donde, finalmente si ricava

$$a^{m|r} = \frac{r^m}{z^m} \cdot \left(\frac{az}{r}\right)^{m|z}.$$

12. Una fattoriella il cui esponente è un numero pari non cangia di valore, quando si cangiano i segni della sua base e del suo accrescimento, e si ha generalmente, $2n$ indicando un numero pari qualunque,

$$(\pm a)^{2n|\pm r} = (\mp a)^{2n|\mp r}.$$

Poichè i fattori del primo membro di quest' eguaglianza essendo

$$+(\pm a),\quad +(\pm a \pm r),\quad +(\pm a \pm 2r),\quad +(\pm a \pm 3r),\quad \text{ec},$$

se si cangiano nel medesimo tempo i segni della base e dell' accrescimento, essi diventano

$$+(\mp a),\quad +(\mp a \mp r),\quad +(\mp a \mp 2r),\quad +(\mp a \mp 3r),\quad \text{ec.},$$

ovvero

$$-(\pm a),\quad -(\pm a \pm r),\quad -(\pm a \pm 2r),\quad -(\pm a \pm 3r),\quad \text{ec.}$$

vale a dire i medesimi che nel primo caso, ma tutti negativi. Dunque, poichè il numero di questi fattori è pari, il prodotto degli ultimi avrà il medesimo segno del prodotto dei primi; e siccome di più questi prodotti sono i medesimi, si ha necessariamente

$$(\pm a)^{2n|\pm r} = (\mp a)^{2n|\mp r}.$$

Se l' esponente fosse un numero impari $2n+1$, si troverebbe con la medesima facilità

$$(\pm a)^{2n+1|\pm r} = -(\mp a)^{2n+1|\mp r},$$

così le fattorielle, riguardo a ciò, seguono la medesima legge delle semplici potenze.

13. Osservando, pel n.° 9, che la fattoriella $(-a)^{m|-r}$ può decomporsi in $(-1)^m \cdot a^{m|r}$, e che pel n.° 8

$$(-1)^m \cdot a^{m|r} = (-1)^m \cdot a^m \cdot 1^{m|\frac{r}{a}},$$

possiamo concluderne che

$$(-a)^{m|-r} = (-a)^m \cdot 1^{m|\frac{r}{a}} \quad \ldots\ldots (a),$$

e motivo di $(-a)^m \cdot a^m = (-a)^m$. Ma questa decomposizione, che rigorosamente è esatta quando m è un numero intero, non ha luogo generalmente, o per tutti i valori di questo esponente: questo è quello che il signor Wrouski ha dimostrato nella sua *introduzione alla filosofia delle Matematiche*, risalendo ai principii superiori della generazione delle quantità, ed esso ha dato così la soluzione dei risultamenti che il Kramp aveva ottenuti, ammettendo falsamente la generalità di quest' espressione (a).

14. Siccome è facilissimo dimostrare che tutte le precedenti trasformazioni hanno ancora luogo pel caso dell' esponente intero negativo, non ci arrestaremo di più, e procederemo alla deduzione delle leggi principali delle fattorielle.

Teorema. *Una fattoriella qualunque* $a^{m|r}$ *può sempre svilupparsi in una serie*

$$A_0+A_1r+A_2r^2+A_3r^3+A_4r^4+\text{ ec.}$$

procedente per le potenze progressive dell' accrescimento r.

Per dimostrare questo teorema nel caso dell' esponente m intero e positivo, e per trovare la legge dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ec., è necessario considerare la formazione del prodotto di più binomi, i cui secondi termini soltanto sono differenti; ora si sa (*Vedi* Moltiplicazione) che il prodotto di m binomi

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+m),$$

è eguale a

$$x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+B_3x^{m-3}+\text{ ec.}\ldots\ldots+B_m,$$

B_1 essendo eguale alla somma dei secondi termini dei binomi, B_2 alla somma dei loro prodotti presi *due a due*, B_3 alla somma dei loro prodotti presi *tre a tre*, e così di seguito. Ma nel caso delle fattorielle i secondi termini dei binomi essendo

$$0r,\ 1r,\ 2r,\ 3r,\ \ldots\ldots\ (m-1)r,$$

la loro somma, ovvero

$$0r+1r+2r+3r+\ \ldots\ldots\ +(m-1)r,$$

può mettersi sotto la forma

$$[0+1+2+3+\ldots\ldots(m-1)]r,\quad \text{ovvero}\quad (m|1)r,$$

indicando con $(m|1)$, la somma dei numeri naturali $0, 1, 2, 3$, ec. .... $(m-1)$.

La somma dei prodotti presi *due a due* di questi secondi termini può ancora prendere la forma

$$(1\times0+1\times2+2\times3+\text{ ec.}\ldots\ldots)r^2,\quad \text{ovvero}\quad (m|2)r^2$$

$(m|2)$, indicando la somma dei prodotti presi *due a due* dei numeri naturali, $0, 1, 2, 3$, ec. .... $m-1$ e.

In generale, la somma dei prodotti presi μ a μ dei secondi termini dei fattori della fattoriella potrà esprimersi con $(m|\mu)r^{\mu}$, $(m|\mu)$ indicando la somma dei prodotti μ a μ dei numeri naturali $0, 1, 2, 3\ldots m-1$.

Così, osservando che per passare dallo sviloppo del prodotto di m binomi a quello della fattoriella $a^{m|r}$, non è necessario che sostituire a ad x, e le quantità

$$(m|1)r,\quad (m|2)r^2,\quad (m|3)r^3,\quad (m|4)r^4,\text{ ec.}$$

ai coefficienti B_1, B_2, B_3, ec. avremo definitivamente

$$a^{m|r} = a^m + (m|1)a^{m-1}r + (m|2)a^{m-2}r^2 + \text{ec.} \ldots + (m|m-1)ar^{m-1} \ldots (a').$$

L'ultimo termine B_m dello sviluppo del prodotto degli m binomi, essendo in questo caso *zero*, a motivo del fattore *zero* che ci si trova, lo sviluppo della fattoriella si arresta al termine $(m|m-1)ar^{m-1}$.

Non ci rimane da conoscere che la legge che lega i coefficienti $(m|1)$, $(m|2)$, ec., per poter valutargli in ciascun caso particolare. Ora, abbiamo (n.° 3)

$$(a+mr)^{n|r} \cdot a^{m|r} = a^{n|r} \cdot (a+nr)^{m|r},$$

facendo in quest' eguaglianza $n=1$, essa diviene

$$(a+mr) \cdot a^{m|r} = a(a+r)^{m|r},$$

e gli sviluppi dei due membri di quest' ultima debbono essere identici.

Per ottenere lo sviluppo del primo membro, è evidente che bisogna moltiplicare per $(a+mr)$ quello di $a^{m|r}$; eseguendo questa moltiplicazione avremo

$$(a+mr)a^{m|r} = a^{m+1} + [m + (m|1)]a^m r + [m(m|1) + (m|2)]a^{m-1}r^2 + \text{ec.}$$

Si otterrà lo sviluppo del secondo membro sostituendo prima $a+r$, in luogo di a nell'espressione generale (a') e moltiplicando quindi per a.

L'espressione (a') diviene mediante questa sostituzione

$$(a+r)^{m|r} = (a+r)^m + (m|1)(a+r)^{m-1}r + (m|2)(a+r)^{m-2}r^2 + \text{ec.}$$

e si trova, sviluppando i binomi $(a+r)^m$, $(a+r)^{m-1}$ (*Vedi* Binomio), e moltiplicando tutto per a,

$$a(a+r)^{m|r} = a^{m+1} + ma^m r + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-1}r^2 + \text{ec.} \ldots + (m|1)a^m r + (m-1)(m|1)a^{m-1}r^2 + \text{ec.} \ldots + (m|2)a^{m-1}r^2 + \text{ec.} \ldots,$$

così questo sviluppo dovendo essere identico con quello di $(a+mr)a^{m|r}$, avremo la serie di eguaglianze,

$$m + (m|1) = m + (m|1),$$

$$m(m|1) + (m|2) = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + (m-1)(m|1) + (m|2),$$

$$m(m|3) + (m|2) = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(m|1) + (m-2)(m|2) + (m|3),$$

ec. $=$ ec.

La prima di queste egoaglianze è una semplice identità; sottraendo dai due membri della seconda il termine comone $(mI2)$, ne ricaveremo

$$(mI1) = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \quad \ldots\ldots (b),$$

operando egualmeote per le seguenti eguagliaoze otterremo,

$$\left.\begin{aligned}
&2(mI2) = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(mI1) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\
&3(mI3) = \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2}(mI2) + \\
&\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(mI1) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
&\text{ec.} = \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b),$$

formule la cui legge è evidente, e con l'aiuto delle quali possiamo calcolare i coefficieoti dello sviluppo di una fattoriella qualuoque. Un esempio basterà per insegnare il loro uso; sia $a^{5|r}$, la fattoriella della quale si domanda lo sviluppo: faceodo $m=5$ nell'espressiooi (b), avremo

$$(mI1) = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10,$$

$$2(mI2) = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 10 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 70,$$

$$3(mI3) = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{70}{2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 10 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 150,$$

$$4(mI4) = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{150}{3} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{70}{2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 10,$$

$$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 96,$$

$$5(mI5) = 0 \cdot \frac{96}{4} + 0 \cdot \frac{150}{3} + 0 \cdot \frac{70}{2} + 0 \cdot 10 + 0 = 0.$$

Totti gli altri coefficienti si riducono a zero, lo sviloppo domandato non ha che i cinque segueoti termioi:

$$a^{m|5} = a^5 + 10a^4r + 35a^3r^2 + 50a^2r^3 + 24ar^4.$$

15. Qoando l'esponeote della fattoriella $a^{m|r}$ è on numero intero negativo, il suo sviluppo prende on nomero indefinito di termini e i coefficienti $(mI1)$, $(mI2)$, ec., che si componevano delle *somme* dei prodotti combinati dei numeri naturali 1, 2, 3, ec., diventano le *differenze* delle poteoze di questi medesimi

numeri. Possiamo trovare ancora facilmente la legge dello sviluppo, poichè abbiamo (n.° 6)

$$a^{-m|r} = \frac{1}{(a-mr)^{m|r}},$$

ovvero

$$a^{-m|r} = \frac{1}{(a-r)^{m|-r}},$$

a motivo (n.° 2), di

$$(a-mr)^{m|r} = (a-r)^{m|-r},$$

si ha dunque ancora

$$a^{-m|r} = \frac{1}{a-r} \cdot \frac{1}{a-2r} \cdot \frac{1}{a-3r} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a-mr}$$

sviluppando ciascun fattore in particolare, per mezzo del binomio del Newton, avremo

$$(a-r)^{-1} = a^{-1} + a^{-2}r + a^{-3}r^2 + a^{-4}r^3 + \text{ec.},$$

$$(a-2r)^{-1} = a^{-1} + 2a^{-2}r + 4a^{-3}r^2 + 8a^{-4}r^3 + \text{ec.},$$

$$(a-3r)^{-1} = a^{-1} + 3a^{-2}r + 9a^{-3}r^2 + 27a^{-4}r^3 + \text{ec.},$$

e in generale

$$(a-mr)^{-1} = a^{-1} + ma^{-2}r + m^2a^{-3}r^2 + m^3a^{-4}r^3 + \text{ec.},$$

e il prodotto di tutti questi sviluppi, che deve dare quello di $a^{-m|r}$ è necessariamente della forma

$$a^{-m} + A_1a^{-m-1}r + A_2a^{-m-2}r^2 + A_3a^{-m-3}r^3 + \text{ec.},$$

il numero dei termini essendo indefinito. Ora quest'espressione è, ad eccezione dei coefficienti la cui legge non si conosce ancora, ciò che diviene lo sviluppo $a^{m|r}$ sostituendovi $-m$ invece di m.

Per trovare la legge dei coefficienti $(m\,I\,1)$, $(m\,I\,2)$, ec., siamo partiti in primo luogo dall'eguaglianza

$$(a+mr)^{n|r} \cdot a^{m|r} = a^{n|r} \cdot (a+nr)^{m|r},$$

ma quest'eguaglianza sussiste ancora quando m ed n sono negativi (*vedi* FACOLTA' n.° 17). Così facendo $m = -m$ e $n = 1$, avremo ancora

$$(a-mr)a^{-m|r} = a(a+r)^{-m|r},$$

operando come sopra, otterremo per i coefficienti A_1, A_2, A_3, ec. i seguenti valori

$$A_1 = \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2},$$

$$2A_2 = \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} A_1 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$3\,A_3 = \frac{(m+2)(m+3)}{1\,.\,2}\,A_2 - \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,A_1 +$$

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

$$4\,A_4 = \frac{(m+3)(m+4)}{1\,.\,2}\,A_3 - \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{1\,.\,2\,.\,3}\,A_2 +$$

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,A_1 -$$

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5},$$

ec. ec.,

valori identici con quelli che si otterrebbero facendo m negativo nell' espressioni (b). Così lo sviluppo

$$a^{m|r} = a^m + (m\mathrm{I}1)a^{m-1}r + (m\mathrm{I}2)a^{m-2}r^2 + (m\mathrm{I}3)a^{m-3}r^3 + \text{ec.} \ldots\ldots$$

nel quale i coefficienti son dati dall' espressioni (b), si trova dimostrato per tutti i valori interi positivi e negativi dell' esponente m.

Si potrebbe con altre considerazioni analoghe dimostrare la generalità di questa legge per i valori frazionari o altri, dell' esponente m; ma ci contenteremo in questo punto di ammettere per induzione questa generalità, rimandando all' articolo FACOLTA' per la costruzione dell'idea, che dobbiamo annettere alle fattorielle a esponenti frazionari, e alle *fattorielle irrazionali*.

16. Ora converrebbe esporre il teorema fondamentale di queste funzioni, cioè che la fattoriella a base binomia

$$(a+b)^{m|r},$$

ha per sviluppo l' espressione

$$a^{m|r} + m a^{m-1|r} b^{1|r} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,a^{m-2|r} b^{2|r} +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{m-3|r} b^{3|r} + \text{ec.},$$

formula della quale il binomio del Newton non è che un caso particolare, cioè quello ove si ha $r = 0$; ma ne abbiamo digià data, alla parola BINOMIO, una nuova dimostrazione, e di più l'abbiamo dedotta da una legge più generale (*vedi* COEFFICIENTI INDETERMINATI III); dimodochè si trova dimostrata, in questo Dizionario, nel modo il più rigoroso per tutti i valori dell' esponente m interi o frazionari, positivi o negativi. Rimanderemo perciò ai citati articoli; come ancora rimanderemo alla parola FACOLTA' per la deduzione del FATTORE ELEMENTARE, (*vedi* questa parola) della fattoriella generale $a^{m|r}$. Dipende dalla considerazione estremamente importante di questo fattore, la chiave data dal signore Wronski sopra le contradizioni matematiche trovate dal Kramp e delle quali abbiamo parlato sopra (n i 7 e 13).

17. La valutazione numerica delle fattorielle con esponenti frazionari è uno dei principali punti della teoria di queste funzioni, che non abbiamo potuto indicare nel dare il loro sviluppo generale. Esporremo in questo punto, oltre gl' ingegnosi mezzi scoperti dal Kramp, per non ottenere che sviluppi convergenti, diversi processi particolari per mezzo dei quali possiamo assai prontamente calcolare i valori delle fattorielle, quando le loro basi sono legate da certe condizioni con la base di un' altra fattoriella il cui valore è conosciuto.

Abbiamo dimostrato che si ha generalmente, m ed n essendo numeri reali qualunque,

$$\left.\begin{aligned} a^{m|r} &= [a+(m-1)r]^{m|-r} \\ a^{m|-r} &= [a-(m-1)r]^{m|r} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1),$$

$$a^{m+n|r} = a^{m|r}(a+mr)^{n|r} = a^{n|r}(a+nr)^{m|r} \ldots (2),$$

$$a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}} \ldots\ldots (3).$$

Di più, come conseguenza immediata dell'espressione (3), e a motivo di $a^{0|r} = 1$,

$$a^{-m|r} = \frac{1}{(a-mr)^{m|r}} \ldots\ldots (4),$$

quest' ultima espressione somministra le seguenti otto trasformazioni, per il passaggio degli accrescimenti positivi agli accrescimenti negativi, facendo variare i segni di m e di r

$$a^{-m|r} = \frac{1}{(a-mr)^{m|r}} = \frac{1}{(a-r)^{m|-r}} \ldots\ldots (5),$$

$$a^{-m|-r} = \frac{1}{(a+mr)^{m|-r}} = \frac{1}{(a+r)^{m|r}} \ldots\ldots (6),$$

$$a^{m|r} = \frac{1}{(a+mr)^{-m|r}} = \frac{1}{(a-r)^{-m|-r}} \ldots\ldots (7),$$

$$a^{m|-r} = \frac{1}{(a-mr)^{-m|-r}} = \frac{1}{(a+r)^{-m|r}} \ldots\ldots (8).$$

18. Se facciamo, nella legge (2), $m+n=p$, potremo dedurne

$$\frac{a^{p|r}}{a^{n|r}} = (a+nr)^{p-n|r} \ldots\ldots (9),$$

espressione la quale prova che il rapporto di due fattorielle della medesima base e del medesimo accrescimento è razionale, tutte le volte che la differenza degli esponenti è un numero intero. Si ha, per esempio, nel caso di $p=\frac{5}{4}$ e $n=\frac{1}{4}$

$$\frac{a^{\frac{5}{4}|r}}{a^{\frac{1}{4}|r}} = \left(a+\frac{1}{4}r\right)^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}|r} = a+\frac{1}{4}r.$$

Faremo osservare generalmente che qualunque fattoriella, il cui esponente è un numero frazionario maggiore dell'unità, può sempre riportarsi ad una fattoriella della medesima base e del medesimo accrescimento, avente un esponente minore dell'unità. Sia infatti $\frac{p}{q}$ una frazione nella quale $p>q$, indicando con m il quoziente intero e con n il resto della divisione, in modo che

$$\frac{p}{q}=m+\frac{n}{q},$$

avremo per la formula (2)

$$a^{\frac{p}{q}|r}=a^{m|r}\cdot\left(a+mr\right)^{\frac{n}{q}|r};$$

ovvero ancora

$$a^{\frac{p}{q}|r}=a^{\frac{n}{q}|r}\cdot\left(a+\frac{n}{q}r\right)^{m|r}.$$

Così, nel caso di $\frac{p}{q}=\frac{5}{4}$, viene $m=1$, $n=1$, e per conseguenza,

$$a^{\frac{5}{4}|r}=a\cdot\left(a+r\right)^{\frac{1}{4}|r};$$

ovvero

$$a^{\frac{5}{4}|r}=a^{\frac{1}{4}|r}\left(a+\frac{1}{4}r\right).$$

19. Il prodotto di due fattorielle della medesima base e del medesimo accrescimento non può, in alcun caso, ridursi a una sola fattoriella; ma, quando gli accrescimenti sono di segni differenti, si ottiene una riduzione utilissima in un'infinità di casi. Abbiamo, per la legge (2),

$$(a-mr)^{2m|r}=(a-mr)^{m|r}\cdot a^{m|r}\ldots\ldots(a).$$

ora, in virtù dell'espressioni (1),

$$(a-mr)^{m|r}=(a+r)^{m|-r},$$

ed è facile vedere che

$$a(a+r)^{m|-r}=a^{m+1|-r}=a^{m|-r}(a-mr).$$

Moltiplicando dunque da una parte i due membri dell'eguaglianza (a) per a e dall'altra dividendoli per $(a-mr)$, verrà

$$(a-mr)^{2m|r}\cdot\frac{a}{(a-mr)}=a^{m|-r}\cdot a^{m|r}.$$

Ma

$$(a-mr)^{2m|r}=(a-mr)\cdot(a-mr+r)^{2m-1|r};$$

dunque

$$a^{m|r}.a^{m|-r}=a.(a-mr+r)^{2m-1|r}\;.\;.\;.\;.\;.\;(10).$$

Se, per esempio, $m=\frac{1}{2}$, si avrebbe, qualunque sieno a ed r,

$$a^{\frac{1}{2}|r}.a^{\frac{1}{2}|-r}=a.$$

20. Un' altra riduzione utilissima è la seguente

$$a^{m|r}.a^{1-m|-r}=a\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11),$$

facile a verificare; mentre dall' espressione (3),

$$a^{1-m|r}=\frac{a}{[a-(1-m)r]^{m|-r}};$$

e dall' espressione (1)

$$[a-(1-m)r]^{m|-r}=a^{m|r}.$$

Così quando, la somma degli accrescimenti essendo o, la somma degli esponenti è 1, il prodotto di due fattorielle della medesima base è eguale a questa base. Si ha per esempio

$$a^{\frac{1}{2}|r}.a^{\frac{1}{2}|-r}=a,$$

$$a^{\frac{1}{3}|r}.a^{\frac{2}{3}|-r}=a,$$

$$a^{\frac{2}{5}|r}.a^{\frac{3}{5}|-r}=a,$$

ec. = ec.

21. Quando la somma degli esponenti è zero, come pure quella degli accrescimenti, si ha questa nuova riduzione,

$$a^{m|r}.a^{-m|-r}=\frac{a}{a+mr}\;.\;.\;.\;.\;.\;(12).$$

Infatti, dall' espressione (6),

$$a^{-m|-r}=\frac{a}{(a+r)^{m|r}};$$

ma

$$a^{m|r}=a(a+r)^{m-1|r} \quad \text{e} \quad (a+r)^{m|r}=(a+r)^{m-1|r}.(a+mr);$$

dunque

$$a^{m|r}.a^{-m|-r}=\frac{a(a+r)^{m-1|r}}{(a+mr).(a+r)^{m-1|r}}=\frac{a}{a+mr}.$$

22. La fattoriella a esponente pari $a^{2m|r}$ può sempre decomporsi in due fattori $a^{m|2r}$, $(a+r)^{m|2r}$, di cui il primo esprime il prodotto dei fattori di posto impari

$$a(a+2r)(a+4r)(a+6r)\;.\;.\;.\;.\;.\;[a+(2m-2)r],$$

e di cui il secondo esprime il prodotto di tutti i fattori di posto pari

$$(a+r)(a+3r)(a+5r)(a+7r)\ldots\ldots[a+(2m-1)r];$$

il che è evidente, e dà la relazione generale

$$a^{2m|r}=a^{m|2r}.(a+r)^{m|2r}\ldots\ldots(13).$$

Se l'esponente fosse della forma $3m$, sarebbe ancora

$$a^{3m|r}=a^{m|3r}.(a+r)^{m|3r}.(a+2r)^{m|3r},$$

e così di seguito.

23. Abbiamo veduto (n.° 10) che possiamo dare ad una fattoriella una base o un esponente qualunque, per mezzo delle seguenti relazioni che non faremo che rammentare

$$a^{m|r}=\frac{a^m}{b^m}.b^{m\left|\frac{br}{a}\right.}\ldots\ldots(15);$$

$$a^{m|r}=\frac{r^m}{z^m}.\left(\frac{az}{r}\right)^{m|z}\ldots\ldots(16).$$

Queste due trasformazioni riposano in principio sulla costruzione

$$b^m.a^{m|r}=(ab)^{m|br}\ldots\ldots(17),$$

evidente, per se stessa, fintantochè l'esponente m è un numero intero, qualunque sieno i segni della quantità a e b, m e r, ma che non è permesso di generalmente estendere ai casi dei valori frazionari di m che quando b è un numero positivo. Infatti, b essendo negativo, l'eguaglianza (17) prende la forma

$$(-b)^m.a^{m|r}=(-ab)^{m|-br}\ldots\ldots(b),$$

astrazione fatta dai segni di a e di r, i quali non esercitano alcuna influenza sulla natura del fattore $(-b)^m$, dal quale giusto dipende la possibilità di questa costruzione. Ora è certo che l'eguaglianza (b) non può aver luogo che fintantochè il suo primo membro è una quantità reale, perchè qualunque fattoriella a base e ad accrescimento positivo o negativo è essenzialmente una quantità reale, della quale possiamo sempre valutare la grandezza, come vedremo in seguito; ma il fattore $(-b)^m$, e per conseguenza il primo membro $(-b)^m a^{m|r}$ non è generalmente una quantità reale che quando l'esponente m è un numero *intero*; dunque quest'eguaglianza non è vera generalmente che per la serie dei valori interi positivi o negativi di m. Così, se per *induzione* è permesso di estendere l'eguaglianza (17) ai valori frazionari dell'esponente m, nel caso di b *positivo*, è impossibile di accordarle una simile estensione nel caso di b *negativo*; dimodochè facendo uso, tanto di questa costruzione quanto di tutte quelle trasformazioni che ne derivano, è essenziale di non introdurre o di non togliere nelle basi delle fattorielle alcun fattore capace di cangiare i segni di queste basi; non si può dunque generalmente porre, qualunque sia m, come l'aveva fatto il Kramp,

$$(-a)^{m|-r}=(-a)^m.1^{m\left|\frac{a}{r}\right.},$$

ma bensì

$$\left(-a\right)^{m|-r}=a^{m}.\left(-1\right)^{m\left|\frac{a}{r}\right.}.$$

Se questo geometra avesse fatto uso di quest' ultima trasformazione, la sola vera in tutti i casi, non sarebbe caduto in risultamenti assurdi che esso ha indicati, e dei quali parleremo quanto prima.

24. Procediamo ora alla valutazione numerica delle fattorielle, cominciando da indicare le relazioni, che esistono fra quelle che non differiscono che per le loro basi. Abbiamo, in virtù della legge fondamentale (2), l' identità

$$a^{m|r}(a+mr)^{n|r}=a^{n|r}(a+nr)^{m|r},$$

dalla quale si deduce l' espressione generale

$$(a+mr)^{n|r}=\frac{(a+nr)^{m|r}}{a^{m|r}}.a^{n|r}\ .\ .\ .\ .\ .\ (18),$$

con' l' aiuto della quale conoscendo la fattoriella $a^{n|r}$, la valutazione della fattoriella $(a+mr)^{n|r}$ si riduce a moltiplicazioni, fintantochè m è un numero intero. Il solo caso importante essendo quello di n frazionario, faremo $n=\frac{p}{q}$, il che darà all'espressione (18) la forma

$$\left(a+mr\right)^{\frac{p}{q}|r}=\frac{\left(a+\frac{p}{q}r\right)^{m|r}}{a^{m|r}}.a^{\frac{p}{q}|r},$$

più propria a far conoscere tutta la sua importanza. Nel caso, per esempio, di

$$1^{\frac{p}{q}|r}=1^{\frac{1}{2}|r},$$

fattoriella il cui valore conosciuto è 0,886227 ...., ovvero $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, π esprimendo il rapporto della circonferenza al diametro $=3,1415926$ .... si avrebbe

$$\left(1+m\right)^{\frac{1}{2}|1}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{m|1}}{1^{m|1}}.1^{\frac{1}{2}|1}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{m|1}}{1^{m|1}}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

e siccome $1+m$ può rappresentare tutti i numeri interi facendo successivamente $m=0$, $m=1$, $m=2$, ec., questa relazione basta per valutare tutte le fattorielle della forma $a^{\frac{1}{2}|1}$, nella quale a è un numero intero; facendo dunque $1+m=a$

donde $m = a - 1$, e osservando che

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{a-1|1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{a-1|1} = \frac{3^{a-1|2}}{2^{a-1}}$$

$$2^{a-1} \cdot 1^{a-1|1} = 2^{a-1|2},$$

avremo l'espressione più semplice

$$a^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3^{a-1|2}}{2^{a-1|2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \; \ldots\ldots (c),$$

il che ci darà nei casi particolari di $a=2$, $a=3$, $a=4$, ec.

$$2^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$3^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$4^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$5^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

Potremo valutare egualmente la fattoriella $a^{\frac{1}{2}|r}$ in tutti casi, in cui l'accrescimento r sarà un fattore esatto dalla base a, poichè si ha generalmente

$$a^{\frac{1}{2}|r} = r^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}|1}.$$

Sia per esempio, la fattoriella $12^{\frac{1}{2}|3}$, la decomposizione in fattori dà

$$12^{\frac{1}{2}|3} = \sqrt{3} \cdot 4^{\frac{1}{2}|1},$$

e, per conseguenza,

$$12^{\frac{1}{2}|3} = \sqrt{3} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

25. Questa valutazione delle fattorielle all'esponente $\frac{1}{2}$ si applica facilmente

agli accrescimenti negativi, mentre abbiamo dall'espressione (10)

$$a^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{a}{a^{\frac{1}{2}|1}},$$

donde

$$a^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{a \cdot 2^{a-1|2}}{3^{a-1|2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \dots (d),$$

e per tutte le fattorielle della forma $(br)^{\frac{1}{2}|-r}$,

$$(br)^{\frac{1}{2}|-r} = \sqrt{r} \cdot \frac{b \cdot 2^{b-1|2}}{3^{b-1|2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Si ha dunque, per esempio,

$$1^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$2^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$3^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$4^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

ec. = ec.

e, ancora

$$2^{\frac{1}{2}|-2} = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$6^{\frac{1}{2}|-2} = \sqrt{2} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

ec. = ec.

26. Resulta dalle due espressioni generali (c) e (d) che, quantunque le fattorielle a esponente $\frac{1}{2}$ e ad accrescimento $+1$ o -1 siano irrazionali per tutti

i valori interi delle loro basi, il rapporto di due di queste fattorielle, del medesimo accrescimento, è sempre una quantità razionale, come pure il prodotto di due fattorielle di accrescimento di segni contrari. Infatti m ed n essendo due numeri interi, abbiamo, in virtù dell'espressione (b),

$$m^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3^{m-1|2}}{2^{m-1|2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$n^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3^{n-1|2}}{2^{n-1|2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

e, per conseguenza

$$\frac{m^{\frac{1}{2}|1}}{n^{\frac{1}{2}|1}} = \frac{2^{n-1|2} \cdot 3^{m-1|2}}{2^{m-1|2} \cdot 3^{n-1|2}} \ldots\ldots (e)$$

Per esempio,

$$\frac{1^{\frac{1}{2}|1}}{2^{\frac{1}{2}|1}} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}|1}}{3^{\frac{1}{2}|1}} = \frac{2.4.3}{2.3.5} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{3^{\frac{1}{2}|1}}{4^{\frac{1}{2}|1}} = \frac{2.4.6.3.5}{2.4.3.5.7} = \frac{6}{7}.$$

Abbiamo egualmente, dalla formula (d)

$$m^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{m \cdot 2^{m-1|2}}{3^{m-1|2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$n^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{n \cdot 2^{n-1|2}}{3^{n-1|2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

il che dà

$$\frac{m^{\frac{1}{2}|-1}}{n^{\frac{1}{2}|-1}} = \frac{m \cdot 2^{m-1|2} \cdot 3^{n-1|2}}{n \cdot 2^{n-1|2} \cdot 3^{m-1|2}} \ldots\ldots (f).$$

Donde, per esempio

$$\frac{1^{\frac{1}{2}|-1}}{2^{\frac{1}{2}|-1}} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,2} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}|-1}}{3^{\frac{1}{2}|-1}} = \frac{2\,.\,2\,.\,3\,.\,5}{3\,.\,2\,.\,4\,.\,3} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{3^{\frac{1}{2}|-1}}{4^{\frac{1}{2}|-1}} = \frac{3\,.\,2\,.\,4\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,.\,3\,.\,5} = \frac{7}{8}.$$

D' altronde possiamo mettere l' espressiooi (e) ed (f) sotto una forma più semplice, operando le seguenti riduzioni, fondate sulla legge (7)

$$\frac{2^{n-1|2}}{2^{m-1|2}} = [2+2(m-1)]^{n-m|2} = (2m)^{n-m|2},$$

$$\frac{3^{m-1|2}}{3^{n-1|2}} = [3+2(n-1)]^{m-n|2} = (2n+1)^{m-n|2}$$

$$= \frac{1}{(2m+1)^{n-m|2}};$$

esse diventano ancora

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m^{\frac{1}{2}|1}}{n^{\frac{1}{2}|1}} = \dfrac{(2m)^{n-m|2}}{(2m+1)^{n-m|2}} \ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{m^{\frac{1}{2}|-1}}{n^{\frac{1}{2}|-1}} = \dfrac{m\,.\,(2m+1)^{n-m|2}}{n\,.\,(2m)^{n-m|2}} \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots(g).$$

Quanto ai prodotti delle fattorielle, i cui accrescimenti sono di segni contrari, è evidente che si ha, partendo dai medesimi valori

$$m^{\frac{1}{2}|1}\,.\,n^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{n\,.\,2^{n-1|2}\,.\,3^{m-1|2}}{2^{m-1|2}\,.\,3^{n-1|2}} = \frac{n\,.\,(2m)^{n-m|2}}{(2m+1)^{n-m|2}} \ldots\ldots(h).$$

Nel caso particolare di $m=2$, $n=3$, si avrebbe, per esempio:

$$2^{\frac{1}{2}|1} \cdot 3^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Tutte queste formule si applicano senza difficoltà alle fattorielle comprese sotto le forme generali $(mr)^{\frac{1}{2}|r}$, $(mr)^{\frac{1}{2}|-r}$.

27. Le fattorielle ad accrescimento $+2$ o -2 dell'ordine $\frac{1}{2}$ possono valutarsi per mezzo della quantità trascendente $\sqrt{\pi}$, non solamente quando le loro basi sono numeri pari, il che rientra nelle formule precedenti, ma ancora quando questi esponenti sono numeri impari. Se si fa nell'espressione (18) $a=1$, $r=2$, $n=\frac{1}{2}$, essa diventerà

$$(1+2m)^{\frac{1}{2}|2} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}2\right)^{m|2}}{1^{m|2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}|2}$$

$$= \frac{2^{m|2}}{1^{m|2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}|2}.$$

Ora $1+2m$ rappresenta tutti i numeri impari; così rimane solamente da trovare il valore di $1^{\frac{1}{2}|2}$. Osserviamo, perciò, che dalla formula (13) abbiamo:

$$1^{2m|1} = 1^{m|2} \cdot 2^{m|2},$$

ovvero

$$1^{2m|1} = 2^m \cdot 1^{m|1} \cdot 1^{m|2},$$

a motivo di $2^{m|2} = 2^m \cdot 1^{m|1}$. Quest' ultima eguaglianza dà

$$1^{m|2} = \frac{1^{2m|1}}{2^m \cdot 1^{m|1}},$$

e, facendo $m=\frac{1}{2}$,

$$1^{\frac{1}{2}|2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1^{\frac{1}{2}|1}},$$

sostituendo invece di $1^{\frac{1}{2}|1}$ il suo valore $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, viene

$$1^{\frac{1}{2}|2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},$$

e per conseguenza

$$\left(1+2m\right)^{\frac{1}{2}|2} = \frac{2^{m|2}}{1^{m|2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \ldots\ldots (i).$$

Per passare da queste fattorielle a quelle il cui accrescimento è negativo, si ha per la legge (10)

$$\left(1+2m\right)^{\frac{1}{2}|2} \cdot \left(1+2m\right)^{\frac{1}{2}|-2} = \left(1+2m\right);$$

donde

$$\left(1+2m\right)^{\frac{1}{2}|-2} = \frac{(1+2m) \cdot 1^{m|2}}{2^{m|2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \ldots\ldots (k).$$

Queste formule (i) ed (k) si applicano facilmente alle fattorielle della forma

$$\left(ar\right)^{\frac{1}{2}|2r}, \left(ar\right)^{\frac{1}{2}|-2r},$$

nelle quali il fattore a è un numero impari. Se si avesse, per esempio, la fattoriella

$$6^{\frac{1}{2}|4},$$

si comincerebbe da riportarla alla forma

$$\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}|2},$$

quindi paragonando con (i) e facendo $m=1$, si otterrebbe

$$6^{\frac{1}{2}|4} = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

28. Tutte le fattorielle dell'ordine $\frac{1}{2}$ alle quali possiamo dare, con trasformazioni convenienti, gli accrescimenti 1 ovvero 2, positivi o negativi, possono valutarsi con i precedenti mezzi, purchè però le loro basi rimangano numeri interi positivi; in tutti gli altri casi bisogna ricorrere allo sviluppo generale del quale abbiamo data la deduzione (n.° 14). Questo sviluppo è

$$a^{m|r} = a^m + A_1 a^{m-1} r + A_2 a^{m-2} r^2 + A_3 a^{m-3} r^3 + \text{ec.} \ldots\ldots (l),$$

i cui coefficienti A_1, A_2, A_3, ec., hanno per espressioni generali

$$A_1 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2},$$

$$2A_2 = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A_1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

$$3A_3 = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}A_2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}A_1 + $$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},$$

$$4A_4 = \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}A_3 + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}A_2 +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}A_1 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5},$$

ec. = ec.

In generale

$$\mu A_\mu = \frac{(m-\mu)^{2|-1}}{1^{2|1}}A_{\mu-1} + \frac{(m-\mu)^{3|-1}}{1^{3|1}}A_{\mu-2} +$$

$$+ \frac{(m-\mu)^{4|-1}}{1^{4|1}}A_{\mu-3} + \text{ec.} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{(m-\mu)^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}A_1 + \frac{(m-\mu)^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}.$$

Nel caso di $m = \frac{1}{2}$, si ha, per esempio

$$A_1 = -\frac{1}{2^3} \qquad = -\frac{1}{8}$$

$$A_2 = +\frac{1}{2^7} \qquad = +\frac{1}{128}$$

$$A_3 = +\frac{5}{2^{10}} \qquad = +\frac{5}{1024}$$

$$A_4 = -\frac{21}{2^{15}} \qquad = -\frac{21}{32768}$$

$$A_5 = -\frac{399}{2^{18}} \qquad = -\frac{399}{262144}$$

$$A_6 = +\frac{869}{2^{22}} \qquad = +\frac{869}{4194304}$$

$$A_7 = +\frac{39325}{2^{25}} \qquad = +\frac{39325}{33554432}$$

$$A_8 = -\frac{334477}{2^{31}} \qquad = -\frac{334477}{2147483648}$$

$$A_9 = -\frac{28717403}{2^{34}} \qquad = -\frac{28717403}{17179869184}$$

ec. = ec.

Così, i valori di tutte le fattorielle dell' ordine $\frac{1}{2}$ sono dati dalla serie

$$a^{\frac{1}{2}|r} = a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} a^{\frac{1}{2}-1} r + \frac{1}{128} a^{\frac{1}{2}-2} r^2 + \frac{5}{1024} a^{\frac{1}{2}-3} r^3 - \text{ec.}$$

la quale diviene, dividendo tutti i termini per $a^{\frac{1}{2}}$,

$$a^{\frac{1}{2}|r} = a^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{8}\frac{r}{a} + \frac{1}{128}\frac{r^2}{a^2} + \frac{5}{1024}\frac{r^3}{a^3} - \text{ec.} \ldots\ldots \right\}.$$

Questa serie non è rapidamente convergente che allorquando la grandezza di a supera molto quella di r; ma vedremo che si può ottenere in tutti casi delle serie convergenti a piacere. La legge fondamentale (2) dà la relazione generale

$$a^{m|r} = \frac{a^{n|r}}{(a+mr)^{n|r}} (a+nr)^{m|r} \ldots\ldots (m),$$

che possiamo impiegare per far dipendere la valutazione di $a^{m|r}$ da quella di $(a+nr)^{m|r}$, per mezzo di un numero arbitrario n. Infatti, sviluppando la fattoriella $(a+nr)^{m|r}$ per mezzo della legge (k), viene

$$(a+nr)^{m|r} = (a+nr)^m \left\{ 1 + A_1 \frac{r}{a+nr} + A_2 \frac{r^2}{(a+nr)^2} + \text{ec.} \ldots\ldots \right\},$$

facendo, per abbreviare,

$$\frac{r}{a+nr} = q,$$

e, sostituendo questo sviluppo invece della fattoriella nella relazione (m), si avrà

$$a^{m|r} = \frac{a^{n|r}(a+nr)^m}{(a+mr)^{n|r}} \left\{ 1 + A_1 q + A_2 q^2 + A_3 q^3 + \text{ec.} \right\} \ldots\ldots (n),$$

nuovo sviluppo il cui fattor generale è facile a calcolare, e che si può sempre rendere convergentissimo, dando al numero arbitrario n valori adattati.

In tutti i casi in cui sarà possibile di scegliere il numero n in modo che la potenza $(a+nr)^m$ sia un numero intero, la valutazione del fattor generale non esigerà che alcune moltiplicazioni e una divisione. Per ben comprendere quest' artifizio, supponiamo che il valore della fattoriella $1^{\frac{1}{2}|r}$ non sia conosciuto, e che si tratti di determinarlo; si avrebbe allora $a = 1$, $r = 1$, $m = \frac{1}{2}$ e si trat-

terebbe di dare ad n un valore tale che $(1+n)^{\frac{1}{2}}$ fosse un numero intero; ora, la serie dei quadrati dei numeri naturali essendo 1, 4, 9, 16, 25, ec., si vede che possiamo fare $n=3$, o $n=8$, o $n=15$, o ec., il secondo valore dando per q

$$q=\frac{1}{1+8}=\frac{1}{9},$$

frazione assai piccola per rendare la serie convergentissima, possismo adottare questo valore, il quale dà

$$1^{\frac{1}{2}|1}=\frac{1^{8|1}.3}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{8|1}}\left\{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{128}\cdot\frac{1}{81}+\frac{5}{1024}\cdot\frac{1}{729}\right.$$

$$\left.-\frac{21}{32768}\cdot\frac{1}{6561}-\frac{399}{262144}\cdot\frac{1}{59049}+\text{ec.}\ldots\ldots\right\}.$$

Per evitare le frazioni nel calcolo del fattor generale, osserveremo cha

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{8|1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{8|1}=\frac{3^{8|2}}{2^{8}},$$

il che permetterà di dargli la forma

$$\frac{2^{8}.3.1^{8|1}}{3^{8|2}},$$

il cui sviloppo in fattori semplici è

$$\frac{2^{8}.3.1.2.3.4.5.6.7.8}{3.5.7.9.11.13.15.17}.$$

Sottraendo i fattori comuni ed eseguendo i calcoli, questo fattore generale diventerà definitamente

$$\frac{2^{15}}{11.13.15\,17}=\frac{32768}{36465}.$$

Se vogliamo contentarci di otto decimali esatti pel valore di $1^{\frac{1}{2}|1}$, basterà prendere con nove decimali la somma dei sei primi termini della serie, e, siccome questi termini ridotti in decimali sono

+1,000 000 000
—0,013 888 888
+0,000 096 450
+0,000 006 698
—0,000 000 098
—0,000 000 025

si troverà, per questa somma,

$$+0,986\,214\,137,$$

quantità il cui prodotto pel fattor generale è il valore della fattoriella proposta. Effettuando i calcoli, si ottiene

$$1^{\frac{1}{2}|1} = 0,88622692.$$

29. Per rendere lo sviluppo (n) applicabile ai casi degli accrescimenti negativi, bisogna prendere n negativo, affinchè la quantità $(a+nr)$ sia sempre positiva, e che la potenza $(a+nr)^m$ non possa mai diventare immaginaria, questo sviluppo diviene ancora

$$a^{m|-r} = \frac{a^{-n|-r}(a+nr)^m}{(a-mr)^{-n|-r}} \left\{ 1 + A_1 q + A_2 q^2 + \text{ec.} \right\},$$

la quantità q essendo

$$q = -\frac{r}{a+nr}.$$

Si evita la considerazione degli esponenti negativi nel fattor generale per mezzo delle seguenti trasformazioni fondate sulla legge (6)

$$a^{-n|-r} = \frac{1}{(a+r)^{n|r}},$$

$$(a-mr)^{-n|-r} = \frac{1}{(a-mr+r)^{n|r}},$$

e, facendo q negativo nella serie, si ottiene l'espressione generale

$$a^{m|-r} = \frac{(a-mr+r)^{n|r}.(a+nr)^m}{(a+r)^{n|r}} \left\{ 1 - A_1 q + A_2 q^2 - A_3 q^3 + \text{ec.} \right\} \dots (o),$$

nella quale

$$q = \frac{r}{a+nr}.$$

Prendiamo per esempio la fattoriella $1^{\frac{1}{2}|-1}$, avremo $a=1$, $r=1$, $m=\frac{1}{2}$,

e facendo come sopra $n=8$, verrà

$$(a-mr+r)^{n|r} = \left(\frac{3}{2}\right)^{8|1} = \frac{3^{8|2}}{2^8}, \quad q = \frac{1}{9};$$

$$(a+r)^{n|r} = 2^{8|1}, \quad (a+nr)^m = \sqrt{9} = 3,$$

donde

$$1^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{3.3^{8|2}}{2^8.2^{8|1}} \left\{ 1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{128}\cdot\frac{1}{81} - \frac{5}{1024}\cdot\frac{1}{729} \right.$$

$$\left. - \frac{21}{32768}\cdot\frac{1}{6561} + \frac{399}{262144}\cdot\frac{1}{59049} + \text{ec.} \right\}.$$

Troveremo, sviluppando il fattor generale,

$$\frac{3\,.\,3^{8|2}}{2^8\,.\,2^{8|1}}=\frac{3.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^8.2.3.4.5.6.7.8.9}=\frac{36465}{32768},$$

e, siccome la somma dei sei primi termini della serie è per conseguenza dei cangiamenti dei segni 1,013978567, avremo definitamente

$$1^{\frac{r}{2}|-1}=\frac{36465}{32768}\,.\,1,013978567=1,12837916.$$

30. Quando la base a è negativa, lo sviluppo teorico (l) si complica di quantità immaginarie, per tutti i valori frazionari a denominatori pari dell'esponente, che la quantità arbitraria n permette di evitare negli sviluppi tecnici (n) ed (o). Possiamo renderci ragione di queste circostanze osservando che lo sviluppo teorico diviene allora

$$(-a)^{m|r}=(-a)^m\left\{1-A_1.\frac{r}{a}+A_2.\frac{r^2}{a^2}-A_3.\frac{r^3}{a^3}+\text{c.}\right\},$$

il che implica la decomposizione

$$(-a)^{m|r}=(-a)^m\,.\,1^{m|-\frac{r}{a}},$$

la quale non è generalmente vera che per i valori interi dell' esponente m nel mentre che la decomposizione

$$(+a)^{m|r}=(+a)^m\,.\,1^{m|\frac{r}{a}}$$

ha luogo per tutti i valori possibili di questo esponente; ora, negli sviluppi tecnici, la fattoriella decomposta è

$$\left(a+nr\right)^{m|r}=\left(a+nr\right)^m\left\{1+A_1q+A_2q^2+\text{ec.}\right\},$$

la cui base, che nel caso di a negativo è $nr-a$, può sempre considerarsi come positiva a motivo del numero n, al quale basta perciò di dare un valore $nr>a$; per mezzo di questa condizione $nr>a$, gli sviluppi tecnici sono sempre reali e fanno conoscere il valore numerico delle fattorielle a basi negative. Facendo dunque a negativo in (n) e in (o), si avranno le due espressioni

$$\left.\begin{aligned}(-a)^{m|r}&=\frac{(-a)^{n|r}(nr-a)^m}{(mr-a)^{n|r}}\left\{1+A_1q+A_2q^2+A_3q^3+\text{ec.}\right\}\ldots\\(-a)^{m|-r}&=\frac{(r-a-mr)^{n|r}.(nr-a)^m}{(r-a)^{n|r}}\left\{1-A_1q+A_2q^2-A_3q^3+\text{ec.}\right\}\ldots\end{aligned}\right\}\ldots(p),$$

per le quali

$$q=\frac{r}{nr-a}.$$

Si abbia da valutare, per esempio $(-3)^{\frac{1}{2}|-4}$. Facciamo arbitrariamente $n=10$,

il che ci darà

$$q = \frac{4}{40-3} = \frac{4}{37}.$$

Avremo ancora

$$(-3)^{\frac{1}{2}|-4} = \frac{(-3)^{10|4}.(37)^{\frac{1}{2}}}{1^{10|4}} \left\{ 1 - \frac{1}{8}.\frac{4}{37} + \text{ec.} \dots \right\}.$$

La somma dei cinque primi termini della serie essendo 1,01359588, e il fattor generale sviloppato diventando

$$\frac{(-1).3.7.11.15.19.23.27.31.35}{1.5.9.13.17.21.25.29.33.37}.\sqrt{37},$$

potremo, per effettuare il calcolo per mezzo dèi logaritmi, formare più prodotti parziali, come segue:

$$(-3)^{\frac{1}{2}|-4} = -\frac{399.713.\sqrt{37}}{1105.1073}.1,01359588,$$

e si otterrà

$$(-3)^{\frac{1}{2}|-4} = -1,479338.$$

31. La sola parte veramente faticosa della valutazione di una fattoriella consiste nella determinazione dei coefficienti A_1, A_2, A_3, ec. della legge (l); poichè l'espressioni che danno questi coefficienti diventano assai difficili a calcolare per gli esponenti frazionari. Il Kramp ha scoperto diversi processi che abbreviano questa determinazione, dei quali ecco il più semplice.

L'esponente della fattoriella essendo rappresentato da $\frac{m}{n}$, cominciamo da calcolare la serie dei numeri interi

$$M = m(n-m)$$

$$A = n(n+m) - 3(n-m)^2$$

$$B = A + 2n(n+m)$$

$$C = 5(n-m)^2 B - n(n+m)(5A + 2n^2)$$

$$D = 3C - n(n+m)(20B + 24n^2)$$

$$E = 7(n-m)^2 D - n(n+m)(35C - 140n^2 A - 80n^4)$$

Ci arrestiamo a questi sei termini, perchè generalmente bastano cinque o sei coefficienti per valutare qualunque fattoriella proposta con otto o dieci decimali esatti. Con l'aiuto di queste quantità, i sei primi coefficienti diventano

$$A_1 = -\frac{M}{2n^2},$$

$$A_2 = \frac{MA}{2^3 . 3 . n^4},$$

$$A_3 = \frac{(n-m)^{2|n} . MB}{2^4 . 3^2 . n^6},$$

$$A_4 = \frac{(n-m)^{3|n} . mC}{2^7 . 3^2 . 5 . n^8},$$

$$A_5 = \frac{(n-m)^{4|n} . MD}{2^8 . 3^3 . 5^2 . n^{10}},$$

$$A_6 = \frac{(n-m)^{5|n} . mE}{2^{10} . 3^4 . 5^2 . 7 . n^{12}};$$

espressioni assai facili a calcolare. Sia $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$; avremo $m = 1$, $n = 3$, e troveremo

$$M = 2,\quad A = 0,\quad B = 24,\quad C = 264,\quad D = -7560,$$

$$E = -244800.$$

Sostituendo questi valori nell'espressioni dei coefficienti, otterremo per i sei primi coefficienti dello sviluppo di qualunque fattoriella a esponente $\frac{1}{3}$.

$$A_1 = -\frac{1}{9},\qquad A_4 = +\frac{11}{3^9},$$

$$A_2 = 0,\qquad A_5 = -\frac{77}{3^{10}},$$

$$A_3 = +\frac{10}{3^7},\qquad A_6 = -\frac{18700}{3^{14}}.$$

Così

$$1^{\frac{1}{3}|q} = 1 - \frac{1}{9} q + \frac{10}{3^7} q^3 + \frac{11}{3^9} q^4 - \frac{77}{3^{10}} q^5 - \text{ec.}$$

Questa serie, sostituita negli sviluppi tecnici, servirà a valutare tutte le fattorielle della forma $a^{\frac{1}{3}|r}$, dando a q i convenienti valori.

È quasi sempre più pronto di calcolare il logaritmo di una fattoriella che il suo valore diretto; ma non entreremo qui in alcuna particolarità sopra questo soggetto che verrà trattato all'articolo SOMMATORIO (*Vedi* QUESTA PAROLA); ciò che precede basta completamente per mettere in istato di trovare il valore numerico di una fattoriella qualunque, e piuttosto dobbiamo indicare almeno le principali applicazioni che fin qui sono state fatte della teoria di queste funzioni.

32. Le fattorielle il cui esponente è infinitamente grande, esprimendo dei pro-

dotti composti di un numero infinito di fattori sempre crescenti in grandezza, hanno necessariamente valori infinitamente grandi, qualunque sieno d'altronde le loro basi e i loro accrescimenti; ma questi valori, per quanto sia impossibile esprimere i loro rapporti con numeri finiti, hanno però tra loro dei rapporti che possiamo sempre determinare, e che, in certi casi sono esprimibili con numeri finiti razionali o irrazionali. Si dimostrerà, (*Vedi* TECNIA) che il rapporto delle quattro fattorielle a esponenti infiniti

$$\frac{a^{\infty|r}\cdot(b+q)^{\infty|s}}{b^{\infty|s}\cdot(a+p)^{\infty|r}},$$

si riduce a quello delle due fattorielle

$$\frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{b^{\frac{q}{s}|s}},$$

moltiplicato pel fattore

$$\frac{(\infty s)^{\frac{q}{s}}}{(\infty r)^{\frac{p}{r}}},$$

il quale può essere infinitamente grande, finito o infinitamente piccolo, secondo che $\frac{q}{s}$ è maggiore, eguale o minore di $\frac{p}{r}$. Nel caso di $\frac{q}{s}=\frac{p}{r}$ si ha ancora la riduzione importantissima

$$\frac{a^{\infty|r}\cdot(b+q)^{\infty|s}}{b^{\infty|s}\cdot(a+p)^{\infty|r}}=\left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{p}{r}}\cdot\frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{b^{\frac{p}{r}|s}}\;\ldots\ldots(q),$$

la quale diviene semplicemente, nel caso di $p=q$, $r=s$

$$\frac{a^{\infty|r}\cdot(b+p)^{\infty|r}}{b^{\infty|r}\cdot(a+p)^{\infty|r}}=\frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{b^{\frac{p}{r}|r}}\;\ldots\ldots(r),$$

espressione che equivale ancora a

$$\frac{a(b+p)(a+r)(b+p+r)(a+2r)(b+p+2r)\ldots\text{ec.}}{b(a+p)(b+r)(a+p+r)(b+2r)(a+p+2r)\ldots\text{ec.}}=\frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{b^{\frac{p}{r}|r}}\;\ldots\ldots(s).$$

Sotto questa forma, il primo membro dell' egnaglianza è conosciuto sotto il nome di *prodotto continuo*, e costituisce un modo particolare di generazione delle quantità introdotto nella scienza dall' Wallis. Avanti d' indicare le conseguenze importantissime della riduzione (r), non sarà forse inutile di far conoscere come possiamo ottenere l' espressione la più semplice del rapporto delle due fattorielle, equivalente a un prodotto continuo; si abbia prima di tutto il prodotto

$$\frac{2.2.6.6.10.10.14.14 \ldots\ldots \text{all' infinito}}{1.3.5.7.\ 9.11.13.15 \ldots\ldots \text{all' infinito.}}.$$

Paragonando con (s) e ponendo $a = 2$, $b = 1$, avremo $p = 1$, $r = 4$; così questo prodotto è equivalente al rapporto

$$\frac{2^{\frac{1}{4}|4}}{1^{\frac{1}{4}|4}},$$

che si tratta di ridurre alla sua più semplice espressione. Ora, per le leggi (2) e (5),

$$2^{\frac{1}{4}|4} = 2.(2+4)^{\frac{1}{4}-1|4} = 2.6^{-\frac{3}{4}|4} = \frac{2}{2^{\frac{3}{4}|-4}},$$

$$1^{\frac{1}{4}|4} = 1.(1+4)^{\frac{1}{4}-1|4} = 1.5^{-\frac{3}{4}|4} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}|4}}.$$

Dunque

$$\frac{2^{\frac{1}{4}|4}}{1^{\frac{1}{4}|4}} = \frac{2.2^{\frac{3}{4}|4}}{2^{\frac{3}{4}|-4}}.$$

Ma (17)

$$2^{\frac{3}{4}|4} = 2^{\frac{3}{4}}.1^{\frac{3}{4}|2}, \quad 2^{\frac{3}{4}|-4} = 2^{\frac{3}{4}}.1^{\frac{3}{4}|-2};$$

e di più, (n.° 11),

$$1^{\frac{3}{4}|2} = \frac{1}{1^{\frac{1}{4}|-2}}, \quad 1^{\frac{3}{4}|-2} = \frac{1}{1^{\frac{1}{4}|2}},$$

il che ci dà definitivamente

$$\frac{2^{\frac{1}{4}|4}}{1^{\frac{1}{4}|4}} = \frac{2 \cdot 1^{\frac{1}{4}|2}}{1^{\frac{1}{4}|-2}} \dots\dots (t).$$

Questo rapporto non è più capace di alcuna ulteriore riduzione nella sua forma di fattoriella, ma la legge (13) ci dà il mezzo di ottenere il suo valore espresso in irrazionali ordinari. Infatti, mediante questa legge

$$1^{2m|1} = 1^{m|2} \cdot 2^{m|2} = 2^m \cdot 1^{m|2} \cdot 1^{m|1},$$

e per conseguenza

$$\frac{1^{2m|1}}{1^{m|1}} = 2^m \cdot 1^{m|2}.$$

Ma (n.° 18).

$$\frac{1^{2m|1}}{1^{m|1}} = (1+m)^{m|1} = (2m)^{m|-1}$$

Così

$$1^{m|2} = \frac{(2m)^{m|-1}}{2^m} = \frac{(4m)^{m|-2}}{2^{2m}}.$$

Donde abbiamo la relazione generale

$$\frac{(4m)^{m|-2}}{1^{m|4}} = 2^{2m}.$$

Facendo in quest' espressione $m = \frac{1}{4}$, essa diviene

$$\frac{1^{\frac{1}{4}|-2}}{1^{\frac{1}{4}|2}} = \sqrt{2}.$$

Sostituendo in (t), viene

$$\frac{2^{\frac{1}{4}|4}}{1^{\frac{1}{4}|4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

e, per conseguenza,

$$\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \; 14 \cdot 14 \dots \text{ec.}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \dots \text{ec.}}$$

33. Prendiamo per secondo esempio il prodotto continuo

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \dots\dots \text{ec.}}{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 22 \dots\dots \text{ec.}},$$

abbiamo in questo caso $a=5$, $b=4$, $p=3$, $r=6$, il che ci dà, pel valore del prodotto, il rapporto

$$\frac{5^{\frac{3}{6}|6}}{4^{\frac{3}{6}|6}}=\frac{5^{\frac{1}{2}|6}}{4^{\frac{1}{2}|6}}=\frac{2^{\frac{1}{2}|-6}}{4^{\frac{1}{2}|6}};$$

dividendo i due termini di questo rapporto per $\sqrt{2}$, esso diviene, indicandolo con M,

$$M=\frac{1^{\frac{1}{2}|-3}}{2^{\frac{1}{2}|3}},$$

L' accrescimento 3 delle fattorielle ci prova che è possibile di renderlo più semplice ancora per mezzo della decomposizione (14), in virtù della quale si ha generalmente

$$1^{3m|1}=1^{m|3}\,.\,2^{m|3}\,.\,3^{m|3},$$

e per conseguenza,

$$2^{m|3}=\frac{1^{3m|1}}{1^{m|3}\,.\,3^{m|3}}=\frac{1}{3^m}\cdot\frac{1^{3m|1}}{1^{m|3}\,.\,1^{m|1}},$$

ovvero semplicemente

$$2^{m|3}=\frac{(3m)^{2m|-1}}{3^m\,.\,1^{m|3}}\;\ldots\ldots\;(t),$$

a motivo di

$$\frac{1^{3m|1}}{1^{m|1}}=(1+m)^{2m|1}=(3m)^{2m|-1};$$

facendo $m=\frac{1}{2}$ nella relazione (t), verrà

$$2^{\frac{1}{2}|3}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\,.\,1^{\frac{1}{2}|3}},$$

e, sostituendo questo valore in quello di M, avremo, osservando che (n.° 19) $1^{\frac{1}{2}|3}\,.\,1^{\frac{1}{2}|-3}=1$,

$$M=\frac{2}{3}\sqrt{3};$$

donde, finalmente,

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{5\,.\,7\,.\,11\,.\,13\,.\,17\,.\,19\,.\,23\,\ldots\ldots}{4\,.\,8\,.\,10\,.\,14\,.\,16\,.\,20\,.\,22\,\ldots\ldots}$$

34. Si potrebbe ottenere mediante trasformazioni simili, e solamente con l'aiuto delle proprietà fondamentali delle fattorielle, l'espressione teorica primitiva di una moltitudine di prodotti continui, ma queste ricerche non hanno altra utilità che far verificare a *posteriori*, per gli esponenti frazionari di queste fattorielle, le costruzioni che realmente non sono dimostrate che per i loro esponenti interi; poichè esistono, come immantinente vedremo, tra le fattorielle e le funzioni circolari, dei legami che permettono di valutare le prime per mezzo delle seconde, e *vice versa*.

Giovanni Bernoulli è stato il primo a scoprire la generazione delle funzioni circolari in prodotti continui dati dall'eleganti espressioni

$$\text{sen}\, x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\ldots\text{ec.},$$

$$\cos x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\ldots\text{ec.},$$

nelle quali x è un numero qualunque, e π il rapporto della circonferenza al diametro o il numero $3,1415926\ldots$ Ne daremo una deduzione alla parola Tecnia.

Per poter ridurle a rapporti di fattorielle, supponiamo il numero $x = \frac{m\pi}{2n}$, il che darà loro la forma ordinaria dei prodotti continui numerici, cioè:

$$\text{sen}\, \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\text{ec.}$$

$$\cos \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\text{ec.}\ldots$$

Paragonando con la formula generale (s), avremo, per i seni, non tenendo conto del primo fattore $\frac{m\pi}{2n}$,

$$a = 2n-m,\quad b = 2n,\quad p = m,\quad r = 2n;$$

donde

$$\text{sen}\, \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{(2n-m)^{\frac{m}{2n}|2n}}{(2n)^{\frac{m}{2n}|2n}}\ldots\ldots(21).$$

I numeri m ed n essendo arbitrari, possiamo, facendo $n = \frac{1}{2}$, dare a questa espressione la forma più semplice,

$$\text{sen}\, m\pi = m\pi\cdot\frac{(1-m)^{m|1}}{1^{m|1}}\ldots\ldots(22),$$

e siccome per qualunque altro seno, sen $n\pi$, abbiamo egualmente

$$\text{sen}\, n\pi = n\pi\cdot\frac{(1-n)^{n|1}}{1^{n|1}},$$

possiamo conchiuderne

$$\frac{\operatorname{sen} m\pi}{\operatorname{sen} n\pi} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1^{n|1}}{1^{m|1}} \cdot \frac{(1-m)^{m|1}}{(1-n)^{n|1}}.$$

Facendo sul secondo membro di quest'eguaglianza le seguenti riduzioni

$$\frac{m \cdot 1^{n|1} \cdot (1-m)^{m|1}}{n \cdot 1^{m|1} \cdot (1-n)^{n|1}} = \frac{1^{n-1|1}(1-m)^{m|1}}{1^{m-1|1}(1-n)^{n|1}},$$

$$= \frac{0^{1-m|-1} \cdot 0^{m|-1}}{0^{1-n|-1} \cdot 0^{n|-1}},$$

$$= \frac{m^{1-m|1} \cdot 1^{-n|1}}{n^{1-n|1} \cdot 1^{-m|1}},$$

$$= \frac{m^{1-m-n|1}}{n^{1-m-n|1}},$$

avremo definitivamente quest' eguaglianza di rapporti semplici

$$\frac{\operatorname{sen} m\pi}{\operatorname{sen} n\pi} = \frac{m^{1-m-n|1}}{n^{1-m-n|1}} \; \ldots\ldots \; (23).$$

35. Indichiamo avanti di proseguire una conseguenza degna di osservazione dell'espressione (22). Se ne deduciamo il valore di $m\pi$ e che vi si faccia $m = \frac{1}{2}$, si ha, a motivo $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$,

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{1^{\frac{1}{2}|1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|1}}.$$

Moltiplicando i due termini del rapporto per $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}$, e osservando, da una parte, che

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1}{2},$$

e dall' altra che

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1} = 1^{\frac{1}{2}|1},$$

si ottiene

$$\frac{1}{4}\pi = 1^{\frac{1}{2}|1} \cdot 1^{\frac{1}{2}|1};$$

donde

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 1^{\frac{1}{2}|1},$$

valore che abbiamo supposto conosciuto in ciò che precede, e che determineremo (*Vedi* MATEMATICHE), con considerazioni differentissime, ma del quale otteniamo così una deduzione diretta.

36. Il prodotto continuo del coseno, paragonato coll' espressione generale (s), somministra i valori

$$a = n - m, \quad b = n, \quad p = m, \quad r = 2n;$$

il che dà

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{(n-m)^{\frac{m}{2n}|2n}}{n^{\frac{m}{2n}|2n}},$$

ovvero, più semplicemente, facendo $n = \frac{1}{2}$

$$\cos m\pi = \frac{\left(\frac{1}{2} - m\right)^{m|1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{m|1}} \quad \ldots\ldots (24).$$

Si ricava evidentemente da questo valore pel rapporto di due coseni qualunque $\cos m\pi$, $\cos n\pi$,

$$\frac{\cos m\pi}{\cos n\pi} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n|1} \cdot \left(\frac{1}{2} - m\right)^{m|1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{m|1} \cdot \left(\frac{1}{2} - n\right)^{n|1}},$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - m\right)^{m+n|1}}{\left(\frac{1}{2} - n\right)^{m+n|1}}.$$

37. L' espressioni (22) e (24) del seno e del coseno conducono a quelle delle tangenti, cotangenti, secanti e cosecanti, donde resultano diversi rapporti assai utili, dei quali possiamo ancora aumentare il numero ricavando dai due prodotti continui, dai quali siamo partiti, due altre espressioni del seno e del coseno.

Se si mette in questi prodotti $n-m$ invece di m, siccome generalmente si ha

$$\operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi}{2n}=\cos\frac{m\pi}{2n},\qquad \cos\frac{(n-m)\pi}{2n}=\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2n},$$

essi somministrano i due nuovi prodotti continui

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{(n-m)\pi}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\ldots\text{ec.}$$

$$\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\ldots\text{ec.}$$

La prima, facendo $a=n+m$, $b=2n$, $p=n-m$, $r=2n$, si riduce a

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\frac{(n-m)\pi}{2n}\cdot\frac{(n+m)^{\frac{n-m}{2n}|2n}}{(2n)^{\frac{n-m}{2n}|2n}},$$

e la seconda dà, facendo $a=m$, $b=n$, $p=n-m$, $r=2n$,

$$\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m^{\frac{n-m}{2n}|2n}}{n^{\frac{n-m}{2n}|2n}},$$

ovvero più semplicemente, prendendo $n=\frac{1}{2}$,

$$\cos m\pi-\left(\frac{1}{2}-m\right)\pi\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)^{\frac{1}{2}-m|1}}{1^{\frac{1}{2}-m|1}}\ldots(25),$$

$$\operatorname{sen} m\pi=\frac{m^{\frac{1}{2}-m|1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-m|1}}\ldots\ldots\ldots\ldots(26).$$

Possiamo ancora dedurre direttamente queste espressioni dalla (22) e dalla (24) sostituendoci $\frac{1}{2}-m$ invece di m per cangiare i seni in coseni, e reciprocamente.

38. La combinazione dell' espressioni (24) e (26) somministra

$$\frac{\operatorname{sen} m\pi}{\cos m\pi} = \operatorname{tang} m\pi = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m|1} \cdot m^{\frac{1}{2}-m|1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-m|1} \cdot \left(\frac{1}{2}-m\right)^{m|1}}$$

il che conduce all' espressione assai osservabile

$$\operatorname{tang} m\pi = \frac{(+m)^{\frac{1}{2}|+1}}{(-m)^{\frac{1}{2}|-1}} \; \ldots\ldots (27),$$

osservando che

$$m^{\frac{1}{2}|1} = m^{\frac{1}{2}-m|1} \cdot \left(m+\frac{1}{2}-m\right)^{m|1},$$

$$(-m)^{\frac{1}{2}|-1} = \left(\frac{1}{2}-m\right)^{\frac{1}{2}|1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}-m\right)^{m|1} \cdot \left(\frac{1}{2}-m+m\right)^{\frac{1}{2}-m|1}.$$

39. Ed è principalmente dall' espressione (27) che il Kramp ha dedotto i risultamenti assurdi, dei quali abbiamo parlato sopra (n.° 23); supponendo a torto che la decomposizione

$$a^{m|r} = a^m \cdot 1^{m|\frac{r}{a}}$$

dovesse aver luogo per tutti i valori positi e negativi della base a, e, per conseguenza, che il rapporto delle fattorielle $(+a)^{m|+r}$, $(-a)^{m|-r}$ fosse sempre eguale a quello delle potenze $(+a)^m$, $(-a)^m$; poichè ammettendo questa decomposizione si ha

$$\frac{(+a)^{m|+r}}{(-a)^{m|-r}} = \frac{(+a)^m \cdot 1^{m|\frac{r}{a}}}{(-a)^m \cdot 1^{m|\frac{r}{a}}} = \frac{(+a)^m}{(-a)^m};$$

ed esso era stato condotto, con sua grande sorpresa, a questa evidente falsità:

$$\operatorname{tang} m\pi = \frac{(+m)^{\frac{1}{2}|+1}}{(-m)^{\frac{1}{2}|-1}} = \frac{(+m)^{\frac{1}{2}}}{(-m)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{+m}{-m}\right)}=\sqrt{-1}\;.$$

Per quello che abbiamo veduto la sola decomposizione generale possibile per le basi negative è

$$(-a)^{m|r}=a^m.(-1)^{m|\frac{r}{a}};$$

dimodochè il rapporto delle fattorielle $(+a)^{m|+r}$, $(-a)^{m|-r}$ è realmente, per tutti i valori dell'esponente m

$$\frac{(+a)^{m|+r}}{(-a)^{m|-r}}=\frac{a^m.1^{m|\frac{r}{a}}}{a^m.(-1)^{m|-\frac{r}{a}}}=\frac{1^{m|\frac{r}{a}}}{(-1)^{m|-\frac{r}{a}}}.$$

Applicando questo teorema all'espressione (27), viene

$$\operatorname{tang} m\pi=\frac{(+m)^{\frac{1}{2}|+1}}{(-m)^{\frac{1}{2}|-1}}=\frac{m^{\frac{1}{2}}.(+1)^{\frac{1}{2}|+\frac{1}{m}}}{m^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{2}|-\frac{1}{m}}}=\frac{(+1)^{\frac{1}{2}|+\frac{1}{m}}}{(-1)^{\frac{1}{2}|-\frac{1}{m}}},$$

il che è perfettamente esatto per tutti i valori di m, e si riduce a

$$\operatorname{tang} m\pi=\frac{(2m-1)^{\frac{1}{2}|-2}}{(1-2m)^{\frac{1}{2}|+2}}.$$

Facendo $2m-1=n$, si ottiene la nuova elegantissima espressione

$$\operatorname{tang}\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi=\frac{(+n)^{\frac{1}{2}|-2}}{(-n)^{\frac{1}{2}|+2}}\;\ldots\ldots(28).$$

Si abbia, per esempio, $n=-\frac{1}{3}$, e, per conseguenza, $\frac{n+1}{2}=\frac{1}{3}$, caso nel quale si ha il valore conosciuto, $\operatorname{tang}\frac{1}{3}\pi=\operatorname{tang}60°=\sqrt{3}$; il rapporto delle fattorielle diviene

$$\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}|-2}}{\left(+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}|+2}}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}|2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}|2}}=\frac{2^{\frac{1}{2}|6}}{1^{\frac{1}{2}|6}}:$$

ora

$$1^{\frac{1}{2}|6} = 1^{1|6}(1+6)^{-\frac{1}{2}|6} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}|6}};$$

così

$$\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}|-2}}{\left(+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}|+2}} = 2^{\frac{1}{2}|6} \cdot 4^{\frac{1}{2}|6}$$

$$= \sqrt{2} \cdot 1^{\frac{1}{2}|3} \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}|3}$$

$$= 2 \cdot 1^{\frac{1}{2}|3} \cdot 2^{\frac{1}{2}|3};$$

ma abbiamo veduto sopra (n.° 33), che

$$1^{\frac{1}{2}|3} \cdot 2^{\frac{1}{2}|3} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

dunque

$$\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}|-2}}{\left(+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}|+2}} = \sqrt{3}.$$

Questa deduzione può servire in caso di bisogno per verificazione a tutte le trasformazioni che abbiamo adoprate.

40. Abbiamo veduto che i rapporti dei seni e dei coseni sono sempre riducibili a rapporti di fattorielle. Cerchiamo ora in quali casi il rapporto di due fattorielle può ridursi a quello di due seni. Riprendiamo l'espressione (23) dandole la forma

$$\frac{\text{sen}\, m\pi}{\text{sen}\, n\pi} = \frac{m^{q-q+1-m-n|1}}{n^{q-q+1-m-n|1}},$$

nella quale q è un numero intero qualunque. Decomponendo il secondo membro in fattori, diventerà

$$\frac{m^{q|1} \cdot (m+q)^{-q+1-m-n|1}}{n^{q|1} \cdot (n+q)^{-q+1-m-n|1}},$$

donde, passando dagli esponenti negativi agli esponenti positivi,

$$\frac{\text{sen}\, m\pi}{\text{sen}\, n\pi} = \frac{m^{q|1} \cdot (n+q-1)^{q-1+m+n|-1}}{n^{q|1} \cdot (m+q-1)^{q-1+m+n|-1}},$$

ovvero ancora, ritornando agli accrescimenti positivi

$$\frac{\operatorname{sen} m\pi}{\operatorname{sen} n\pi} = \frac{m^{q|1} \cdot (1-m)^{q-1+m+n|1}}{n^{q|1} \cdot (1-n)^{q-1+m+n|1}}.$$

La decomposizione delle due fattorielle non sviluppate può effettuarsi in due differenti maniere; seguendo la prima, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} m\pi}{\operatorname{sen} n\pi} = \frac{m^{q|1} \cdot (1-m)^{q-1|1} \cdot (q-m)^{m+n|1}}{n^{q|1} \cdot (1-n)^{q-1|1} \cdot (q-n)^{m+n|1}};$$

e, seguendo la seconda,

$$\frac{\operatorname{sen} m\pi}{\operatorname{sen} n\pi} = \frac{m^{q|1} \cdot (1-m)^{q|1} \cdot (q+m)^{1-m-n|1}}{n^{q|1} \cdot (1-n)^{q|1} \cdot (q+n)^{1-m-n|1}}.$$

Se paragoniamo queste due espressioni col rapporto generale

$$\frac{a^{p|1}}{b^{p|1}},$$

vedremo che tutte le volte che $a+b+p$ sarà un numero intero e *pari*, la prima potrà ridursi a un rapporto di seni, e che la medesima cosa potrà farsi per la seconda, quando $a+b+p$ sarà un numero intero e *impari*.

Ponendo perciò

$$a+b+p = 2q, \quad \text{numero pari intero},$$

la prima espressione ci darà

$$\frac{a^{p|1}}{b^{p|1}} = \frac{(q-b)^{q|1} \cdot (1-q+b)^{q-1|1}}{(q-a)^{q|1} \cdot (1-q+a)^{q-1|1}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(q-a)\pi}{\operatorname{sen}(q-b)\pi} \ldots\ldots (u),$$

e facendo

$$a+b+p = 2q+1, \quad \text{numero impari},$$

dedurremo dalla seconda

$$\frac{a^{p|1}}{b^{p|1}} = \frac{(b-q)^{q|1} \cdot (1-b+q)^{q|1}}{(a-q)^{q|1} \cdot (1-a+q)^{q|1}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(a-q)\pi}{\operatorname{sen}(b-q)\pi} \ldots\ldots (v).$$

41. Tutti i prodotti continui potendo ridursi al rapporto $\frac{a^{p|1}}{b^{p|1}}$, le espressioni (u) e (v) danno il mezzo di esprimere immediatamente questi prodotti con un rapporto di seni, in tutti i casi in cui le tre quantità a, b, e p soddisfanno a una delle condizioni prescritte. Alcuni esempi proveranno l'utilità di queste formule. Si abbia il prodotto continuo

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \ldots\ldots \text{ec.}}{3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 21 \ldots\ldots \text{ec.}}.$$

dalla formula (r) questo prodotto è equivalente al rapporto

$$\frac{5^{\frac{4}{6}|6}}{3^{\frac{4}{6}|6}},$$

che è identico con

$$\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{6}|1}}{\left(\frac{3}{6}\right)^{\frac{4}{6}|1}}.$$

Facendo $a=\frac{5}{6}$, $b=\frac{3}{6}$, $p=\frac{4}{6}$, si riconosce che la somma di questi numeri è un numero pari

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=2.$$

Prendendo dunque $2q=2$, donde $q=1$, l'espressione (u) dà pel valore del prodotto

$$\frac{\left(1-\frac{3}{6}\right)}{\left(1-\frac{5}{6}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2},$$

a motivo di $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$ e di $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}$ (*Vedi* SENO). Dunque

$$\frac{3}{2}=\frac{5.7.11.13.17.19.23\ldots\ldots ec.}{3.9.\ 9.15.15.21.21\ldots\ldots ec.}.$$

Il primo prodotto continuo che abbiamo trattato sopra (n.° 32) ci ha dato pel suo valore

$$\frac{2^{\frac{1}{4}|4}}{1^{\frac{1}{4}|4}}.$$

Riportando le fattorielle all' accrescimento 1, questo rapporto diviene

$$\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{\frac{1}{4}|1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}|1}},$$

e siccome si ha $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, numero impari, l' espressione (v) ci darà, facendoci $q=0$, a motivo della condizione $a+b+p=2q+1$,

$$\frac{2^{\frac{1}{4}|4}}{1^{\frac{1}{4}|4}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\operatorname{sen}45^{\circ}}=\sqrt{2}.$$

Questo è ciò che abbiamo trovato dalle proprietà delle fattorielle.
Il prodotto

$$\frac{6.6.12.12.18.18.24.24\ldots\text{ec.}}{5.7.11.13.17.19.23.29\ldots\text{ec.}},$$

presenta una particolarità osservabile. Il suo valore è, per l' espressione (r),

$$\frac{6^{\frac{1}{6}|1}}{5^{\frac{1}{6}|1}}=\frac{1^{\frac{1}{6}|1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{6}|1}}.$$

Ponendo $a=1$, $b=\frac{5}{6}$, $p=\frac{1}{6}$, si ha $1+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=2$; donde $q=1$. Sostituendo questi valori nella formula (u), viene

$$\frac{1^{\frac{1}{6}|1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{6}|1}}=\frac{1-\frac{5}{6}}{1-1}\cdot\frac{\operatorname{sen}(1-1)\pi}{\operatorname{sen}\left(1-\frac{5}{6}\right)\pi}=\frac{\frac{1}{6}\operatorname{sen}0\pi}{0\operatorname{sen}30^{\circ}}.$$

Quest' ultima quantità è del numero di quelle che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma quì il fattore nullo è in evidenza, poichè $\operatorname{sen}0\pi=0\pi$, e si ha, per conseguenza

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot 0\pi}{0\cdot\operatorname{sen}30^{\circ}}=\frac{\frac{1}{6}\pi}{\operatorname{sen}30^{\circ}}=\frac{1}{3}\pi,$$

a motivo di $\operatorname{sen}30^{\circ}=\frac{1}{2}$. Tale è infatti, il valore di questo prodotto trovato dall' Eulero. (*Introd. in Analis. infinit.*)

42. Passiamo ad altre applicazioni. La fattoriella a base binomia

$$(a+b)^{m|r}$$

si sviluppa in una serie

$$a^{m|r}+ma^{m-1|r}\,.\,b+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}\,.\,b^{2|r}+$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3|r}\,.\,b^{3|r}+\text{ ec.},$$

il cui termine generale è

$$\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}\,.\,a^{m-\mu|r}\,.\,b^{\mu|r},$$

come l'abbiamo dimostrato, (*Vedi* Binomio) per tutti i valori dell'esponente m. Questo sviluppo degno di osservazione, che contiene il binomio del Newton come caso particolare, quello in cui $r=0$, può modificarsi in più maniere.

Poniamo, per maggior semplicità

$$(a+b)^{m|r}=\Sigma\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}\,.\,a^{m-\mu|r}\,.\,b^{\mu|r}\quad\ldots\ldots(x),$$

la caratteristica Σ indicando la somma di tutte le quantità che si possono formare col termine generale, facendoci successivamente $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$, ec. Lo sviluppo si arresta da se medesimo, come quello del binomio del Newton, tutte le volte che l'esponente m è un numero intero positivo; può arrestarsi ancora, quando m è un numero intero negativo, se b ed r sono di segni contrari, e se di più, b è un multiplo di r; in tutti gli altri casi lo sviluppo prende un numero infinito di termini.

Sostituendo invece di a, nell'espressione (x), la quantità $a-mr+r$, avremo

$$(a-mr+r+b)^{m|r}=\Sigma\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}(a-mr+r)^{m-\mu|r}b^{\mu|r},$$

e, per conseguenza

$$(a+b)^{m|-r}=\Sigma\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}(a-\mu r)^{m-\mu|-r}b^{\mu|r}\ldots\ldots(y),$$

a motivo di

$$(a-mr+r+b)^{m|r}=[a-mr+r+b+(m-1)r]^{m|-r},$$

$$(a-mr+r)^{m-\mu|r}=[a-mr+r+(m-\mu-1)r]^{m-\mu|-r}.$$

Dividendo i due membri di (y) per $a^{m|-r}$, verrà

$$\frac{(a+b)^{m|-r}}{a^{m|-r}}=\Sigma\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}\cdot\frac{b^{\mu|r}}{a^{\mu|-r}},$$

vale a dire

$$\frac{(a+b)^{m|-r}}{a^{m|-r}}=1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{b^{2|r}}{a^{2|-r}}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^{3|r}}{a^{3|-r}}+\text{ec.} \ldots\ldots (z),$$

sviluppo nel quale si può a piacere variare i segni di a, di b, di m e di r. Vedremo quanto prima, che sotto questa forma, il binomio delle fattorielle dà immediatamente il valore di più classi d'integrali definiti.

43. Facciamo b ed r negativi, e osserviamo che per un nomero intero qualunque μ abbiamo generalmente la decomposizione (n.° 23)

$$(-b)^{\mu|-r}=(-1)^{\mu}.b^{\mu|r},$$

lo sviluppo diventerà

$$\frac{(a-b)^{m|r}}{a^{m|r}}=1-m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{b^{2|r}}{a^{2|r}}-$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^{3|r}}{a^{3|r}}+\text{ec.}$$

Premesso ciò, dividiamo i due membri di quest'ultima eguaglianza per b, e facciamo $a=b+r$, otterremo lo sviluppo particolare

$$\frac{r^{m|r}}{b(b+r)^{m|r}}=\frac{1}{b}-\frac{m}{b+r}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{b+2r}$$

$$-\frac{m(m-1)m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{b+3r}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{b+4r}$$

$$-\text{ec} \ldots\ldots$$

il numero dei termini del quale sarà infinito per tutti i valori frazionari di m.

Ora quest'ultimo sviluppo è, come si sa, quello dell'integrale

$$\int x^{b-1}\left(1-x^r\right)^m dx,$$

preso tra i limiti $x=0$ e $x=1$, dunque

$$\int_0^1 x^{b-1}\left(1-x^r\right)^m dx=\frac{r^{m|r}}{b(b+r)^{m|r}} \ldots\ldots (z').$$

Si abbia, per esempio, $b=1$, $r=\frac{1}{n}$, $m=-n$, si avrà

$$\int_1^0 \frac{dx}{\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{-n|\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n|\frac{1}{n}}}.$$

Passando dagli esponenti negativi agli esponenti positivi, e dall' accrescimento $\frac{1}{n}$ all' accrescimento 1, verrà

$$\int_1^0 \frac{dx}{\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{1^{n|1}}{(1-n)^{n|1}}.$$

Il che c' insegna, paragonando coll' espressione (22) che

$$\int_1^0 \frac{dx}{\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{n\pi}{\operatorname{sen} n\pi}.$$

44. Riprendiamo l' espressione generale (2) e sostituiamo l' esponente m con $\frac{p}{q}$, dando il segno — a questo esponente; prendiamo di più r negativo, quest' espressione diventerà

$$\frac{(a+b)^{-\frac{p}{q}|r}}{a^{-\frac{p}{q}|r}} = 1 - \frac{p}{q}\frac{b}{a} + \frac{p(p+q)}{1.2.q^2}\frac{b^{2|-r}}{a^{2|r}} -$$

$$-\frac{p(p+2q)(p+3q)}{1.2.3.q^3}\frac{b^{3|-r}}{a^{3|r}} \text{ ec.},$$

il primo membro essendo identico con

$$\frac{(a-r)^{\frac{p}{q}|-r}}{(a+b-r)^{\frac{p}{q}|-r}}.$$

Se facciamo $a=p+q$, $r=q$, e che si divida da una parte e dall' altra per $a-r=p$, otterremo

$$\frac{p^{\frac{p}{q}|-q}}{p(b+p)^{\frac{p}{q}|-q}} = \frac{1}{p} - \frac{\frac{b}{q}}{p+q} + \frac{\left(\frac{b}{q}\right)^{2|-1}}{1.2.(p+2q)} -$$

$$-\frac{\left(\frac{b}{q}\right)^{3|-1}}{1.2.3.(p+3q)}+\frac{\left(\frac{b}{q}\right)^{4|-1}}{1.2.3.4.(p+4q)}-\text{ec.}$$

Nel caso di b infinitamente grande, le fattorielle dello sviluppo si riducono a semplici potenze, e il primo membro diviene

$$\frac{p^{\frac{p}{q}|-q}}{p\,.\,b^{\frac{p}{q}}}.$$

Ponendo $b=qt^q$, moltiplicando da una parte e dall'altra per t^q, e trasformando il primo membro

$$\frac{p^{\frac{p}{q}|-q}}{p\,.\,q^{\frac{p}{q}}}\quad\text{in}\quad\frac{1}{p}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}|-1},$$

si avrà lo sviluppo particolare

$$\frac{1}{p}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}|-1}=\frac{t^p}{p}-\frac{t^{p+q}}{p+q}+\frac{t^{p+2q}}{1.2(p+2q)}-\frac{t^{p+3q}}{1.2.3(p+3q)}+\frac{t^{p+4q}}{1.2.3.4(p+4q)}-\text{ec.}\ldots\ldots$$

il secondo membro del quale è lo sviluppo conosciuto dell'integrale

$$\int t^{p-1}.e^{-t^q}\,dt.$$

Così, per $t=\infty$, il valore di quest'integrale è

$$\int_0^\infty t^{p-1}.e^{-t^q}.dt=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}|-1}.$$

Non ci arresteremo alle espressioni particolari che resultano dai valori determinati di p e q; ci basta di avere in questo punto fatto conoscere la grande utilità delle fattorielle, e la facilità con la quale si può ottenere, col loro mezzo, la generazione di una moltitudine di quantità trascendenti. Convinto di questa utilità, indicata per la prima volta dal Kramp, il Legendre si è dedicato a ricerche estesissime sull'espressioni degli integrali definiti in fattorielle, il che gli ha fatto scoprire molte relazioni importanti; ma non possiamo indovinare perchè gli sia saltato in testa di cangiare la denominazione di *fattorielle* in quella di *funzioni gamma*, e di sostituire alla notazione tanto comoda del Kramp quella di

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n),$$

che maschera completamente l' analogia delle fattorielle e delle potenze, facendo perdere di vista l' originalità di queste prime funzioni.

45. Alcuni geometri esteri si sono recentemente occupati dello sviluppo delle funzioni in serie di fattorielle crescenti, problema abbracciato io tutta la sua generalità dalla legge

$$\varphi x = A_0 + A_1 x + A_2 x^{2|z} + A_3 x^{3|z} + A_4 x^{4|z} + \text{ec.} \ldots\ldots (\alpha),$$

nella quale φx indica una funzione qualunque della variabile x, z l'accrescimento delle fattorielle, e i coi coefficienti A_0, A_1, A_2, ec. sono

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \varphi \dot{x} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 = \dfrac{\Delta \varphi \dot{x}}{1 \cdot z} \ldots\ldots\ldots \\ A_2 = \dfrac{\Delta^2 \varphi \dot{x}}{1 \cdot 2 \cdot z^2} \ldots\ldots \\ A_3 = \dfrac{\Delta^3 \varphi \dot{x}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z^3} \ldots\ldots \\ \text{ec.} = \text{ec.} \\ \text{e in generale} \\ A^{\mu} = \dfrac{\Delta^{\mu} \varphi \dot{x}}{1^{\mu|1} \cdot z^{\mu}} \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (\beta),$$

il punto situato sopra $\dot{x}$ indicando che bisogna fare $x=0$, dopo aver preso le differenze rapporto a z. Abbiamo dato (*Vedi* COEFFICIENTI INDETERMINATI III) una dimostrazione di questa legge, che d' altra parte non è che un caso particolare della legge universale delle serie (*Vedi* SERIE.). Faremo osservare, a proposito dell' espressioni (β), che le differenze debbono formarsi considerando l' accrescimento z come negativo, vale a dire che invece di fare

$$\Delta \varphi x = \varphi(x+z) - \varphi x,$$

bisogna fare

$$\Delta \varphi x = \varphi x - \varphi(x-z).$$

Se si volesse formare le differenze nella prima maniera, si dovrebbe fare z negativo nello sviluppo (α). Applicheremo solamente questa legge alla funzione x^m, il coi coefficiente generale dello sviluppo

$$A_{\mu} = \frac{\Delta^{\mu} \varphi \dot{x}}{1^{\mu|1} z^{\mu}}$$

si presenta sotto una forma singolare e assai elegante.

La differenza dell'ordine μ della funzione x^m è, dalla costruzione generale delle differenze (*Vedi* CALCOLO DELLE DIFFERENZE o.° 14),

$$\Delta^{\mu}(x^m) = x^m - \mu(x-z)^m + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}(x-2z)^m - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-3z)^m + \text{ec.}$$

Facendo in quest' espressione generale $x=0$, essa prenderà la forma

$$\Delta^{\mu}(x^m)=(-1)^{m+1}z^m\Big\{\mu-\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}2^m+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}3^m-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}4^m \text{ ec. ec. } \ldots\Big\}.$$

Così dividendo i due membri di quest' eguaglianza per $1^{\mu|1}.z^{\mu}$, avremo per l' espressione del coefficiente generale dello sviluppo di x^m

$$A_{\mu}=(-1)^{m+1}\frac{z^{m-\mu}}{1^{\mu|1}}\Big\{\mu-\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}2^m+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}3^m-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}4^m+\text{ec.}\ldots\Big\},$$

e, conseguentemente, lo sviluppo esso medesimo sarà

$$\left.\begin{aligned}x^m=(-1)^{m+1}\Big\{&xz^{m-1}+\frac{1}{2}\Big[2-2^m\Big]x^{2|z}.z^{m-2}\\&+\frac{1}{2.3}\Big[3-3.2^m+3^m\Big]x^{3|z}.z^{m-3}\\&+\frac{1}{2.3.4}\Big[4-6.2^m+4.3^m-4^m\Big]x^{4|z}.z^{m-4}\\&+\text{ec.}\ldots\Big\}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(\gamma).$$

Si ha, per esempio, nel caso di $m=4$

$$x^4=-xz^3+7x^{2|z}z^2-6x^{3|z}z+x^{4|z}.$$

Fintantochè m è un numero intero positivo, lo sviluppo (γ) si compone di un numero finito di termini $=m$; in tutti gli altri casi, il numero dei termini è indefinito.

Si vede che, in questo caso di m, numero intero positivo, la serie

$$\mu - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}2^m + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}.3^m -$$

$$- \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}4^m + \text{ec.},$$

si riduce generalmente a *zero* per tutti i valori di μ maggiori di m, e che pel valore $\mu = m$ essa è equivalente a $1^{m|1}$.

La natura di quest' opera c' impedisce di entrare in maggiori particolarità sulla teoria delle fattorielle, e sopra le applicazioni di cui esse possono essere l'oggetto; ma crediamo aver detto abbastanza in quest' articolo e nel corso del dizionario per far conoscere evidentemente la necessità di introdurre queste funzioni nell' insegnamento elementare. Quelli dei nostri lettori che desiderassero approfondire la materia debbono consultare *l'Analisi delle Refrazioni astronomiche del Kramp. Vedi* ancora, la parola FRAZIONE CONTINUA.

FAULHABER (GIOVANNI), matematico tedesco, nato ad Ulma nel 1580 e morto nella stessa città nel 1635, insegnò con distinzione le matematiche nella sua patria, ove aveva ancora l' impiego d' ingegnere. In un' epoca in cui l' algebra era per così dire nell' infanzia, si applicò con particolare passione a questa scienza, e fatto gli venne di rinvenire dei metodi coi quali scioglieva problemi difficili, e da lui creduti insolubili per ogni altra via. Era allora costume generale tra i matematici di proporsi vicendevolmente dei quesiti, e Faulhaber non cessava di proporne loro dei difficilissimi. Ne facea appunto pubblicare uno nelle pubbliche vie di Ulma, quando si abbattè a passare per questa città Cartesio, allora semplice ufiziale volontario nelle truppe francesi in Alemagna. Questi non ebbe appena inteso di che si trattava, che portatosi alla casa del professore gli promise pel giorno dopo la soluzione del suo problema. Fu tal promessa creduta una millanteria, e come tale messa in derisione: ma il riso si cambiò in stupore quando la domane fu presentato il problema risoluto nel modo il più elegante. Tale lieve avventura servì a legare di stretta amicizia i due geometri. Faulhaber era dotato di un talento reale e di molta penetrazione, e se il suo nome è oggi quasi dimenticato e non figura in seguito a quelli di Cardano e di Tartaglia, deve ciò attribuirsi all' aver egli voluto tener troppo lungamente celate le sue scoperte e all' avere scritto soltanto in tedesco.

Delle numerose sue opere noi citeremo che le seguenti: I *Mathematici tractatus duo, nuper germanice editi, continentes, prior, novos geometricas et opticos aliquot singularium instrumentorum inventiones; posterior, usum instrumenti cujusdam belgae de novo excogitatum, dimentiendis et describendis rebus aptum, latine versi per Joh. Remmelinum*, Francfort, 1610, in-4: vi si trova descritta una macchina assai ingegnosa per disegnare la prospettiva; II *Arithmetischer Wegweiser* (*Guido aritmetica*), Ulma, 1614, in-8; 7.ª ediz., ivi, 1708, in-8; III *Miracula arithmetica*, Augosta, 1622, in-4; è un supplimento alla sua *Aritmetica*; IV *Academia algebrae*, Augusta, 1631, in-4; V *Arithmetische-Cubiccossische-Lustgarden* (*Giardino algebrico*), Ulma 1604, in-4; Altre indicazioni su questo matematico si rinvengono nella *Biografia universale*.

FEBBRAJO. Secondo mese dell' anno. Il suo nome deriva dall' antica parola *Febru* che significa *purificare*, perchè in questo mese celebravansi con gran pompa le feste lupercali nelle quali facevansi sacrifizj espiatorj pei defunti. Il mese di Febbrajo non si trovava nel calendario di Romolo: esso fu aggiunto all' anno da

Numa, che lo pose il dodicesimo nel calendario da lui stabilito. I Decemviri lo trasportarono poi nel posto che tiene anco al presente. Numa gli assegnò ventotto giorni, perchè secondo le idee fantastiche di Pitagora la somma totale dei giorni dell' anno fosse un numero impari. Nel calendario giuliano e nel gregoriano il mese di Febbrajo ha ventotto giorni negli anni ordinarj e ne conta ventinove negli anni bisestili. *Vedi* Calendario.

FENICE (*Astron.*). Costellazione meridionale situata tra l' Eridano e il Pesce australe. Essa comprende 72 stelle nel catalogo di La Caille, la principale delle quali è di seconda grandezza.

FERECIDE, celebre filosofo greco, nacque verso la XLV olimpiade (circa 600 anni avanti Gesù Cristo) nell' isola di Siro, una delle Cicladi. Dopo avere studiato sotto Pittaco, viaggiò nell'Egitto e nella Fenicia per maggiormente istruirsi nelle scienze e nella filosofia, e al suo ritorno aprì una scuola a Samo, ove tra gli altri discepoli ebbe la gloria di annoverare Pitagora. Non ci faremo qui ad esporre i principj filosofici di Ferecide, non permettendocelo la natura di questo Dizionario, solo diremo che insegnava la immortalità dell' anima. Egli fu il primo ad osservare le fasi della luna, e si provò a determinare la grandezza del sole. Si vedeva ancora ai tempi di Diogene Laezio, nell'isola di Siro, lo strumento di cui si valeva Ferecida per fare le sue osservazioni astronomiche; e si congettura che fosse uno gnomone. Vedasi su questo proposito Bailly, *Histoire de l'astronomie*, Tom. I, pag. 197. Non si conosce l' epoca precisa della sua morte, ma si sa che morì in età avanzatissima.

FERGOLA (Niccola), professore di matematiche trascendenti nell' università di Napoli e membro della R. Accademia di scienze e lettere della stessa città, nacque nell' Ottobre 1753 e morì il 21 Giugno 1824. Terminati appena i suoi studj letterarj, il giovane Fergola si applicò alle matematiche; ma il metodo difettoso col quale allora veniva tale scienza insegnata gli fece fare pochi progressi, ed ei si diede più particolarmente alla filosofia e alla giurisprudenza. Ma non erano queste le discipline cui lo chiamava l' indole del suo ingegno. Provveduto appena delle più scarse nozioni di geometria e di algebra, volle da sè solo inoltrarsi nel l' arduo cammino delle scienze esatte, e la costanza che mise nella sua impresa fu coronata dei più felici successi; imperocchè, superati tutti gli ostacoli che gli si paravano davanti, giunse a leggere e comprendere gli scritti più difficili di Newton, di Eulero e dei Bernoulli; e il governo reale conoscinte le sue estese e profonda cognizioni lo scelse ad insegnare matematiche nel Liceo di S. Salvadore.

Ecco la lista dei principali scritti da lui pubblicati: I *Solutiones novorum quorumdam problematum geometricorum*, 1779; II *Risoluzione di alcuni difficili problemi ottici*, 1780; III *Vera misura delle volte a spira*, 1783; IV *Metodo per la soluzione de' difficili problemi di sito*, 1785; V *Sezioni coniche*, 1791; VI *Prelezioni ai principj matematici della filosofia naturale di Newton*, 1792-93, 2 vol; VII *L' arte euristica*, 1811; VIII *Opuscoli matematici*; IX *Trattato di geometria sublime*; X *Trattato analitico dei luoghi geometrici*; XI Parecchie dissertazioni importantissime inserite nel Tomo I degli *Atti* della R. Società Borbonica di Napoli, sui contatti, sulle sezioni angolari, sul problema inverso delle forze centrali, sulla teoria dei luoghi geometrici, su varie curve, ec. Lasciò inoltre varie opere manoscritte, tra le quali sono da notarsi un *Trattato di calcolo differenziale e integrale*, un *Corso di Ottica*, un' *Introduzione all' analisi degl' infiniti*, e alcuni *Principj di astronomia*. Chi poi desiderasse nozioni più compiute su questo dotto e sulle sue opere potrà ricorrere al Tom. III della *Biografia degl' illustri Italiani* pubblicata da De-Tipaldo, non meno che alle fonti che ivi si trovano indicate.

FERGUSON (Giacobbe), algebrista olandese, autore di un'opera intitolata: *Labyrinthus Algebrae*, Aja, 1667, in-4, in olandese, nella quale tratta diffusamente della preparazione e della risoluzione delle equazioni. Una parte di tale opera tratta altresì della natura, della scomposizione, e della somma dei numeri figurati: in occasione di essi risolse molti problemi difficili, proposti agli analisti da un certo Tjado Focken.

FERGUSON (Giacomo), meccanico-astronomo, nacque nel 1710 in un villaggio della contea di Bamff, in Scozia. Figlio di poveri genitori e dotato dalla natura del più ardente desiderio d'istruirsi, ebbe a lottare come il Tartaglia contro tutte le difficoltà che gli opponevano le triste sue circostanze. Fu obbligato a mettersi al servizio di un fittajuolo, che lo destinò a guardare le pecore. Tale sua situazione lo portò naturalmente alla contemplazione del cielo; il corso degli astri colpì i suoi sguardi, volle conoscere le leggi colle quali si muovono, e non potendo procacciarsi gli strumenti necessarj a' suoi studj, tentò di supplirvi col suo ingegno e colla sua destrezza, costruendo da per sè un globo celeste ed un orologio di legno. Il suo padrone sorpreso da tale maravigliosa disposizione gli procurò la conoscenza di un uomo, che gli diede le prime nozioni delle matematiche. D'allora in poi il giovane Ferguson si dedicò interamente allo studio delle matematiche sì pure che applicate. Nel 1744 si recò a Londra, vi pubblicò tavole e calcoli astronomici, diede pubbliche lezioni di fisica, e fu ricevuto membro della Società Reale col favore di non pagare nessun diritto per la sua ammissione. Egli tiene tra i meccanici ed astronomi inglesi un grado distinto, e le sue opere, scritte in un modo chiaro, semplice e familiare, hanno avuto molta voga. Ecco la nota delle principali: I *Astronomia insegnata secondo i principii di Newton*, Londra, 1785, in-8, 7ª ediz.; II *Dialoghi tra un giovane che esce dal collegio e sua sorella in età di quattordici anni, alla quale insegna in segreto l'astronomia*, Londra, 1768, in-8, 7ª ediz. Tale libro, dice la Genlis nella prefazione delle *Veglie del Castello*, è scritto con tanta chiarezza, che un fanciullo di dieci anni può intenderlo perfettamente da un capo all'altro. III *Introduzione all'elettricità*, 1770; IV *Introduzione all'astronomia*, 1772; V *Esercizj scelti di meccanica*, 1773; VI *Lezioni sopra diversi soggetti di meccanica, d'idrostatica, d'idraulica, di pneumatica e d'ottica*, 1776, in-8, 5ª edizione. L'edizione di Edimburgo, 1805, 2 vol. in-8, con un vol. in-4 di tavole, è arricchita di aggiunte considerabili, di correzioni, e di notizie sullo stato attuale delle scienze e delle arti di David Brewster; VII *Trattato di prospettiva*, Londra, 1775, in-8; VIII *Due lettere al R. M. G. Kennedy*, nelle quali si espongono i differenti errori che occorrono nella parte astronomica della sua *Cronologia della Sacra Scrittura*, Londra, 1775, in-8; IX Parecchie memorie sopra differenti soggetti, inserite nelle *Transazioni filosofiche*. Ferguson morì il 16 Novembre 1776.

FERMAT (Pietro), nato a Tolosa verso l'anno 1595, fu uno dei più illustri matematici del secolo XVII. È affatto ignoto sotto quali maestri e in quali circostanze si sviluppasse in lui il gusto delle scienze esatte. Comunque sia, i lavori di Fermat hanno potentemente contribuito ai progressi straordinarj dell'algebra e della geometria, in un tempo in cui l'illustre Cartesio operava una sì maravigliosa rivoluzione in questi rami della scienza. Fermat, che occupava una carica di consigliere al parlamento di Tolosa, manifestò dapprima il suo ingegno nel suo carteggio coi più distinti matematici di quell'epoca, Cartesio, i due Pascal, Roberval, Torricelli, Huygens, Wallis, ed altri dotti non meno noti, come Carcavi, Mersenne, Digby, coi quali egualmente che coll'illustre Pascal era unito di una più stretta amicizia. Nei monumenti che ancora sussistono di questa estesa corrispondenza, in un piccolo numero di opuscoli pieni d'ingegno e di originalità, e nelle note delle quali ha ripieno il suo esemplare del *Diofanto* di Bachet, ha

egli depositato le numerose scoperte che al suo nome assicurano una giusta celebrità. Egualmente profondo nella geometria degli antichi e nei metodi algebrici dei moderni, fu veduto concepire ad un tempo con Cartesio l'idea felice di dipingere col calcolo le proprietà dell'estensione figurata, giungere al sublime concetto che è stato il germe del calcolo differenziale, far nascere con Pascal il calcolo delle probabilità, ed elevarsi nelle difficili ricerche delle più astruse proprietà dei numeri ad una altezza, ove fin qui è rimasto solo e senza rivale. Cerchiamo di dare un'idea succinta de' suoi lavori e delle sue più notabili invenzioni.

Fermat, che non era meno commendevole per la sua erudizione che pel suo ingegno inventore, cominciò probabilmente dall'occuparsi dell'analisi geometrica degli antichi. Dietro le tracce e le notizie lasciate da Pappo nelle sue *Collezioni matematiche*, tentò di restituire due delle loro più belle opere: i *Luoghi piani* di Apollonio, e i *Porismi* d'Euclide. Estese quindi le ricerche di Apollonio e di Viète intorno ai contatti delle linee rette e dei circoli sopra un piano al caso assai più difficile dei piani e delle sfere nello spazio. Questo gran problema è il primo che sia stato risoluto in tale ramo importante di geometria, il quale deve a Monge tante e sì importanti scoperte ed ha in fine somministrato a molti dei nostri dotti l'occasione di applicarvi con frutto i metodi e le formule della geometria analitica. Finalmente, mediante uno studio profondo dei metodi di Archimede, Fermat giunse, un poco prima di Neil e di van Heuraet, alla rettificazione esatta di una delle parabole cubiche e di parecchie altre curve, problema fino allora stimato insolubile; ma la sua scoperta non comparve che nel 1660, alcuni mesi dopo gli scritti dei geometri testè nominati. Ciò non ostante da una delle sue lettere a Pascal risulta che fino dal 1658 egli era in possesso dei suoi metodi e di un altro generalissimo sulla misura delle superficie di rivoluzione.

Dopo questa sommaria indicazione dei suoi lavori relativi alla geometria pura, i quali offrono oggi poco interesse, dobbiamo affrettarci a rammentare che Fermat divide con Cartesio la gloria della applicazione dell'algebra alla geometria delle curve, scoperta ammirabile che ha avuto immensi risultati e di cui abbiamo già parlato all'articolo Cartesio. La *Geometria* di Cartesio, che è il primo monumento pubblico di tale dottrina, comparve nel 1637, ma numerose lettere di Fermat a Pascal, a Roberval e a Mersenne, scritte nel 1636, dimostrano che fin d'allora era giunto agli stessi metodi, e che anzi sette anni avanti ne aveva comunicato un sunto al suo amico d'Espagnet. Scrisse su questo argomento un *Trattato dei luoghi piani e solidi*, nel quale determinava le diverse forme dell'equazione di una sezione conica, e tutti gli usi che potevano farsi di queste nuove forme per la costruzione delle equazioni solide le più complicate. Inventò ingegnose trasformazioni per ridurre la quadratura di parecchie curve a quella del circolo e dell'iperbola, e scrisse specialmente una *Dissertazione* profonda sul grado delle curve necessarie alla costruzione di una equazione qualunque; essa lo condusse ad un principio generale che non era sufficientemente espresso nella *Geometria* di Cartesio, cioè che basta sempre che il prodotto dei gradi delle curve che s'impiegano non sia minore del grado dell'equazione. Se quindi si passa alle sue ricerche di algebra pura, noteremo fra gli altri l'ingegnoso suo metodo per fare sparire dalle equazioni le quantità irrazionali, o come allora dicevasi, le *asimetrie*. L'artifizio di cui usava con molta sagacità non poteva sfuggire ad un uomo così profondo nell'analisi indeterminata, quindi fu esso il soggetto di un problema che Fermat propose ai geometri suoi contemporanei, e nella cui soluzione prese errore lo stesso Cartesio, che credè di poterne venire a capo mediante una serie di successive elevazioni a potenza.

Ci occorre qoi di parlare del famoso *Metodo* di Fermat di cui egli noo ha per verità mai pobblicato la definizione completa nè la dimostrazione generale, ma del quale ha fatto le più belle applicazioni ai problemi dei massimi e dei minimi, alle tangenti delle curve algebriche e trasceodenti, ed ai centri di gravità delle conoidi. Ora teneodogli dietro io ogouna di qoeste applicazioni, ed elevandosi alle idee generali che dirigooo il suo cammino, lo vediamo sempre cominciare dallo scegliere tra le proprietà specifiche del suo soggetto la relazione di coi il limite dee rispondere al quesito proposto e daroe la soluzione, ed è soprattutto nella scelta di tale relazione che consistooo le difficoltà e tutto l'artifizio di siffatto metodo. Si trattava, per esempio, di dividere una linea in modo che il prodotto delle due parti fosse il più grande possibile, o di trovare la sottangente della parabola? Nel primo caso supponeva nella linea data due sezioni differenti ed infioitamente prossime, cercava quindi il limite della relazione dei rettangoli resultanti da tali due seziooi, cioè il puoto in cui la differenza di questi due rettangoli diviene assolutamente nulla, in modo che essi possano formare i due membri di un' equazione: nel secoodo caso suppooeva due punti infioitamente vicini al punto di contatto, poi cercava il limite della relazione dei quadrati delle distanze delle loro due ordinate ad uno stesso punto dell' asse prolungato, cioè il ponto lo coi tale relazione può formare un' equazione con quella delle due ascisse corrispondenti. Formate una volta tali equazioni, sopprimeva i termini comuni, divideva quanto poteva per la graodezza infinitamente piccola, e trascorava io seguito tutti i termini che rimanevano affetti da questa quantità. Tale era la serie costante delle operazioni che Fermat faceva in tutte le applicazioni del suo metodo, al quale sottometteva le questioni più difficili e più nuove. Fu esso quindi, non ostante le molte obiezioni che gli vennero fatte, altamente applaudito da qoei geometri che dai brevi ceoni che Fermat ne pubblicò poterono comprenderne tutta l'importanza. Tra essi si notano Sluze e Huygens, che si applicarono ad esporre siffatto metodo con alcuni schiarimenti.

Esaminando attentamente quanto abbiamo riferito del metodo di Fermat, non è difficile lo scorgervi l'idea fondamentale del calcolo differenziale: ma per lungo tempo niuno pensò a far rilevare i diritti che qoesto grande geometra aveva a tale importante scoperta: nella lunga disputa che divise l'Inghilterra e il continente sul merito di Leibnitz e di Newtoo nell'invenzione del nuovo calcolo, il nome di Fermat non fu nemmeno pronunziato: il giudizioso storico delle matematiche, il dotto Montucla, mantiene in questo proposito il più rigoroso silenzio. Genty fu il primo che in uno scritto coronato nel 1783 dall'accademia di Tolosa lolse a dimostrare che » Fermat doveva esser considerato come il primo » ioventore del metodo di assoggettare al calcolo le quantità infinitamente piccole » e di farle servire alla soluzione dei quesiti. » Ma come la dimenticanza assoluta dei suoi predecessori era stata troppo ingiusta, così forse la lode di Genty potrà sembrare troppo esagerata. Non volendoci però noi erigere in giudici intorno alla parte che spetta a Fermat nella invenzione dei nuovi metodi, ci limiteremo a riportare il giudizio che ne hanno dato due sommi geometri, Lagrange e Laplace. Il primo, nelle sue *Lezioni sul calcolo delle funzioni*, così si esprime: » Si può considerare Fermat come il primo ioventore de' nuovi calcoli. » Nel suo metodo *de maximis et minimis* egli eguaglia l' espressione della » quantità di coi vuol trovare il massimo o il minimo all' espressione della stessa » quantità nella quale l' incognita sia aumentata di una quantità indeterminata. » Egli fa sparire in tale equazione i radicali e le frazioni se ve ne sono, e dopo » aver cancellati i termini comuni nei due membri divide tutti quelli che rimangono per la quantità iodeterminata: quindi fa tale quantità nulla ed ottiene » così un' equazione che serve a determinare l' incognita del quesito. Ora è facile

» di vedere a prima giunta che la regola dedotta dal calcolo differenziale, la
» quale consiste nell'eguagliare a zero il differenziale dell'espressione che si vuol
» rendere un *massimo* o un *minimo*, preso facendo variare l'incognita di tale
» espressione, dà lo stesso resultato, perchè il fondo è lo stesso, ed i termini che
» si trascurano come infinitamente piccoli nel calcolo differenziale sono quelli che
» si debbono sopprimere siccome nulli nel metodo di Fermat. Il suo metodo delle
» tangenti dipende dallo stesso principio. Nell'equazione tra l'ascissa e l'ordi-
» nata, che egli chiama la proprietà specifica della curva, aumenta o diminui-
» sce l'ascissa di una quantità indeterminata e riguarda la nuova ordinata come
» appartenente a un tempo e alla curva e alla tangente, il che fornisce un'equa-
» zione che egli tratta come quella di un caso di *massimo* o di *minimo*. In ciò
» si vede parimente l'analogia del metodo di Fermat con quello del calcolo dif-
» ferenziale, poichè la quantità indeterminata, di cui si aumenta l'ascissa, cor-
» risponde al differenziale di questa, e l'aumento corrispondente dell'ordinata
» corrisponde al differenziale di quest'ultima. Merita pure attenzione che nello
» scritto che contiene la scoperta del calcolo differenziale, stampato negli Atti
» di Lipsia del mese di ottobre 1684 col titolo: *Nova methodus pro maximis et*
» *minimis*, ec. Leibnitz chiama il differenziale dell'ordinata una linea che stia
» all'accrescimento arbitrario dell'ascissa come l'ordinata alla suttangente, il che
» avvicina la sua analisi a quella di Fermat. Apparisce dunque che quest'ultimo
» ha aperto l'aringo con un'idea originalissima ma un poco oscura, la quale con-
» siste nell'introdurre nell'equazione un'indeterminata che deve esser nulla per
» la natura del quesito, ma che non si fa sparire che dopo aver divisa tutta
» l'equazione per questa quantità medesima: siffatta idea è divenuta il germe dei
» nuovi calcoli, che hanno fatto fare tanti progressi alla geometria e alla mec-
» canica; ma si può dire che essa ha recato altresì la sua oscurità ai principj
» di tali calcoli. Adesso che si ha un'idea ben chiara di tali principj, si vede
» che la quantità indeterminata cui Fermat aggiungeva all'incognita non serviva
» che per formare la *funzione derivata* la quale deve esser nulla nel caso del *mas-*
» *simo* o del *minimo*, e che serve in generale per determinare la posizione della
» tangente nelle curve. Ma i geometri contemporanei di Fermat non colsero lo
» spirito di tale nuovo genere di calcolo: essi nol riguardarono che come un arti-
» fizio particolare applicabile soltanto ad alcuni casi e soggetto a molte difficoltà:
» laonde essa invenzione, la quale era comparsa un poco prima della *Geometria*
» di Cartesio, rimase sterile per circa quarant'anni. Alla fine Barrow immaginò
» di sostituire alle quantità che debbono essere supposte nulle secondo Fermat
» delle quantità reali ma infinitamente piccole, e pubblicò nel 1674 il suo *Me-*
» *todo delle tangenti*, il quale in sostanza non è che la costruzione di quello
» di Fermat per mezzo del triangolo infinitamente piccolo formato degli accre-
» scimenti dell'ascissa e dell'ordinata e del lato della curva riguardata come un
» poligono. Egli fece nascere in tal guisa il sistema degl'infinitamente piccoli e
» il calcolo differenziale.» Laplace poi, nel suo *Saggio filosofico sul calcolo delle*
probabilità, si è espresso in un modo anco più positivo. Dopo avere esposti con
rara precisione i punti essenziali del metodo di Fermat, dice: »Si deve dunque
» considerare Fermat siccome il vero inventore del calcolo differenziale. Newton
» ha poscia reso tale calcolo più analitico nel suo metodo delle flussioni, e ne ha
» semplificato e tratto a generalità i metodi col celebre suo teorema del *binomio*. In
» fine, quasi nello stesso tempo, Leibnitz ha arricchito il calcolo differenziale di
» una notazione, la quale indicando il passaggio del finito all'infinitamente piccolo
» unisce al vantaggio di esprimere i resultati rigorosi di tal calcolo quello di dare
» i primi valori approssimati delle differenze e delle somme delle quantità; no-
» tazione che si è adattata da sè stessa al calcolo dei differenziali parziali.» Ed

una riprova, per quanto a noi pare decisiva, che il metodo di Fermat e i lavori successivi di Barrow e di Wallis avevano preparato e per così dire maturato il concetto fondamentale del calcolo differenziale, si è il vedere come questo calcolo venne poco dopo e quasi contemporaneamente inventato da due diversi geometri in due diversi e lontani paesi.

Abbiamo di sopra annunziato che Fermat fece nascere insieme con Pascal il calcolo delle probabilità, limitato in origine alle sole questioni che possono presentare i giuochi d'azzardo. Quantunque non rimangano tracce dell'analisi che adoprò in questa teoria, se ne trovano almeno tutti i risultati nella sua corrispondenza con Pascal, il quale fu pel primo eccitato ad occuparsi di tal genere di quesiti dal suo amico, il cavaliere di Méré, famoso giocatore di quel tempo. Per dare un'idea dei problemi che essi trattarono, e per avvalorare l'asserzione precedente con una autorità irrefragabile, non possiamo far meglio che usare le parole stesse dell'autore della *Teoria analitica delle probabilità* e del *Saggio filosofico* sopra lo stesso calcolo, opera in cui la sagacità delle idee va congiunta colla chiarezza dell'espressione. » Da lungo tempo si erano determinate nei giuochi più semplici le relazioni delle sorti favorevoli o contrarie ai giuocatori: » le messe e le scommesse erano regolate secondo tali relazioni, ma nessuno prima di Pascal e di Fermat aveva dato principj e metodi per sottoporre tale » oggetto al calcolo, nè aveva risoluto problemi di siffatto genere un poco » complicati. A quei due grandi geometri è di mestieri riferire i primi elementi » della scienza delle probabilità di cui la scoperta può essere annoverata tra le » cose notabili che hanno illustrato il secolo XVII, quello che di tutti i secoli » torna più ad onore dell'intelletto umano. Il problema principale che essi risolvettero, entrambi per vie differenti, consiste nel dividere equamente la messa » tra due giuocatori, di cui l'abilità sia eguale e che convengono di lasciare una » partita prima che finisca, essendo condizione supposta del giuoco che per guadagnare la partita conviene giungere il primo a fare un certo numero di punti. » È chiaro che il reparto deve farsi in proporzione delle probabilità che i giuocatori hanno respettivamente di vincere la partita, probabilità che dipendono » dal numero dei punti che loro mancano a fare. Il metodo di Pascal è assai ingegnoso e non consiste in sostanza che nell'uso dell'equazione a differenze » parziali relativa a tale problema, per determinare le probabilità successivamente dei giuocatori, andando dai numeri più piccoli ai seguenti. Questo metodo è limitato al caso di due giuocatori; quello di Fermat fondato sulle combinazioni si estende ad un numero qualunque di giuocatori. Pascal credè dapprima che dovesse essere, come il suo, ristretto a due giuocatori, il che fece » insorgere tra essi una discussione, alla fine della quale Pascal riconobbe la » generalità del metodo di Fermat. »

Rimane ora a far conoscere le scoperte di Fermat nell'analisi indeterminata e nella teoria dei numeri; ma nell'impossibilità di esprimerci con alcuna brevità in tale argomento, dobbiamo limitarci a ricordare le più notabili e a fare alcune riflessioni sulla via che ha potuto condurre questo grande analista a tali difficili invenzioni. Non si può dunque che indicare di volo e quanta perfezione aggiungesse alla teoria più curiosa che utile dei quadrati magici, e le sue ricerche dei numeri che stanno in una data relazione colle loro parti aliquote, e i progressi considerabili per cui seppe avanzare l'analisi di Diofanto, della quale estese il metodo delle doppie eguaglianze alle eguaglianze degli ordini superiori: fino allora Bachet de Méziriac, nel suo utile lavoro sopra Diofanto, di cui gli si deve la prima buona edizione, aveva solo accresciute realmente le invenzioni del geometra di Alessandria. Le ricerche di Fermat di maggior grido si riferiscono ai numeri poligoni, ai numeri primi e alle potenze. Ecco in ognuna di tali teorie i più

curiosi de' suoi teoremi: 1.° Si può sempre scomporre un numero qualunque in un numero di poligoni eguale o inferiore a quello delle unità de' loro lati: così un numero qualunque è la somma di uno, due o tre numeri *triangolari*, di uno, due, tre o quattro numeri *quadrati*, di uno, due, tre, quattro o cinque numeri *pentagoni*, e così successivamente; 2.° Se si eleva alla potenza $p-1$ (essendo p un numero primo) un numero qualunque che non sia multiplo di p, il resultato diminuito di una unità sarà divisibile per p; 3.° Se la più piccola potenza di un numero qualunque, che diminuita di un' unità si divide per p, è *impari*, niuna potenza di tal numero aumentata di una unità potrà dividersi esattamente per p, ed il contrario avverrà se tale potenza è *pari*; 4.° Ogni numero primo che supera di un' unità un multiplo di 4, può essere scomposto in due quadrati, e non può esserlo che in una sola maniera; 5.° Una potenza qualunque di un numero simile, potrà esprimere l' ipotenusa di tanti triangoli rettangoli quanti indicherà l' esponente della potenza, e sarà scomponibile in due quadrati in tante maniere quante esprime la metà del grado della potenza aumentando tal grado di un'unità ove sia impari: principj, donde scaturisce un metodo generale per distinguere in quante maniere un numero qualunque, primo o no, è scomponibile in due quadrati; 6.° L' area di un triangolo rettangolo in numeri interi non può mai essere eguale ad un quadrato; 7.° Al di sopra del quadrato, non vi ha nessuna potenza scomponibile in due potenze dello stesso grado di essa; 8.° La somma o la differenza di due quadrato-quadrati non può mai essere un quadrato; 9.° Nella infinita serie dei numeri interi non vi è: 1.° che un solo quadrato che unito a 2 faccia un cubo; 2.° che due soli quadrati che aggiunti a 4 facciano dei cubi, ec.

Disgraziatamente, niuna delle dimostrazioni di Fermat è a noi pervenuta, eccetto quella del 6.° dei teoremi precedenti ed i principj di quella dell' 8.°. Eulero il primo si è occupato di rinvenire le altre e vi ha lavorato per tutto il corso della laboriosa sua vita: è riuscito per un gran numero, per esempio, per la dimostrazione del secondo, uno dei più utili di tale spinosa teoria. Lagrange e l' autore della *Teoria dei numeri* non si sono meno segnalati in tale ricerca: si deve tra le altre al primo di essi geometri la dimostrazione del caso dei quattro quadrati, nella prima e più notabile delle precitate proposizioni, e il secondo poi vi ha aggiunto il caso dei tre numeri triangolari; ma, nè i loro sforzi, nè quelli di Gauss, nè i successivi di Cauchy hanno potuto aggiungere o altri casi particolari o il caso generale di quella famosa proposizione. Nulladimeno i loro lavori uniti hanno singolarmente perfezionato tale ramo difficile dell'analisi, e si posseggono oggigiorno le dimostrazioni pressochè di tutti i teoremi di Fermat.

Qui si presentano naturalmente due quesiti: Fermat possedeva veramente le dimostrazioni de' suoi teoremi? ovvero i teoremi, ai quali era giunto, erano essi il resultato soltanto di una dotta ed ingegnosa induzione? Dopo un attento esame dei documenti e degli scritti originali di quel tempo, sembra che il primo debba esser risoluto affermativamente. Fermat, che ci ha lasciato la più nobile idea del suo candore e del suo carattere, afferma costantemente nelle sue lettere ai più abili geometri di quel tempo, che possedeva le dimostrazioni delle sue scoperte, e nelle risposte di questi si scorge che nessuno ne dubitava; sembrano anzi persuasi che per giungervi egli avesse inventato un metodo ad essi sconosciuto: » Vi » siete fabbricato, gli scriveva Frenicle, versatissimo in tal genere di quesiti, » una specie particolare di analisi per frugare nei segreti più nascosti dei nu- » meri. — Io sono persuaso, diceva Fermat a Pascal in una lettera trovata e pub- » blicata da Bossut, che quando avrete conosciuto il mio modo di dimostrare » in questo genere di proposizioni, esso vi parrà bello e vi darà luogo a fare » molte nuove scoperte. — Cercate altrove chi vi tenga dietro nelle vostre ricer-

» che nnmeriche, risponde Pascal; ciò è molto al di sopra delle mie forze, e io non » sono capace che di ammirarvi. » Gli avrebbero tenuto questo linguaggio e dimostrata tutti questa opinione, se non avessero avuto la prova che nel suo metodo vi era qualche cosa di più che una semplice ioduzioue; se di lui non avessero conosciuto delle dimostrazioni simili a quelle due che sole sono sfuggite all' ingiurie del tempo? Queste almeno esistono e provano che poteva averne delle altre; ed infatti i suoi scritti ci offrono ancora qualche traccia dei metodi che si era formati: faceva spesso uso di qnello dell' esclusione, che aveva molto perfezionato; nella lettera a Pascal di sopra citata, gli dice che è giunto alla sua famosa proposizione per mezzo del teorema 4; e probabilmente non esalta tanto la scoperta del principio fondamentale della teoria dei nnmeri figurati, scoperta che sembra oggi molto ordinaria, che per la ragione che essa gli dava la chiave di molte altre verità importanti. Finalmente, se un mezzo tanto incerto quanto quello dell' induzione l' avesse solo condotto a teoremi tanto numerosi e sì complicati, come mai le ricerche costanti dei geometri non hanno potuto scoprirne la falsità? Uno solo deve eccettuarsene, che Eolero ha trovato in fallo; ma è anco precisamente il solo di cui una lettera espressa di Fermat ci fa sapere come non poteva trovarne la dimostazione: così si limita egli ad enunciarlo, pregando uno de' suoi amici a cercarne la prova che gli mancava, per la grand' opera di cui lentamente raccoglieva i materiali, ed in cui si proponeva di riunire il frutto delle sue ricerche. Quest' opera non ha veduto la luce e forse non è mai esistita.

Il genio di Fermat aveva preceduto quello di Cartesio; la sua corrispondenza ci fa conoscere che di buon' ora era egli in possesso di una gran parte delle più belle proposizioni stabilite dall' illustre autore del *Discorso sul Metodo* nel suo *Trattato di Geometria*. Questo fatto ci conduce naturalmente a chiedere col dotto Lacroix, se, avuto riguardo all' epoca in cui ha vissuto Fermat ed ai numerosi progressi che a lui debbono le scienze esatte, avrebbe egli tenuto vece di Cartesio, nel caso in cui questi non fosse esistito. E noi risponderemo con questo illustre geometra: » Sì, ove se ne giudichi dall' importanza dei suoi lavori e dalle » difficoltà che ha vinte: ma è permesso di dubitare se avrebbe tanto contribuito » alla propagazione della scienza, quanto lo fece il suo rivale, mercè il suo carat- » tere comunicativo e la maniera semplice con cui presenta il risultato delle sue » ricerche. » Questo è un confessare che Fermat non possedeva tali preziose qualità d' un sommo ingegno, e che lungi dall' imitare Cartesio, che presentava nelle sue opere la storia de' suoi pensieri, in modo da mettere nella buona strada quelli che volessero andar più lontano, non lasciava scorgere qual via avesse potuto condurlo alle sue scoperte, e non sapeva dare ai suoi scritti quella chiarezza e quella semplicità per cui si faranno sempre distinguere quelli del gran filosofo che gli opponiamo. Comunque sia, la sua reputazione è oggidì bene assicurata: rivale felice di Cartesio, oggetto costante dell' ammirazione di Pascal, che lo chiamava il primo uomo dell' universo, non si vorrà dimenticare che Fermat fu il precursore di Newton e di Leibnitz, e che lasciò nelle brillanti scoperte sui numeri di che occupare lungamente i suoi più abili successori.

Pietro Fermat morì nel mese di Gennaio 1665: lasciò reputazione di giudice integerrimo ed illuminato, egualmente che di sommo geometra, poichè giammai i suoi studj scientifici gli fecero dimenticare un momento i suoi doveri di magistrato. Scriveva con una eleganza notabile non solamente per un geometra ma anco pei letterati del suo tempo: aveva un spirito vivo e brillante, e alle sue profonde cognizioni in matematiche accoppiava quella di molte lingue antiche e moderne che parlava e scriveva con eguale facilità. L' accademia di Tolosa, che comprese finalmente la perdita che le scienze avevano fatta in quest' uomo distinto non meno pel suo carattere che pe' suoi talenti, propose lungo tempo dopo la sua

morte per argomento di una memoria da premiarsi a concorso, l'esame e la valutazione degl' immensi suoi lavori. La dissertazione di Genty intitolata: ***De l'influence de Fermat sur la géométrie de son temps***, fu quella che riportò il premio dell'accademia. Ad essa adunque e alla *Biografia universale* rimanderemo il lettore che desiderasse più minute notizie intorno a questo illustre scienziato.

Fermat non pubblicò finchè visse che alcuni scritti staccati. Dopo la sua morte, uno dei suoi figli, Samuele Fermat, fece stampare il *Diofanto* di Bachet colle note di cui suo padre aveva arricchito i margini di tale libro: l'edizione ne è rara e preziosa, ed ha per titolo: *Diophanti Alexandrini quaestionum arithmeticarum libri sex, ec., graece et latine, cum commentariis D. Bachet, et observationibus P. de Fermat*, Tolosa, 1670, in-fol. Vi si trova premesso un piccolo trattato del P. de Billy, gesuita, intitolato: *Doctrinae analyticae inventum novum*, che è una compilazione abbastanza ben fatta delle scoperte aritmetiche di Fermat, ma è zeppa di errori di stampa. Lo stesso Samuele Fermat raccolse i principali scritti di suo padre e gli pubblicò col seguente titolo: *Varia Opera mathematica D. P. de Fermat, senatoris tolosani, ec.*, Tolosa, 1669, in-fol. Questo volume, che al pari del precedente è raro e di gran prezzo pei geometri, contiene: I *Un metodo per trovare la quadratura d' ogni sorta di parabole*; II *Un metodo dei massimi e dei minimi, che serve non solo per la determinazione dei problemi piani e solidi, ma ancora per condurre le tangenti alle curve, e per trovare i centri di gravità dei solidi e la soluzione di quesiti riguardanti i numeri*. È questo il metodo di cui abbiamo parlato di sopra e che dà diritto a Fermat di essere annoverato tra i primi inventori del calcolo differenziale; III *Un' introduzione ai luoghi geometrici piani e solidi*; IV *Un trattato sulle tangenti sferiche*, ove dimostra pei solidi ciò che Viète aveva dimostrato pei piani; V *Un ristabilimento dei due libri di Apollonio sui luoghi piani*; VI *Un metodo generale per la discussione delle linee curve*, e finalmente un gran numero di memorie e di lettere scientifiche. Con tale pubblicazione, Samuele Fermat ha certamente ben meritato la riconoscenza dei dotti; ciò non ostante è lecito credere che se non avesse lasciato passare quindici anni prima di pubblicare tale raccolta, molti frammenti, di cui la conoscenza avrebbe servito a far ritrovare i metodi di suo padre, avrebbero potuto esservi aggiunti con vantaggio sommo della scienza. Vi sarebbe anzi forse luogo a rimproverarlo di negligenza; imperocchè, per esempio, è noto che Fermat, come venne a morte, aveva fatto depositario di tutte le sue carte il suo intimo amico, Carcavi, che viveva a Parigi dove lo ritenevano la sua qualità di membro dell'Accademia delle Scienze e la sua carica di bibliotecario del re, e nulladimeno nella prefazione che Samuele Fermat pose in fronte alle opere di suo padre non fa niuna menzione nè di Carcavi, che non morì peraltro che nel 1684, nè di carte da esso ricevute. Giova intanto sperare che nella nuova edizione delle opere di Fermat, che è per pubblicarsi in Francia a spese della nazione sui manoscritti recentemente rinvenuti per cura del dotto e diligentissimo prof. Guglielmo Libri, si troveranno tutti i preziosi lavori e ingegnosi metodi di cui da tanti anni si deplora la perdita. Esistono ancora di Fermat parecchie lettere nel tomo III delle *Lettere di Cartesio*, in-4; nel tomo II delle *Opere di Wallis*, in-fol; e nel tomo IV delle *Opere di Pascal*, in-8.

FERNEL (Giovanni), medico e matematico, nato a Clermont nel Beauvaisis nel 1497, si è reso celebre per la prima misura del grado del meridiano terrestre che sia stata tentata in Francia. Ha lasciato le seguenti opere di matematiche: I *Monalosphaerion, sive Astrolabii genus, generalis horarii structura et usus*, Parigi, 1526, in-fol: tale trattato, che contiene soli 36 fogli, dà i principj elementari della sfera colla descrizione di un astrolabio perfezionato. II *De Proportio-*

nibus libri duo, Parigi, 1528, in-fol., di 28 fogli; III *Cosmotheoria libros duos complexa*, Parigi, 1528, in-fol., di 52 fogli. In tale opera Fernel espone il metodo da lui impiegato per determinare la grandezza della terra, mediante la misura di un grado del meridiano. Audò da Parigi ad Amiens, città situate presso a poco sotto lo stesso meridiano; e contando con esattezza i giri della ruota della sua carrozza, si avanzò verso il nord finchè non ebbe trovato l'altezza del polo precisamente un grado maggiore di quello che era a Parigi, e così determinò la grandezza del grado di 56,746 tese. Si sa che Picard trovò in seguito questo grado di 57,060 tese: e sebbene anco questa determinazione abbia subito successivamente alcune correzioni, è uonostante curioso che Fernel abbia potuto giungere tanto vicino alla verità con un metodo così erroneo e così insufficiente. Attribuendo però al puro caso il resultato da lui ottenuto, gli si deve almeno saper grado del suo tentativo. Fernel morì il 26 Aprile 1558.

FERRACINA (Bartolommeo), nato a Solagua presso Bassano, nel 1692, da poveri genitori, manifestò nella sua prima giovinezza un talento maraviglioso per la meccanica. Obbligato, per provvedere alla sua sussistenza e a quella della sua famiglia, a darsi alle più dure e penose occupazioni, inventò parecchie macchine che rendevano o più spediti o più esatti i suoi lavori, e che destarono lo stupore di chi le osservò. La fama del suo ingegno si dilatò ben presto. Andò a stabilirsi a Padova, donde poi si trasferiva ovunque la fiducia ne' suoi talenti il faceva chiamare. È sua fattura l'orologio della piazza di S. Marco di Venezia. Diresse la volta del gran salone di Padova. Nel 1749, costruì una macchina idraulica che per mezzo di molte viti di Archimede portava l'acqua a trentacinque piedi di altezza. Ma il monumento che perpetuò il nome del Ferracina e che più onora il suo ingegno è il ponte di Bassano costruito sotto la sua direzione.

Ferracina non si applicò mai a render ragione di quanto inventava. Si cercò più volte d'ispirargli amore per lo studio delle scienze, facendogli conoscere quanto egli poteva illustrare il suo secolo, se voleva coltivare il suo spirito colla lettura delle buone opere o mediante le conferenze con dotte persone; ma egli non potè mai a ciò risolversi. Morì a Solagua nel 1777, e la città di Bassano gli eresse un monumento. Intorno alle invenzioni di questo preclaro ingegno sono da consultarsi: l'opera di Francesco Memmo intitolata: *Vita e Macchine di Bartolommeo Ferracina*, Venezia, 1754, in-4; l'*Elogio storico del famoso ingegnere Bartolommeo Ferracina*, Venezia, 1777, in-8, scritto da Giovan Batista Verci; e la *Biografia degl'illustri Italiani* pubblicata a Venezia da Emilio de Tipaldo.

FERRAGUTI o FERRAGU' (Francesco), nato a Ferrara il 2 Aprile 1727, e morto il 23 Gennajo 1798, si applicò con successo allo studio delle scienze esatte; e quantunque la sua professione di notaro gl'impedisse di dedicarvisi interamente come avrebbe desiderato, pure produsse alcuni scritti che non sono privi di merito. Oltre varj trattati tuttora inediti sull'aritmetica, la gnomonica e l'astronomia, si hanno di lui: I *L'aritmetica in pratica divisa in tre libri, con un trattato del cambio, ec.*, Bologna, 1759, in-8; II *Istruzioni aritmetiche*, ivi, 1766, in-8.

FERRARI (Luigi), matematico, nato a Bologna il 2 Febbrajo 1522, si è reso celebre per avere il primo trovato il metodo per risolvere le equazioni di quarto grado. I suoi genitori, rovinati dalla guerra, non poterono fargli dare la menoma istruzione. In età di quattordici anni si recò a Milano, donde era originaria la sua famiglia, e si pose al servizio del celebre Cardano, il quale scoperte le felici disposizioni del giovinetto lo trasse dalla sua condizione servile, si prese cura della sua educazione e volle egli stesso insegnarli le matematiche. Tanti benefizj

non furono spesi inutilmente: il giovine Ferrari fece sì rapidi progressi, che in età di diciassette anni fu in grado di professare le matematiche e di sostenere parecchie tesi con grandissimo onore. Da quell' epoca la sua fortuna fu più brillante di quella dello stesso suo maestro. Versatissimo nell'architettura, nella geografia, e nelle lingue greca e latina, parecchi principi d'Italia si disputarono il vantaggio di averlo alla loro corte. Preferì quella del cardinale di Mantova, Ercole Gonzaga, e del principe don Ferrante, suo fratello, governatore di Milano, che gli diede l'incarico di formare la carta di quello stato. Vi lavorò otto anni, in capo ai quali una indisposizione aggravata dall'abuso dei piaceri lo costrinse ad abbandonare repentinamente il servigio dei Gonzaga; ciò accadeva nel 1561. Tornò a Bologna, ove gli fu conferita una cattedra di matematiche, che occupò brevissimo tempo, poichè morì nell'anno susseguente in età in 43 anni, avvelenato, per quanto si sospettò, da una sua sorella, cui la speranza di conseguire la sua ricca eredità aveva spinta a commettere questo delitto. Cardano, facendo l'elogio del talento di Ferrari, dipinge le sue qualità morali in un modo assai sfavorevole: lo rappresenta come un dissoluto, un empio, e di un carattere sì collerico e violento, che egli stesso osava appena avvicinarglisi.

Ferrari fece la scoperta che ha consacrato il suo nome negli annali della scienza nell'occasione di un problema proposto da Giovanni Colla, che si piaceva di imbarazzare i dotti con questioni intrigatissime. Trattavasi di trovare tre numeri continuamente proporzionali, la cui somma fosse 10, e il prodotto del secondo pel primo fosse 6. Tale problema tradotto in analisi conduceva ad una equazione del quarto grado. Niun metodo avevasi ancora per risolvere queste equazioni: si teneva anzi la cosa per impossibile. Cardano solo sembrava sperare che se ne verrebbe a capo: comunicò il problema al suo allievo, stimolandolo vivamente a volersene occupare. Ferrari, pieno di ardore e di emulazione, giustificò di fatto la speranza del suo maestro, recandogli presto un metodo ingegnoso per risolvere le equazioni del quarto grado: esso consiste nell'aggiungere a ciascun membro dell'equazione, ordinata in una certa maniera, delle quantità quadratiche e semplici che siano tali da render possibile l'estrazione della radice quadrata di ciascun membro (*Vedi* Biquadratico.). Montucla, che ha riportato tale metodo nella sua *Storia delle Matematiche*, difende Ferrari contro gl' ingiusti rimproveri di Wallis, che nel suo *Trattato di Algebra storico e pratico* l'accusa di non aver fatto niuna scoperta in matematica. Se Wallis avesse consultate le opere di Cardano e di Bombelli, non avrebbe aggiunto questo errore ai tanti che formicolano nel suo libro.

FERRARI (Bartolommeo), abile matematico italiano, nato a Bologna nel secolo XVIII, fece i suoi studi in quella università, ove si dottorò in filosofia e in medicina. Chiamato dal proprio genio allo studio delle scienze, si applicò specialmente e con successo alla meccanica. Costrusse pel Gonzaga, duca di Sabioneta, un orologio, di cui pubblicò una descrizione intitolata: *Dello Sferologio e sue operazioni*, Bologna, 1683, in-8, e che indicava non solo le ore, ma eziandio i movimenti della luna, dei pianeti, e di tutte le stelle che si vedevano incise sopra un globo sostenuto da un Atlante in bronzo di un piede d'altezza.

FERRARI (Luigi-Maria-Bartolommeo), barnabita, nato a Milano il 5 Giugno 1747, studiò con tal successo sotto i celebri fisici e matematici Regis e Racagni, che appena terminati i suoi studj fu nominato professore di matematica e di fisica, ufficio che con distinzione esercitò pel corso di trent'anni fino al 1810, epoca in cui furon soppressi in Lombardia i barnabiti e tutte le altre corporazioni dedite all'insegnamento, che Giuseppe II aveva lasciato sussistere in Lombardia. Nel 1816 però gli venne conferita una cattedra di teologia, alla quale attendeva ancora quando fu colto dalla morte a Milano il 19 Maggio 1820. Ferrari erasi

dato specialmente allo studio dell' idraulica, e negli anni 1793, 1797 e 1811 pubblicò tre volumi nei quali tratta dell' urto dei fluidi, dal declivio dei fiumi, della contrazione della vena fluida, della distribuzione delle acque, della velocità dell' acqua nei tubi e di altri difficilissimi argomenti.

FERREO o DAL FERRO (Scipione) di Bologna, ove insegnava le matematiche negli anni dal 1496 al 1526, è noto nella storia della scienza per avere il primo risoluto le equazioni del terzo grado. Avendo comunicato la sua scoperta al suo discepolo Antonio Del Fiore, questi, in una di quelle disfide che comuni erano tra i matematici di quel tempo, propose a Niccolò Tartaglia alcuni problemi la cui soluzione dipendeva da equazioni cubiche: tale fu l'occasione nella quale quest' ultimo rivolse la sua attenzione su questo argomento; e il suo studio fu coronato da pieno successo, poichè trovò in breve un metodo più generale di quello del suo competitore, il quale fu vinto nella disfida, avendogli il Tartaglia proposto alla sua volta dei problemi pei quali il di lui metodo non era sufficiente. *Vedi* Algebra *e* Cardano.

FERRONI (Pietro), nato a Firenze il 22 Febbraio 1744, studiò nel Collegio Nazzareno di Roma, ove apprese i primi elementi delle matematiche. Tornato in Toscana, andò a perfezionarsi in tali scienze alla università di Pisa, e vi fece in breve tali progressi, che in età appena di venti anni venne dal granduca Pietro Leopoldo nominato a professarle in quella medesima università. Egualmente profondo nelle astratte teorie e nelle pratiche applicazioni, l'estese sue cognizioni in idraulica, in meccanica e in architettura gli meritarono che affidati gli fossero non pochi onorevoli incarichi tanto sotto il governo dei granduchi quanto sotto il regime francese. Così, per tacere di molte altre incombenze di minor conto, il granduca Pietro Leopoldo lo nominò alla soprintendenza dei fiumi e confini toscani; sotto la dominazione francese fece parte della commissione per lo stabilimento del nuovo sistema di pesi e misure; e il granduca Ferdinando lo elesse uno dei deputati per la formazione del nuovo catasto della Toscana. Conoscendo a fondo la storia della scienza, cercò sempre nei suoi scritti di risalire alla prima origine di ciascuna scoperta, e per accordarne spesse fiate l'onore al vero inventore dovette ferire l'amor proprio di molti, il che gli attirò alcune critiche. Morì a Firenze nei primi del mese di Novembre 1825. Era ascritto a parecchie accademie scientifiche, e in particolare alla Società Italiana dei quaranta, negli *Atti* della quale, al Tom. XXII, si legge il suo *Elogio* scritto dal segretario Antonio Lombardi.

Ecco l'elenco de' principali suoi scritti: I *In Eratosthenis Cyrenaei geometricum epigramma votivum excursio critica*, Livorno, 1810, in-4; II *Theoria exponentialium, logarithmorum et trigonometriae sublimis*, Firenze, 1782-92, 2 vol. in-4; III *Della vera curva degli archi del ponte a Santa Trinita di Firenze*, Verona, 1808, in-4; IV *Prodromo di osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato da Condorcet nel* 1765, memoria inserita nel Tom. V delle Memorie della Società Italiana; V *Lettera al cav. Lorgna sopra diversi aneddoti matematici*, Tom. VII delle Mem. cit.; VI *Paralelli e principio unico e semplice delle due trigonometrie*, Tom. XII delle Mem. cit. VII *Supplemento alla teoria Torricelliana sopra le Coclee*, Tom. XV delle Mem. cit.; VIII *Dimostrazione facile e naturale di alcuni teoremi geometrici ed analitici*, Tom. XVI delle Mem. cit.; IX *Giunta a compimento della teorica del nuovo metodo di Budan per la risoluzione delle equazioni numeriche*, Tom. XX delle Mem. cit. X *Principj della meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza*, Tom. X delle cit. Mem. XI *Sull' uso della logistica nella costruzione degli organi*, Tom. XI delle Mem. cit.; XII *L'equilibrio dei cieli conformati a mezza botte*, Tom. XVIII delle Mem. cit. In que-

st'ultima memoria, il Ferroni ridusse la costruzione delle volte ad un caso unico, semplice e chiaro, pienamente conforme al principio della catenaria, spogliò la teorica delle leggi dell'equilibrio di tutto quell'apparecchio geometrico ed analitico che non essendo rigorosamente necessario ne rende difficile l'intelligenza, e cercò di ristringere ad una sola regola classica la costruzione pratica di qualunque arco, e di ammaestrare gli architetti con acconci metodi grafici approssimativi a tracciar le curve delle volte di qualunque ampiezza, senza aver d'uopo delle formule analitiche, le quali bene spesso riescono di difficile maneggio per chi non fu istituito nei più sublimi arcani della scienza delle quantità.

FERRY (Andrea), minimo, geometra e matematico, dell'Accademia di Amiens e di alcune altre dotte società, nacque a Reims nel 1714 e morì il 5 Settembre 1773. Si dedicò particolarmente allo studio dell'idraulica, ed è a lui dovuto il progetto e la costruzione della macchina per le fontane della città di Reims, macchina che è di una sorprendente semplicità e che forma l'ammirazione di tutti gli stranieri. Le città di Amiens e di Dole vanno pure a lui debitrici delle acque di che godono. I suoi grandi talenti gli fruttarono il grado di primo professore delle scuole di matematiche e di disegno che dietro il suo progetto furono nel 1749 istituite a Reims. Per più ampie particolarità si consulti la *Biografia Universale*.

FIBONACCI (Leonardo), matematico della città di Pisa, viveva verso il principio del XIII secolo. Fu condotto, ancora fanciullo, in Barberia da suo padre: vi studiò quanto colà si sapeva in fatto di scienze, ritornò in patria e il primo fu ad introdurre in Italia l'uso delle cifre, che da noi si chiamano *arabe*, e che egli dice indiane. Ha composto un *Trattato di Aritmetica*, che si conserva manoscritto nella Biblioteca Magliabechiana di Firenze, e di cui l'abate Zaccaria ne' suoi *Excursus literarii* e il dotto Targioni-Tozzetti nella sua *Relazione di alcuni Viaggi* hanno dato dei sunti. Tale trattato è intitolato: *Incipit liber abaci compositus a Leonardo filio Bonacci, pisano, in anno* 1202. Targioni nel suo ristretto ha fatto conoscere molte proposizioni relative alle monete e alle misure usate in Italia nei secoli XII e XIII. Riporta pure una dissertazione sull'origine della nostra aritmetica, nella quale si vede che Fibonacci, quantunque ammetta che gli Arabi togliessero dagl'Indiani i loro caratteri aritmetici ed il loro sistema di numerazione, cita però molte opere latine dell'XI secolo, nelle quali si trovano cifre arabe, le quali, avvicinandosi per la loro forma a quelle di cui noi facciamo uso, somigliano altresì a lettere greche majuscole che state siano un poco alterate. Fibonacci inferisce da ciò che i caratteri statici trasmessi dagli Arabi potrebbero derivarci da' Greci piuttosto che dagl'Indiani. Si conserva ancora nella Biblioteca Magliabechiana un' altra opera manoscritta di Fibonacci intitolata: *Practica Geographiae*, che è stata composta nel 1220, e di cui Targioni ha pure fatto un transunto.

FIGUEIREDO (Emanuele de), matematico portoghese, nato a Torres-Novas nella diocesi di Lisbona verso l'anno 1568, dove con molta reputazione insegnò le matematiche, la cosmografia, l'astronomia e l'arte nautica. Delle molte opere da lui lasciate non citeremo che le seguenti: I *Cronografia*, Lisbona, 1603, in-4; che contiene dei trattati sulla sfera, sulla cosmografia, sulla navigazione, sull'astronomia, ec. II *Pronostico della cometa che comparve il* 15 *Settembre* 1604, ivi, 1605, in-4; III *Trattato pratico di aritmetica composto da Nicolas, corretto e aumentato da Figueiredo*, ivi, 1679, 1716, in-8; IV *Idrografia*, ivi, 1608, 1614, 1625, in-4: tra le altre cose, l'autore esamina in questo trattato l'altezza della stella polare ed i cammini da tenere per andare dal Portogallo al Brasile, a Rio de la Plata, alla Guinea, ec.: V *Strada e navigazione alle Indie occidentali e alle Antille*, ivi, 1603, in-4. Le opere di Figueiredo godettero

di molta voga anco lunga pezza dopo la sua morte, che si crede avvenuta verso l'anno 1630.

FIGURA. Nome che alcune volte vien dato in *aritmetica*, alle cifre semplici 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 della scala numerica.

FIGURA in *geometria*, indica generalmente la forma di una parte dell'estensione, limitata da linee rette o curve, se la figura è una *superficie*; e da superficie piane o curve se essa è un solido.

FIGURA DELLA TERRA (*Geod.*). Da Newton in poi tanto i geometri quanto gli astronomi hanno preso per guida non meno l'esperienza che la teoria nella difficile ricerca della vera figura del globo che noi abitiamo. La storia dei loro lavori in questo proposito dovendo formar l'oggetto di un articolo sufficientemente esteso di questo Dizionario (*Vedi* TERRA), ci basterà di esporre adesso i principali risultati delle ultime operazioni geodetiche che sono state eseguite specialmente in Francia, perchè non lasciano dubbio alcuno sulle irregolarità della terra, quantunque la sua superficie, considerata nel suo insieme, presenti presso a poco la forma d'un' ellissoide di rivoluzione.

1. Una lunga catena di triangoli, che partendo da Greenwich si dirige nel senso medesimo della maridiana di Dunkerque e termina all'isola di Formentera, abbraccia un arco di più di 12 gradi, la cui lunghezza, dopo tutte le correzioni necessarie, è stata recentemente trovata di tese 730532,4. Dividendo quest'arco in quattro parti, i cui punti di divisione siano Dunkerqoe, Panthéon e Montjouy, si ha il seguente prospetto:

STAZIONI	LATITUDINI OSSERVATE	ARCHI MISURATI IN TESE
Greenwich	51° 28′ 40″,00	
		25241^t,9
Dunkerque	51 2 8 ,50	
		124944 ,8
Panthéon	48 50 49 ,37	
		426672 ,1
Montjouy	41 21 46 ,58	
		153673 ,6
Formentera	38 39 56 ,11	
	Arco totale	730532 ,4

Secondo Delambre, quest'arco totale sarebbe soltanto di 730431^t,3; ma questo celebre astronomo ignorava, secondo Puissant, che fosse stato commesso uno sbaglio di 68 tese in meno nel calcolo dell'arco compreso tra i paralleli di Montjouy e di Formentera (*Nouvelle description géométrique de la France*, Tom. II pag. 35). Credè d'altronde che le basi di Melun e di Perpignano, ognuna di circa 12000 metri, non differissero tra loro che di circa un terzo di metro, mentre è ora dimostrato dalla triangolazione generale della Francia che queste due basi presentano una discordanza di 1^m,8, quando ai triangoli della meridiana di Dunkerque, che sono di una forma alquanto insolita, si sostituiscono altri triangoli più proporzionati. Puissant, avendo avuto riguardo a queste due circostanze, ha formato il quadro seguente:

Stazioni	Latitudini osservate	Lunghezza dei gradi		Cangiamento per 1°	Latitudini media
		Secondo Delambre	Corretta		
Greenwich	51° 28′ 40″,00	111284m,5	111284m,5		51° 15′ 24″
Dunkerque	51 2 8,50	111266,0	111266,0	— 14,0	49 56 29
Panthéon	48 50 49,37	111230,5	111238,8	— 11,1	47 30 46
Evaux	46 10 42,54	111051,8	111060,5	— 63,2	44 41 48
Carcassona	43 12 54,30	111018,0	111026,7	— 13,9	42 17 21
Montjouy	41 21 46,58	110991,6	111040,6	+ 5,1	40 0 52
Formentera	38 39 56,11				

Si scorge da questo quadro che l' accorciamento dei gradi, andando dal nord al sud, è ben lungi dall' esser regolare, e che anzi si manifesta un leggero aumento da Montjouy a Formentera, ove Delambre ha notato un'anomalia di circa 4″ nella latitudine (*Base du système métrique*). Ciò non ostante, l'arco intero di sopra indicato, combinato con quello dell'equatore misurato nel 1745 da Bouguer e La Condamine, dà uno schiacciamento di $\frac{1}{304}$ (*Vedi* Rettificazione), che maravigliosamente si accorda con quello che si rileva da una ineguaglianza lunare in latitudine e in longitudine, dipendente dalla intera figura della terra, e scoperta dall' illustre autore della *Meccanica celeste*.

Se adesso si prende la meridiana di Bayeux, situata all' occidente di quella di Dunkerque, essa ci offre i seguenti risultati, estratti egualmente dalla *Nouvelle description géométrique de la France*, tom. II:

Stazioni	Latitudini osservata	Lunghezza dei gradi	Cangiamento per 1°	Latitudini media
Saint-Martin di Chaulieu	48° 44′ 9″,87	111153m,4		48° 6′ 8″
Angers	47 28 6,79	111148,9	— 3,0	46 36 24
La Ferlanderie	45 44 41,04	111182,7	+ 18,1	44 43 42
Torre di Borda	43 42 42,09			
	Arco totale. . .	558529m,2		

Lungo questa linea, i primi due gradi sono sensibilmente eguali; così, in questa parte, lo schiacciamento è presso a poco nullo; ma in seguito, passando al terzo grado, si presenta un cangiamento talmente strano, che la terra sembra essere allungata.

Vediamo finalmente la meridiana di Sedan, misurata parimente dagl'ingegneri geografi. Si hanno questi risultati:

Stazioni	Latitudini osservate	Lunghezza dei gradi	Cangiamento per 1°	Latitudini medie
Longeville	48° 44′ 6″,92			
		111233^m,0		47° 45′ 51″
Bréri	46 47 35 ,94		— 75,0	
		111115 ,3		46 11 34
Montceau	45 35 33 ,00		— 60,4	
		111010 ,8		44 26 41
Marsiglia	43 17 48 ,52			
	Arco totale....	604289^m,7		

Sebbene le lunghezze dei gradi decrescano dal nord al sud ed annunzino un grande schiacciamento, ciò non ostante non stanno punto in armonia coll'ipotesi di un'ellissoide di rivoluzione, poichè il decremento, che dovrebbe esser presso a poco di 18 metri per grado alla nostra latitudine, è invece prima di 75 metri e poi di 60.

2. Quando si confrontano le latitudini osservate in differenti luoghi della Francia con quelle degli stessi luoghi calcolate nell'ipotesi di uno schiacciamento di $\frac{1}{3{\cdot}9}$, come è indicato all'articolo Trigonometria Sferoidica, si osservano delle differenze che non possono derivare interamente nè dall'ipotesi dello schiacciamento nè dagli errori delle osservazioni. Per esempio, a Puits-Berteau, vicino a Bourges, la latitudine astronomica di quel punto e la sua latitudine geodetica sono identiche: ma al segnale di La Ferlanderie, in vicinanza di Saintes, la latitudine geodetica supera di 3″,8 la latitudine astronomica. A Évaux, la differenza di queste due latitudini è di 6″,9 e in senso contrario. Alla Torre di Borda, vicino a Dax, le due determinazioni astronomica e geodetica si accordano nuovamente tra loro. Finalmente, nella maggior parte dei luoghi ove si è osservata e determinata l'altezza del polo, esistono delle anomalie che non saprebbero attribuirsi che alla deviazione del filo a piombo prodotta o dall'attrazione di qualche montagna, o dall'essere la densità del terreno in vicinanza della stazione maggiore o minore della densità generale della crosta terrestre. Così è incontrastabile che la figura della terra, in tutta la parte del territorio francese, esplorata geodeticamente, è irregolare; fatto che deve meritare tutta l'attenzione dei geologi.

Altri esempj anco più notabili dell'effetto delle attrazioni locali si presentano in altre contrade dell'Europa. Infatti, in Inghilterra, il capitano Mudge trovò a Cliston che la deviazione era di 10″. In Italia, Plana scoperse, alcuni anni sono, un'anomalia di 47″,8 nella piccola amplitudine celeste di 1° 7′ 27″ che separa Andrate da Mondovì.

3. Le misure degli archi di meridiano non sono le sole atte alla determinazione della figura della terra: esse si combinano vantaggiosamente colle misure degli archi di paralleli, quando queste sono accompagnate da buone osservazioni di longitudini (*Vedi* RETTIFICAZIONE). Il metodo che in questo caso si adotta preferibilmente ai fenomeni degli ecclissi dei satelliti di Giove, delle occultazioni delle stelle prodotte dalla luna, ec., è quello dei segnali di notte fatti per mezzo dell' infiammazione della polvere da cannone; perchè la loro apparizione subita e istantanea nelle stazioni di cui vuol conoscersi la differenza della longitudine, avendo luogo in un medesimo istante fisico, a motivo della prodigiosa velocità colla quale si propaga la luce, ne risulta che se è perfettamente noto il tempo assoluto in ognuna di tali stazioni, la differenza delle ore delle osservazioni sarà quella dei meridiani. Ma disgraziatamente un errore di un mezzo secondo di tempo nel resultato ne produce uno di 7 secondi e mezzo di grado nell' amplitudine misurata, il che rende la misura delle longitudini per piccole distanze un'operazione estremamente delicata, e molto meno suscettibile di precisione della determinazione delle latitudini, che può èsser resa quasi indipendente dal tempo. Ciò non ostante, questo metodo dei fuochi, provato fino dal 1740 da Cassini di Thury e da La Caille, ha avuto, pochi anni sono, un pieno successo in Francia e in Italia pel concorso simultaneo d' ingegneri geografi francesi e di dotti italiani. Eccone i risultati secondo Puissant.

L' arco di parallelo, alla latitudine di 45° 43′ 12″, compreso tra l' Oceano e il mare Adriatico, è di 1210673^{m},9; la sua amplitudine astronomica è di 1^{or} 2′ 9″,78. Quest' arco si compone di sette parti che, sottoposte alla regola dei minimi quadrati, danno pel grado medio 77897^{m},8. Quello del meridiano, dedotto dalla distanza di sopra indicata da Greenwich a Formentera, è di 111131^{m},23, alla latitudine media di 45° 4′ 18″; e la combinazione di questi due gradi, fatta per mezzo di un calcolo noto, dà uno schiacciamento di $\frac{1}{247}$, cioè quello dell'*ellissoide osculatrice* in Francia.

4. Le lunghezze del pendolo a secondi, sebbene meno influenzate di quelle dei gradi del meridiano dalle cause perturbatrici della regolarità della terra, sono non ostante soggette ad anomalie che svelano queste cause quando agiscono con una certa energia. Questa verità emerge dal confronto delle osservazioni fatte in diversi luoghi; e, per citare un fatto in appoggio, diremo, dietro il capitano Sabine, che l' accelerazione del pendolo si manifesta generalmente sui terreni vulcanici, e il ritardo sui terreni sabbiosi e argillosi (*Bulletin de la Société de Géographie*, n.^{o} 50, pag. 247). Nulladimeno, facendo una scelta delle migliori osservazioni raccolte fino al presente, e trattando le lunghezze del pendolo che se ne ottengono col metodo dei minimi quadrati, onde attenuare per quanto è possibile gli errori di osservazione, Mathieu trovò che prendendo per unità la lunghezza del pendolo all' equatore, valutata secondo lui a 0^{m},99102557, il suo aumento, da questo circolo fino al polo, è eguale al prodotto di 54 diecimillesimi pel quadrato del seno della latitudine, vale a dire che in generale si ha

$$l = 1 + 0{,}0054 \operatorname{sen}^2 \lambda,$$

valore corrispondente ad uno schiacciamento di $\frac{1}{305}$. *Vedi* PENDOLO COMPOSTO.

Altri dotti, che dal canto loro hanno discusso un maggior numero di nuove osservazioni, hanno trovato uno schiacciamento di $\frac{1}{282}$. Su questo argomento si

può consultare un articolo interessantissimo del *Ballettino Scientifico* di Férussac, tom. VII, pag. 32, e un' eccellente memoria di Baily inserita nelle *Transazioni filosofiche* del 1832.

L' aumento delle lunghezze del pendolo dall' equatore al polo è sensibile anco nei diversi punti della meridiana di Francia, dietro le numerose osservazioni fatte con un apparecchio di Borda da Arago, Biot e Mathieu, e di cui ecco i risultati dedotti mediante il calcolo più rigoroso:

Stazioni	Latitudini	Altezza assoluta	Lunghezza del pendolo a secondi di tempo medio
Formentera	38° 40′	196^m	0^m,992976
Bordeaux	44 50	0	0 ,993453
Parigi	48 50	65	0 ,993849
Dunkerque	51 2	0	0 ,994080

Queste lunghezze sono ridotte al vuoto e al livello del mare. Sarebbe facile il concluderne, per mezzo dell' interpolazione, la lunghezza del pendolo a secondi sulle coste di Francia a 45 gradi di latitudine. Questa e l' arco del grado del meridiano, il cui mezzo corrisponda alla stessa latitudine, serviranno, dice Laplace, a ritrovare le nostre misure, se coll' andare del tempo venissero esse ad alterarsi (*Exposition du Système du Monde*).

FIGURATI (*Scienza dei numeri*). Si chiamano *numeri figurati*, delle serie di di numeri che formano delle progressioni aritmetiche di diversi ordini, derivate le une dall' altre per mezzo di una legge costante.

Sia: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ec., la serie dei numeri naturali. Se si aggiungono insieme i termini di questa serie dal primo fino ad un termine qualunque, ne risulteranno i numeri 1, 3, 6, 10, 15, 21, ec., che sono i *numeri figurati del second' ordine*, che si chiamano ancora *numeri triangolari*.

Aggiungendo egualmente i termini di quest' ultima serie, ne resulterà la serie 1, 4, 10, 20, 35, 56, ec. che sono *i numeri figurati dell' terz' ordine*; questi si chiamano ancora *numeri piramidali*.

Delle nuove addizioni dei termini di quest' ultima serie daranno i numeri, 1, 5, 15, 35, 70, 126, ec. che sono *i numeri figurati del quart' ordine*.

Continuando nella medesima maniera per gli ordini superiori e disponendo queste serie per colonne verticali, formeremo il seguente quadro.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9
3	6	10	15	21	28	36	45
4	10	20	35	56	84	120	165
5	15	35	70	126	210	330	495
6	21	56	126	252	462	792	1287
7	28	84	210	462	924	1716	3003
8	36	120	330	792	1716	3432	6435
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310

che possiamo prolungare a piacere. I nomi dei numeri triangolari e dei numeri piramidali, dati ai numeri figurati degli ordini secondo e terzo, riposano sopra considerazioni geometriche al giorno d'oggi insignificanti.

Queste serie, nelle quali il termine generale di ciascuna è la medesima cosa del termine sommatorio di quella che la precede, hanno molto occupato i primi algebristi, perchè esse gli davano il mezzo di formare facilmente le potenze successive di un binomio. Infatti se esaminiamo la formazione di queste potenze

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

ec. ec.

si riconosce facilmente che i coefficienti numerici dei secondi termini; sono numeri figurati del prim' ordine, o i numeri naturali; che quelli dei terzi termini sono numeri figurati del terz' ordine, e così di seguito, dimodochè disponendo questi numeri in forma di triangolo, come segue:

I	II	III	IV	V	VII	VII	VIII	IX	X
1									
2	1								
3	3	1							
4	6	4	1						
5	10	10	5	1					
6	15	20	15	6	1				
7	21	35	35	21	7	1			
8	28	56	90	56	28	8	1		
9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

si trovano immediatamente i coefficienti numerici di una potenza del binomio, prendendo i numeri situati nella colonna orizzontale, il cui primo numero è l'esponente di questa potenza. Ma dopo la scoperta dello sviluppo generale dato dalla formula del Newton, tutte queste considerazioni hanno poca importanza. Vedremo alla parola Progressione aritmetica e alla parola Sommatorio, come si ottiene *il termine generale* di ciascuna serie di numeri figurati.

FILOLAO di CROTONE, antico filosofo, viveva circa quattrocentocinquanta anni avanti l'era cristiana. Studiò sotto Pitagora, quando questi era già vecchio, e poscia sotto Archita di Taranto. Essendo stati i Pitagorici cacciati d'Elide, Filolao riparò prima a Metaponto, indi in Eraclea. Colà compose tre libri sulla fisica, dei quali Platone faceva tanto conto, che secondo Diogene Laerzio gli comprò da' suoi eredi per l'enorme prezzo di diecimila danari o cento mine. Secondo Filolao, il sole era un disco di vetro, il quale a guisa di uno specchio mandava la luce e il calore del *fuoco del mondo*. Faceva girare la terra intorno al sole al pari di Mercurio e di Venere, dava ventinove giorni e mezzo al mese lunare, trecentocinquantaquattro all'anno lunare, e trecentosessantaquattro e mezzo all'anno solare. Sembra che sia stato il primo tra i discepoli di Pitagora che abbia pubblicamente insegnato il moto annuo della terra; ed è per questa ragione che Boulliaud ha dato il titolo di *Astronomia filolaica* al suo trattato degli astri scritto secondo questo sistema. Quest'ultimo aveva precedentemente pubblicato sotto il nome di Filolao medesimo una dissertazione latina in quattro libri per dimostrare la verità di tale ipotesi.

FILONE di BISANZIO, meccanico del II secolo avanti Gesù Cristo, era contemporaneo di Ctesibio e di Erone l'antico, da cui può congetturarsi che ricevesse lezioni, poichè ei fa sapere ch'ei dimorò alcun tempo in Alessandria per perfezionarsi nello studio della meccanica. Era versatissimo nella geometria, a quanto può giudicarsi dalla sua soluzione del problema delle due medie proporzionali, la quale, sebbene nel fondo sia la stessa di quella di Apollonio, non cessa di avere il suo merito nella pratica. Montucla gli attribuisce un *Trattato di mec-*

canica, di cui l' oggetto era pressochè lo stesso che quello di Erone, e che è conosciuto unicamente per le citazioni di Pappo. È ancora autore di un trattato di *Poliorcetica*, di cui non ci rimangono che i libri quarto e quinto, che sono stati inseriti insieme ad una versione latina nella collezione intitolata: *Veterum mathematicorum opera*, Parigi, 1693, in-fol. Nel primo tratta della fabbricazione dei dardi, delle baliste, delle catapulte e di differenti macchine da guerra, delle quali alcune erano di sua invenzione: vi descrive pure di volo, ma con molta precisione, una specie di catapulta inventata da Ctesibio che aveva molta relazione col nostro fucile a vento. Nel libro seguente tratta della maniera di fortificare e approvvisionare le piazze di guerra. La perdita però di tale trattato non è di grave danno, da che ci rimangono le opere di Vegezio e di Ateneo che appieno ci fanno conoscere la tattica degli antichi. Altre notizie e più estese indicazioni intorno a questo meccanico ed ai suoi scritti si rinvengono nella *Biografia Universale*.

FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE. Esporre la deduzione *a priori* di tutti i principj delle matematiche, delle loro differenti parti, delle leggi fondamentali che le regolano, spiegare i fenomeni intellettuali che esse presentano, dimostrare la necessità di questi fenomeni, introdurre finalmente l'unità sistematica in queste scienze sublimi, dando loro per base della certezza che le caratterizza una certezza superiore ed assoluta, tale è l'oggetto della *filosofia delle matematiche*.

Ma per poter conseguire uno scopo così elevato, è indispensabile che la FILOSOFIA si elevi essa medesima al grado di scienza, e che venga dimostrato che basata sopra fondamenti ormai inconcussi essa può finalmente dirsi LA LEGISLATRICE DELLA UMANA RAGIONE. Pure, se si dà uno sguardo critico ai diversi sistemi che anco ai dì nostri pretendono di usurpare in Francia il fastoso nome di filosofia, vedesi ben presto che lungi dal poter somministrare il vero fondamento delle matematiche, niuno ve ne ha che sia capace di elevarsi al grado di certezza che hanno queste scienze. Forse al cieco *materialismo*, che si serve dell'intelligenza per negare l'intelligenza medesima, che soffoca la spontaneità della ragione sotto l'oppressione dei sensi, e che divinizza il caso, domanderemo noi la soluzione di tanti e sì grandi problemi? Ovvero, senza soffermarci a questo sistema imbecille che nulla spiega, ci rivolgeremo noi al *sensualismo*, di cui l'altro non è che una grossolana conseguenza, per ottenere qualche raggio di luce? Ecco la sua risposta.

» L' algebra è una *lingua* ben fatta, ed è la sola che sia tale: nulla in essa è » arbitrario, l'analogia che mai vi si perde di vista conduce sensibilmente di » espressione in espressione. L' uso non vi ha autorità niuna. Non si tratta di » parlare come gli altri, bisogna parlare secondo la più rigorosa analogia per » giungere alla più rigorosa precisione; e quelli che hanno fatto questa *lingua* » hanno ben compreso che la semplicità dello stile ne costituisce tutta l'eleganza, » verità che poco si conosce nelle nostre lingue volgari.

» Dacchè l'algebra è una lingua formata dall' analogia, l' analogia che forma » la lingua forma altresì i metodi; o piuttosto il metodo d' invenzione è l' ana» logia medesima.

» L' analogia: ecco dunque a che si riduce tutta l' arte di ragionare, come » tutta l' arte di parlare; in questa sola parola noi vediamo come possiamo » istruirci delle scoperte degli altri, e come possiamo farne noi medesimi. — Ora » una scienza ben trattata non è che una lingua ben fatta.

» Le matematiche sono una scienza ben trattata, la cui lingua è l' algebra. » Vediamo dunque come l' analogia ci faccia parlare in questa scienza, e sapremo » allora come essa debba farci parlare nelle altre » (Condillac, *Lingua dei Calcoli*.)

Che cosa è dunque questa *analogia* prodigiosa, eretta in criterio della verità? Qual posto occupa essa tra le funzioni dell'intelligenza? Su qual principio riposa la certezza de'suoi metodi? Ecco le questioni preliminari che dovevano trattarsi: perchè, avendo per iscopo di spiegare non solo le matematiche, ma ancora di ridurre tutte le altre scienze al loro grado di esattezza, l'autore avrebbe dovuto cominciare dal provare la potenza dell'*analogia*, che doveva operare sì belle cose, e che ha finito col produrre cattivi elementi di aritmetica e di algebra. Nulladimeno al libro solo ed insignificante della *Lingua dei Calcoli* si riducono tutti i tentativi della scuola di Locke sulla filosofia delle scienze.

Se, disgustati del *sensualismo* e delle sue interminabili dissertazioni sulle lingue, noi volgiamo gli sguardi verso altri sistemi se non più nuovi almeno prodotti più recentemente, andremo noi a domandare la filosofia delle matematiche alla *psicologia trascendente*, che dicesi scuola francese, o al *panteismo* dei Sansimoniani, ovvero a quella dottrina scozzese, per la quale un direttore della pubblica istruzione voleva che si ereassero delle cattedre nei nostri collegi? Senza dubbio la psicologia trascendente e il moderno panteismo non hanno nulla che fare in questioni puramente scientifiche, e quanto alla dottrina scozzese, che non è anch'essa che il *sensualismo* condotto all'ultimo suo sviluppo, Reid c'insegna, tra le altre cose maravigliose, che se l'uomo fosse ridotto al solo senso della vista, non potrebbe conoscere che l'estensione a due dimensioni, ossia la semplice superficie, e prenderebbe per linee rette gli archi dei circoli massimi descritti sopra una superficie sferica nel centro della quale fosse situato il suo occhio. I triangoli che esso considererebbe come rettilinei potrebbero avere due ed anco tre angoli retti o ottusi. Così la geometria di un tal uomo sarebbe affatto diversa dalla nostra: due di quelle linee ch'ei prenderebbe per rette incontrandosi per esempio sempre in due punti, la nozione di due rette parallele sarebbe per conseguenza contradittoria per lui.

In mezzo a tante aberrazioni intellettuali, dobbiamo dunque disperare della filosofia? Non potrà essa adempiere giammai alla nobile missione che le è imposta di giungere finalmente al posto supremo che le è destinato tra le scienze, e senza il quale essa non è che una nozione vana e spregevole? All'aspetto di un numero sì grande d'inutili tentativi, quando sembra che lo spirito umano non abbia fatto, dalla più remota antichità, che aggirarsi in un campo di errori, il dubbio è tanto naturale, che l'indifferenza del pubblico francese per tutte le grandi questioni filosofiche non dovrebbe farci maraviglia. Eppure, da un mezzo secolo una rivoluzione inaspettata, immensa, si è operata nella provincia del sapere; una nuova via si è aperta! Nell'tempo in cui lo scoraggiamento impadronivasi dei pensatori più profondi, si è alzato un uomo che con una mano ferma e sicura ha portato lo scalpello dell'analisi nelle facoltà dell'intelligenza, le ha circoscritte nel campo della loro azione, ha segnato i limiti loro, ha determinato le loro leggi, e nuovo Copernico ha gridato alla moltitudine stupefatta: la ragione umana è caduta in tutte le illusioni inconciliabili che formano la sua disperazione per aver trasportato fuori di sè medesima ciò che non è altrove che in lei. La voce potente di quest'uomo non ha ancora trovato eco in Francia, e in questo momento, in cui ha cominciato per lui la posterità, quando il nome immortale di Emanuele Kant non è pronunziato che con rispetto in tutto il nord dell'Europa, appena qualche timida protesta osa elevarsi contro le false idee che alcuni sembrano essersi compiaciuti di spargere sulla sua dottrina e su tutti i lavori di cui è essa la base o il punto di partenza.

Così, mentre la Francia, abbandonata alle sterile logomachia dei discepoli di Condillac, precipitavasi nell'arena perigliosa delle riforme politiche, in cui priva di principj superiori essa non poteva procedere che di esperienza in esperienza,

pagando i suoi esperimenti col suo sangue e co' suoi tesori, la Germania compieva una riforma onninamente pacifica, i cui resultati dovevano essere assai più importanti. Kant aveva prodotto la sua Filosofia Trascendentale. La fisica, il diritto, la morale, la pedagogia, ricevevano da quell'uomo sommo i loro principj metafisici e fondamentali. I suoi emuli, i Fichte, gli Schelling, gli Hegel, eransi lanciati in regioni superiori. Il vero problema della filosofia, la Certezza assoluta, era proposto e studiato in tutti i suoi aspetti; l'Assoluto stesso, questo principio incondizionale di ogni realtà, veniva riconosciuto e additato nella coscienza trascendente dell'uomo; finalmente, la tendenza dell'umanità verso questo scopo supremo dell'intelligenza era stabilita in un modo positivo.

Tutti questi grandi lavori rimanevano del tutto ignorati in Francia, e il nome di Kant vi era appena conosciuto per l'opere di Villers (*Principes fondamentaux de la philosophie trascendentale*), quando il sig. Wronski pubblicò, nel 1811, la sua *Introduzione alla filosofia delle matematiche*, che allora ei si contentò di presentare come un'applicazione della filosofia di Kant. Se la memoria non c'inganna, il risultato immediato di questa pubblicazione fu il ritiro di una pensione che l'autore riceveva dalla Russia! I geometri non fecero a questa produzione così importante un'accoglienza più lusinghiera di quella dell'ambasciatore russo; pretesero che essa fosse inintelligibile, il che era vero in un certo senso, e di qui cominciò quella lunga lotta che si elevò tra l'autore e l'Istituto di Francia, lotta nella quale il sig. Wronski abusò forse un poco troppo della sua superiorità.

Per comprendere perfettamente l'*Introduzione alla filosofia delle matematiche*, era senza dubbio essenziale il conoscere i principj filosofici che le servono di base, e che l'autore non ha ancora rivelati. Ma, anco senza risalire all'*assoluto*, al quale questi principj sembrano naturalmente connettersi, potevansi non ostante, per mezzo delle semplici nozioni della filosofia trascendentale, comprendere abbastanza tutte le parti del magnifico sistema che vi è presentato, per potere abbracciarlo nel suo insieme ed ammirare l'unità che apporta nelle matematiche, unità che invano si tenterebbe d'introdurvi con ogni altro mezzo. Non dubitiamo punto che se all'epoca della sua apparizione le idee della scuola alemanna fossero state più diffuse, la sorte di quell'opera non sarebbe stata la stessa: Il silenzio forzato o di convenzione dei geometri non avrebbe almeno potuto, per venti anni, condannarla all'oblio, e noi non saremmo i primi a proclamare al mondo, in un'opera consacrata alle matematiche, l'importanza di una dottrina il cui ultimo risultato altro non è che la legge universale che regola queste scienze.

Già parecchie volte, nel corso del nostro Dizionario, abbiamo cercato di far conoscere la nuova direzione che questa filosofia è venuta ad imprimere alle scienze matematiche, che ad onta di tutti i lavori dei geometri non offrivano prima di essa che un complesso di parti senza legame sistematico. Si è potuto paragonare l'edifizio regolare che essa ha inalzato col caos inestricabile che risolta dalle pretensioni metafisiche dei matematici materialisti, pretensioni che tendono non solo a comprimere lo slancio della ragione verso le regioni superiori del sapere, ma che inoltre avisano interamente la natura delle parti trascendenti della scienza dei numeri, di quella scienza per eccellenza che abbraccia in ultimo luogo le matematiche. I quadri che successivamente daremo (*Vedi* Matematiche) presenteranno l'insieme sistematico compiuto e perfetto dell'algebra, è per la deduzione delle parti che lo compongono seguiremo scrupolosamente l'ordine stabilito nell'*Introduzione alla filosofia delle matematiche*. Qui dunque basterebbe, per dare a tale deduzione la necessaria certezza filosofica, di spiegare come essa risulti *a priori* dall'applicazione delle leggi dell'intelligenza all'oggetto gene-

rale della scienza dei numeri: tale impresa però è al di sopra delle nostre forze. Per compierla rigorosamente, essa esigerebbe in ogni sua parte una cognizione profonda della *dottrina assoluta* che ha condotto il sig. Wronski a tutte le sue scoperte; dottrina di cui disgraziatamente non conosciamo che pochi risultati, i più grandi per verità e i più profondi di tutti quelli ai quali fino a questo giorno abbia potuto giungere l'umano ingegno (Vedi il *Prodrome du Messianisme*, Parigi, 1831, presso Treuttel e Würtz), ma che alla nostra debole intelligenza non lasciano che intravedere il campo sconosciuto delle verità che gli ha prodotti. Ciò non ostante, noi sappiamo che i nostri lettori attendono con impazienza un saggio di questa teoria delle matematiche, i cui punti principali da noi fin qui accennati hanno in molti di essi risvegliato un'ammirazione che ci è stata ripetutamente espressa; e se non possiamo corrispondere come lo desidereremmo in un modo interamente soddisfacente a questa espettativa, essa però c'impone l'obbligo di tentare di schiarire, per quanto è in nostro potere, se non i principj filosofici stessi, almeno i risultati puramente matematici che ne derivano. Cominceremo dunque dallo stabilire alcune delle nozioni fondamentali della filosofia trascendentale e dal dare la spiegazione dei termini ormai adottati in questa filosofia. Ci sarebbe impossibile il farci intendere senza questo lavoro preliminare.

1. Qualunque cognizione suppone necessariamente due elementi distinti: 1.° una *facoltà* nella quale la cognizione stessa si produca; 2.° l'*oggetto* a cui essa si riferisca. Questa facoltà, parte essenziale della mente umana, è ciò che adesso c'interessa di esaminare. Noi la chiameremo Intelligenza.

2. Per determinare la natura di questa *intelligenza*, bisogna ricercare prima di tutto in qual modo giunga al nostro spirito ciò che noi chiamiamo *cognizione*.

Primieramente, gli *oggetti* agiscono immediatamente sopra di noi, e dalla loro azione immediata resultano in noi delle *intuizioni*, che sono altrettante rappresentazioni o immagini delle tali e tali cose.

In secondo luogo, noi uniamo insieme alcune di queste intuizioni, le coordiniamo, e stabiliamo tra loro certi rapporti o certi legami, che non sono contenuti nell'impressione semplice e immediata degli oggetti.

Questi due differenti modi di acquistare delle cognizioni ci dimostrano ad evidenza che la intelligenza ha due funzioni essenzialmente differenti, vale a dire che essa si divide in due facoltà, che senza dubbio sono unite tra loro nel modo il più intimo, ma che c'interessa sommamente di distinguere e di considerare separatamente.

3. Così, noi possediamo originariamente in noi stessi: 1.° la facoltà di ricevere delle impressioni immediate dagli oggetti sensibili, e questa facoltà tutta *passiva* si chiama Sensibilità; 2.° la facoltà di unire insieme e coordinare queste impressioni diverse, e questa facoltà, che è *attiva*, si chiama Intelletto.

Per esempio, l'impressione semplice che fa sopra di noi un oggetto qualunque, un albero, per esempio, senza che a tale effetto noi abbiamo bisogno di unire le impressioni parziali di rami, di foglie, di frutti ec., nè di riferirle alla percezione generale di *albero*, il che già esigerebbe l'azione della facoltà attiva, questa impressione semplice ed immediata noi la dobbiamo alla *sensibilità*; mentre, all'opposto, se paragoniamo insieme due alberi, e consideriamo uno di essi come più grande dell'altro, questo rapporto di grandezza che noi istituiamo tra questi oggetti è l'opera dell'*intelletto*.

4. La facoltà passiva è necessariamente semplice, poichè è destinata unicamente a ricevere, ma la facoltà attiva ci presenta più modi di azione, che ci permettono di suddividerla in più facoltà. 1.° Noi uniamo alcune di quelle percezioni immediate che ci vengono somministrate dalla sensibilità, e le riferiamo ad una

concezione sola, vale a dire le classiamo sotto una percezione generica o comune a più cose. Per esempio, la percezione generale o concezione di *diamante* comprende in sè stessa la percezioni più particolari di *bianchezza*, di *lucentezza*, di *trasparenza*, di *durezza*, e finalmente di tutte le qualità che caratterizzano il diamante: così, per acquistare questa percezione generale, è stato necessario riunire tutte le percezioni particolari in una sola, ciocchè non può essere che l'opera della facoltà attiva. 2.° Noi riuniamo diverse concezioni in una *concezione universale*, per dedurne, come da un *principio*, delle conseguenze particolari. La facoltà mediante la quale noi formiamo della *concezioni individuali* si appella Intendimento. La facoltà delle *concezioni universali* si chiama Ragione.

5. Ma poichè noi possiamo elevarci dalle concezioni individuali dell'*intendimento* alle concezioni universali della *ragione*, e tornar di nuovo da queste a quelle, dunque abbiamo pure una terza facoltà intermedia che serve ad operare la transizione dall'una all'altra di queste facoltà. Questa terza facoltà si chiama Giudizio.

L'intelletto umano dunque è una facoltà tripla che si compone dell'*intendimento*, della *ragione* e del *giudizio*.

6. Dietro quanto abbiamo detto, si vede che tutte le nostre cognizioni cominciano da intuizioni o percezioni particolari, che in seguito divengono percezioni generali o concezioni individuali per l'azione dell'intendimento, e che finalmente si elevano al grado di concezioni universali per l'azione della ragione. Così l'intendimento riceve dalla sensibilità la materia delle sue percezioni, come la ragione prende dall'intendimento la materia delle sue concezioni.

Affinchè queste diverse facoltà siano messe in azione, è indispensabile che gli oggetti agiscano sulla nostra sensibilità, poichè le impressioni che essa ne riceve sono i soli materiali primitivi sui quali l'intendimento e la ragione possano esercitarsi; ma bisogna ben guardarsi dal seguire la scuola di Locke, e dal concluderne con essa che queste facoltà stesse debbano la loro origine alle impressioni immediate degli oggetti materiali; poichè, all'effetto che queste ultime abbiano luogo, bisogna che precendentemente si trovi in noi una facoltà propria a riceverle. Così, l'acqua di cui s'imbeve una spugna, la luce che penetra il vetro in tutta la sua sostanza, suppongono nella spugna e nel vetro una facoltà passiva, una disposizione anteriore a lasciarsi penetrare dall'acqua e dalla luce; disposizione la cui preesistenza è così necessaria, che, senza di essa, l'ascensione del liquido nella spugna e il passaggio della luce a traverso del vetro sono egualmente impossibili e nel fatto e nella supposizione. Questa verità indubitata, in quanto alla sensibilità che è una facoltà passiva, si fa anco meglio sentire rapporto all'intendimento e alla ragione che sono facoltà attive.

7. Oltre queste grandi facoltà fondamentali nelle quali si suddivide la *facoltà intelligente*, ve ne sono parecchie altre che noi dobbiamo indicare per rendere completo il quadro psicologico di questa nostra facoltà di conoscere. Abbiamo detto (4) che l'*intendimento* univa insieme le percezioni della sensibilità per comporne una percezione generale; ora è chiaro che questa unione non può effettuarsi che mediante una facoltà che avvicini le diverse percezioni parziali appartenenti ad un oggetto sensibile; poichè, senza questo avvicinamento, le percezioni parziali non potrebbero mai venir considerate come appartenenti tutte insieme alla percezione di un tutto, e per conseguenza non potrebbero mai comporre un'unità, che è quanto dire non potrebbero mai formare una percezione generale. Questa facoltà intermedia tra la sensibilità e l'intendimento è l'Immaginazione.

8. Ma per quanto rapidamente si faccia questa unione di parti, ciò non ostante non può effettuarsi in un solo istante; essa deve esser successiva. Qualunque sia

la prontezza che uno abbia acquistata mediante l'abitudine di collegare insieme le sue percezioni, nulladimeno è assolutamente impossibile di riferire alla concezione completa di un sol tutto tutte le differenti parti che lo compongono, senza percorrere successivamente tutte queste parti: bisogna dunque, a misura che si passa da una percezione ad un'altra, che ogni percezione precedente si riproduca continuamente nell' intendimento, affinchè si possa in ultimo afferrare in una sola concezione la serie intera delle percezioni che vengono somministrate dalla considerazione successiva delle parti. La facoltà che opera questa riproduzione è la MEMORIA.

Generalmente la *memoria* si comprende nella *immaginazione* sotto il nome di *immaginazione riproduttiva*.

9. Il lavoro della memoria riuscirebbe anch'esso inutile se, ad ogni riproduzione dalle percezioni precedenti, non fossimo internamente convinti che ciò che vien riprodotto è precisamente quello che fin da principio aveva prodotto la nostra immaginazione. A questo oggetto si rende dunque necessaria anche un'altra facoltà, e questa facoltà si chiama COSCIENZA.

Noi dobbiamo far qui osservare che la *coscianza* non è una semplice facoltà dell' intelligenza, essa è propriamente la base dell' *io* interno, principio indispensabile, senza il quale l' uomo non esisterebbe per sè stesso. Infatti, è unicamente in forza della coscienza che l' uomo ha di sè stesso che l'*io* si distingue da tutti gli oggetti coi quali si trova in relazione. È in forza della sua coscianza che l' uomo conosce che, in mezzo alla infinita varietà di modificazioni cui va continuamente soggetto, egli rimane costantemente e invariabilmente lo stesso. Senza la coscienza, l' *io* non sarebbe possibile; come pure nessuna cognizione sarebbe possibile per l' *io*, se essa non si manifestasse alla sua coscianza.

La classificazione delle diverse facoltà che compongono la *facoltà intelligente* ossia l' *intelligenza* dovendo formare il nostro punto di partenza, la riepilogheremo nel quadro seguente, unendovi le funzioni particolari che eseguiscono ciascuna delle facoltà attive nel tempo della loro azione.

Facoltà di conoscere. = *Intelligenza.*

- **Poli opposti.**
  - **Intelligenza passiva.** — ***Sensibilità*** —
    Facoltà delle intuizioni o percezioni particolari.
  - **Intelligenza attiva.** — ***Intelletto*** —
    - **Poli opposti.**
      - **Facoltà delle concezioni individuali.** ***Intendimento.***
        - Funzione istrumentale. *Comparazione.*
        - Funzioni finali.
          - *Percezioni.*
          - *Proposizioni.*
      - **Facoltà delle concezioni universali.** ***Ragione.***
        - Funzione istrumentale. *Deduzione.*
        - Funzioni finali.
          - *Principj.*
          - *Conseguenze.*
    - **Facoltà intermedia che serve a riunire le due facoltà opposte, o ad operare la transizione dall' una all' altra.** ***Giudizio.***
      - Funzione di neutralizzazione dell' intendimento e della ragione. *Giudizio Subsontivo.*
      - Funzione di transizione tra l' intendimento e la ragione. *Giudizio riflessivo.*
        - Transizione dall' intendimento alla ragione o dai fatti alle leggi. *Induzione.*
        - Transizione dalla ragione all' intendimento o dalle leggi ai fatti. *Analogia.*
- **Anticipazione sull' attività intellettuale, o transizione tra la sensibilità e l' intelletto.** —***Immaginazione*** —
  Questa facoltà comprende la *memoria*, e si chiama allora *immaginazione riproduttiva*, mentre si chiama *immaginazione produttiva* quando si considera nella sua funzione di associare le idee.

10. *Da* ciò che precede ad evidenza resulta che due sono le sorgenti principali da cui emana ogni nostra cognizione. La prima consiste in quelle facoltà originariamente inerenti al nostro essere, delle quali abbiamo adesso riconosciuta l'esistenza, e alle quali si può dare il nome d' *intelligenza pura*, perchè esiste in noi anteriormente e indipendentemente da qualunque impressione degli oggetti materiali. La seconda è l'*esperienza*, resultato dell' applicazione della nostra intelligenza agli oggetti.

Da queste due diverse sorgenti emanano naturalmente due diverse specie di cognizioni: l' una originaria e *primitiva*, che ricaviamo in noi stessi dopo che l'esperienza ha messo in azione la nostra facoltà di conoscere; l'altra *derivata* e somministrata dall' esperienza colla quale è intimamente connessa, sebbene non si acquisti, al pari della prima, che mediante l' intelligenza pura. Queste due specie di cognizioni si chiamano, la prima *cognizione pura*, l'altra *cognizione d' esperienza*, o *cognizione empirica*.

11. Sebbene non si dubiti che l' esperienza sia il veicolo che pone per la prima volta in azione le facoltà della nostra intelligenza, e che qualunque specie di cognizione, sia pura, sia empirica, non possa da noi acquistarsi precedentemente alla esperienza, non bisogna cadere nell' illusione di riferire a questa come all' unica sua sorgente la cognizione tutta intera: poichè è evidente che, una volta messa in azione, l' intelligenza può produrre degli atti di cognizione senza il soccorso dell' esperienza; e di più, senza la cognizione pura, l' acquisto della cognizione empirica sarebbe assolutamente impossibile per noi, poichè questa riconosce unicamente dalla prima il seguito, l'ordine, il concatenamento, cose tutte che si richiedono essenzialmente per formare ciò che si dice cognizione, e senza le quali non potrebbe essa nè esistere nè esser concepita. Per conoscere, bisogna necessariamente concepire, vale a dire riunire in un sol tutto diverse percezioni; ora, questa riunione è un atto della nostra mente che non è dovuto all'esperienza, ma può soltanto venire effettuato in forza di un agente anteriore all' esperienza, cioè in forza della intelligenza ossia della facoltà di conoscere, che risiede originariamente in noi. Questa riunione, questo concatenamento di percezioni diverse ha dunque luogo in noi stessi, i modi di questa riunione sono dunque in noi, e non è già nelle cose dovute all' esperienza, ma in noi soltanto, che bisogna cercarli e seguirne le tracce. In conseguenza, la cognizione che noi acquistiamo di tali modi o maniere di concepire o di riunire insieme più percezioni non può in verun modo emanare dall'esperienza. Essa è dovuta unicamente a quel fondo che esiste originariamente in noi, cioè alla intelligenza sviluppata per occasione della esperienza. Essa è dunque una cognizione *primitiva* e *pura*.

12. Ogni cognizione di esperienza è dunque il resultato della combinazione di due materiali differenti, di cui l' uno deriva unicamente dalla esperienza, e l' altro dalla cognizione pura. Essa dunque dipende da quest' ultima, senza che questa dipenda in verun modo dall' esperienza. Così, per giungere a conoscere più a fondo la natura dell' intelligenza, bisogna, nell' esame delle sue tre facoltà principali, la sensibilità, l' intendimento e la ragione, spogliare la cognizione che noi acquistiamo mediante ognuna di esse, da tutto ciò che viene somministrato dall' esperienza, e come eterogeneo e tratto da una sorgente estranea: ciò che resterà non potrà appartenere che all' *intelligenza pura* e sarà una *cognizione pura*. Questo è il problema che Kant si è proposto nella sua *Critica della ragione pura*.

13. In ogni cognizione di esperienza, l' elemento somministrato dalla esperienza si chiama Materia della cognizione, e l' elemento somministrato dalla cognizione pura si chiama Forma della cognizione. Questi elementi hanno dei caratteri distintivi che non permettono di confonderli. Infatti, la *materia* è sempre

CONTINGENTE, mentre la *forma* è sempre NECESSARIA. Questo è quello che noi faremo meglio comprendere cominciando di nuovo l'analisi della intelligenza sotto il rapporto della cognizione pura.

14. La disposizione della intelligenza ad essere affetta dagli oggetti, a ricevere delle impressioni, ed a provare delle sensazioni, in una parola la *sensibilità*, si chiama ancora *ricettività*. L'effetto della sensazione è la rappresentanza dell'oggetto nella nostra mente, ossia l'*intuizione*.

La sensibilità si dice *esterna* o *interna*, secondo che essa è affetta da un oggetto reale fuori del soggetto pensante, o dalle modificazioni e cangiamenti che si operano in questo medesimo soggetto, come i desiderj, i sentimenti ec. ec.; l'oggetto che agisce sulla sensibilità si chiama *fenomeno*. La *materia* della intuizione è ciò che modifica la sensibilità, e corrisponde alla sensazione; la sua *forma* è il rapporto, l'ordine, l'insieme che noi scopriamo nella materia. La forma non essendo data dall'oggetto, poichè essa non è sensazione, appartiene unicamente alla natura della sensibilità; essa è una cognizione o *intuizione pura*; è *a priori* o anteriore all'oggetto; è *necessaria*, perchè senza di lei l'intuizione degli oggetti non sarebbe possibile. Così, quando si stacca dalla rappresentanza di un corpo ciò che l'intendimento ne concepisce, come la sostanza, la forza, la divisibilità, ec., e ciò che la sensibilità ne riceve, come la durezza, il colore, ec., vi resta ancora qualche cosa della intuizione empirica, cioè l'estensione, e la figura. Queste due qualità appartengono alla intuizione pura, che ha luogo *a priori* nello spirito, come una pura forma della sensibilità.

15. Le impressioni prodotte dagli oggetti sulla sensibilità non possono farsi che in una maniera conforme all'organizzazione interna, o al modo di *affettibilità* proprio di questa facoltà, vale a dire secondo certe regole o leggi costanti ed invariabili di questa facoltà, alle quali sono assoggettate *necessariamente* e senza eccezione tutte le impressioni che riceviamo dagli oggetti, e per conseguenza anco tutte le nostre intuizioni. Ciò posto, è chiaro che ciò che costituisce l'essenza della nostra stessa sensibilità non è altra cosa che l'insieme di queste leggi necessarie, esistenti nella medesima originariamente e anteriormente a qualunque impressione attuale degli oggetti sopra di noi. Così, per iscoprire queste leggi immutabili che regolano e determinano costantemente, uniformemente e senza eccezione nessuna la maniera nella quale siamo affetti dagli oggetti sensibili, bisogna primieramente distinguere ciò che, nella moltiplicità delle intuizioni, ci fa impressione in diverse maniere, da ciò che ci fa ridurre questa varietà di percezioni all'unità, sotto certi rapporti e secondo certe regole costanti, uniformi, generali e *necessarie*. Ora è per noi assolutamente impossibile il rappresentarci gli oggetti, l'averne un'intuizione sensibile, se essi non sono distanti gli uni dagli altri, vale a dire se non sono posti nello spazio. Di più, noi non possiamo scoprire la loro esistenza che simultaneamente o successivamente, vale a dire nel tempo. Lo spazio e il tempo sono dunque la *condizione necessaria* di tutte le intuizioni, cioè lo spazio per gli oggetti esterni, e il tempo per gli oggetti in generale. Infatti, lo spazio e il tempo sono così intimamente legati a tutte le nostre percezioni, che l'immaginazione stessa non può concepire degli esseri che ne siano privi, e noi non possiamo separargli dagli oggetti senza annientare gli oggetti medesimi; mentre al contrario si possono col pensiero annientare tutti gli oggetti, senza che sia possibile distruggere lo spazio e il tempo che restano uniti e necessarj al soggetto pensante. Lo spazio e il tempo sono dunque le leggi generali, ossia le *forme* della sensibilità.

16. Lo spazio e il tempo essendo le condizioni necessarie per l'intuizione degli oggetti sensibili, gli attributi che loro convengono debbono pur convenire agli oggetti, e i giudizj che si possono fare sulle loro proprietà debbono essere

necessariamente applicabili anco agli oggetti medesimi. Ciò spiega l'evidenza, l'universalità, la necessità delle proposizioni matematiche, non meno che la loro applicazione à tutti i fenomeni dell'universo.

Questa teoria dello spazio e del tempo si chiama l'*Estetica trascendentale*.

17. Se noi fossimo ridotti alla sola facoltà passiva di ricevere unicamente le impressioni degli oggetti, tutte le nostre percezioni sarebbero isolate, senza connessione, inattive; non avremmo, a parlar propriamente, cognizione di veruna sorta, poichè per noi il *conoscere* consiste precisamente, nell'essere al possesso delle concezioni, alle quali possiamo riferire le percezioni semplici e immediate. La cognizione comincia dunque nell'intendimento; è questa facoltà che s'impadronisce dei materiali sparsi somministrati dalla sensibilità, e che gli riduce allo stato di concezioni secondo le leggi che le sono proprie.

L'azione dell'intendimento ha luogo in forza di *giudizj*; poichè riunire più percezioni in una sola per determinare ciò che è un oggetto, o ridurre più fenomeni di una medesima specie ad una stessa concezione sotto la quale vengano tutti compresi, non è altro che *giudicare*. In tal modo, risalendo dalle percezioni semplici alle percezioni generiche, da queste alle concezioni generali, e da queste ultime ad altre ancora più generali, e così sempre riunendo e sempre generalizzando, l'intendimento giunge a comporsi un tutto, un sistema di cognizioni.

Ma questa riunione, questa generalizzazione non può operarsi che conformemente alle leggi fondamentali che costituiscono la natura dell'intendimento. Esso ha necessariamente delle regole da cui non può allontanarsi nelle sue operazioni, e che debbono esistere anteriormente all'apparizione dei fenomeni che gli sono offerti dalla sensibilità, poichè all'esistenza sola di queste leggi dobbiamo la possibilità di concepire o di pensare; e nel modo stesso che l'intuizione empirica è impossibile senza l'intuizione pura, così anco una concezione empirica, che si riferisce cioè ad un oggetto somministrato dall'esperienza, è impossibile senza una concezione pura. Le leggi dell'intendimento si chiamano *forme* del pensiero in opposizione ai fenomeni che ne sono la *materia*.

18. Per riconoscere e determinare le leggi dell'intendimento, bisognerebbe adesso ricercare ciò che vi ha di *necessario* nelle concezioni, poichè, come già abbiamo fatto vedere, questa parte *necessaria* in una cognizione empirica costituisce appunto la cognizione pura. Ma qui si presenta un mezzo più pronto e più sicuro di procedere nella nostra indagine: siccome l'intendimento non agisce che in forza di giudizj, e le concezioni pure sono tante leggi primitive e fondamentali che sole rendono possibili questi giudizj, così è evidente che la forma di tutti i giudizj, o la maniera secondo la quale il nostro intendimento giudica, deve esser pure determinata da queste concezioni pure e fondamentali. Debbono esse dunque ritrovarsi nei modi di tutti i giudizj possibili. Così, per conoscere le forme o regole primitive dell'intendimento, non si tratta che di ricercare quelle dei giudizj.

19. Facendo astrazione dall'oggetto su cui versa il giudizio, ossia dalla *materia* del giudizio, e non considerando che il solo modo secondo il quale è formato, si ottiene la *forma*, che è l'elemento necessario.

Ora, i nostri giudizj si dividono in due classi, di cui una comprende i giudizj che servono a determinare gli oggetti, e l'altra quelli che si riferiscono al modo della loro esistenza. La prima classe si compone dei giudizj di *quantità* e di *qualità*; la seconda abbraccia quelli di *relazione* e di *modalità*.

Ognuno di questi giudizj può esser formato in tre differenti maniere come adesso siamo per far vedere.

Mediante un giudizio di *quantità*, possiamo considerare l'oggetto come fa-

cente un insieme o una *totalità*, o come formante *più* esseri, o finalmente come un' *unità*.

Mediante un giudizio di *qualità*, noi consideriamo l' oggetto come *dotato* di un attributo, o come *privo* di questo attributo, o finalmente determiniamo l' oggetto enunziando un attributo che non ha, il che stabilisce un *limite* nella generalità degli oggetti: infatti da un lato di questo limite gli oggetti hanno certe qualità, mentre dall'altro lato sono privi di queste stesse qualità.

Mediante un giudizio di *relazione*, noi concepiamo: 1.° il rapporto di un oggetto come *sostanza* di un altro, che è soltanto un *accidente* del primo; 2.° il rapporto di un oggetto come *causa* di un altro, che è un *effetto* di questa causa; 3.° il rapporto di due o più oggetti come esistenti insieme, come aventi una *reciprocità d'azione*.

Mediante un'giudizio di *modalità*, noi concepiamo l'oggetto come *possibile*, o come *esistente realmente*, o finalmente come *necessario*.

Le forme dei giudizj, e conseguentemente le concezioni pure e primitive, o, come le chiama Kant, le Categorie dell' intendimento sono dunque:

Tavola delle Categorie

I. — *Di quantità.*

1. Unità; 2. Pluralità; 3. Totalità.

II. — *Di qualità.*

4. Realtà; 5. Privazione; 6. Limitazione.

III. — *Di relazione.*

7. Sostanza e accidente; 8. Causalità o legge di causa e d'effetto;

9. Reciprocità o legge d' azione e di reazione.

IV. — *Di modalità.*

10. Possibilità e impossibilità; 11. Esistenza e non esistenza;

12. Necessità e contingenza.

Per mezzo di queste dodici categorie o concezioni pure la mente unisce insieme gli oggetti isolati percepiti dalla sensibilità, e apporta l' *unità* nelle nostre cognizioni.

20. Interessa moltissimo l'osservare che, in ogni classe, l'ultima categoria è prodotta dalla riunione delle altre due che la precedono, senza che perciò essa derivi da quelle, poichè questa riunione esige un atto particolare dell' intendimento. Così, per esempio, la categoria di *totalità* non è altra cosa che la *pluralità* presa come *unità*; la *limitazione* è la *realtà* colla *privazione*; la *reciprocità* è la *causalità* di una *sostanza* che determina un' altra *sostanza*; finalmente la *necessità* non è altro che l' *esistenza* data dalla *possibilità*.

Le due prime classi di categorie, la quantità e la qualità, sono state chiamate da Kant *categorie matematiche*, perchè sono applicabili alle cose suscettibili di aumento estensivo o intensivo; le due ultime, distinte d'altronde dalle precedenti in quanto che hanno delle forme corrispondenti che sono le une opposte alle altre, hanno ricevuto il nome di *categorie dinamiche*, perchè per mezzo di queste categorie l' intendimento concepisce non gli oggetti stessi, ma ciò che essi sono nei rapporti che hanno o tra loro o coll' intendimento.

21. Queste forme pure, o leggi dell' intendimento, sono di una necessità rigorosa, e non possono essere in conseguenza derivate dall' esperienza in cui tutto è contingente. È soltanto da esse che hanno principio tutte le altre nostre cognizioni, senza che sia possibile di risalire più alto. Esse si ritrovano in tutti i modi del pensiero, a segno tale che non è se non per esse e conformemente ad esse che è possibile pensare.

Tutte le altre concezioni pure dell' intendimento non sono che *derivate* da queste leggi fondamentali, e resultano dalla loro riunione o tra loro o coi modi della sensibilità pura. Per esempio, dalla teoria di *causalità* nascono le concezioni pure derivate di *forza*, di *passione*; da quella di *reciprocità* le idee di *presenza*, di *resistenza*; e così di seguito.

22. Le categorie formano, unitamente alle leggi della sensibilità, il *tempo* e lo *spazio*, l' insieme delle condizioni che rendono per noi possibile l' acquisto di ogni cognizione pura o empirica. Per pensare è necessario un oggetto, una *materia* del pensiero, e questa materia è somministrata all' intendimento dalla sensibilità, per mezzo delle forme che le sono proprie. L' intendimento s' impadronisce delle diverse percezioni della sensibilità, le riunisce applicando loro le sue forme primitive, e le innalza finalmente allo stato di pensiero o di concezione. Dapprima l' oggetto è stato *percepito* dalla sensibilità, poscia in forza del lavoro dell' intendimento è *concepito*, e così noi acquistiamo la cognizione del medesimo.

Debbono dunque concorrere due condizioni affinchè la cognizione di un oggetto sia possibile: primieramente l' *intuizione* in forza della quale l' oggetto è dato e ci comparisce come fenomeno, e in secondo luogo la *concezione* in forza della quale esiste nel pensiero un oggetto che corrisponde a questa intuizione. Ora la prima condizione, quella per la quale soltanto gli oggetti possono esser percepiti, serve realmente nello spirito di fondamento *a priori* agli oggetti, poichè tutti i fenomeni si accordano necessariamente con questa condizione *formole* della sensibilità, senza la quale sarebbe assolutamente impossibile che gli oggetti potessero esser percepiti e somministrati empiricamente: e siccome le concezioni pure precedono la concezione empirica e sono le condizioni *a priori* sotto le quali soltanto un oggetto qualunque, anco avanti di esser percepito, esiste non ostante nel pensiero come oggetto, così ne resulta che ogni cognizione empirica degli oggetti si accorda necessariamente colle concezioni pure, e che queste ultime sono le condizioni *a priori* e il fondamento di qualunque cognizione esperimentale.

23. Le leggi dell' intendimento sono dunque concezioni pure, che *a priori* prescrivono leggi ai fenomeni, e per conseguenza anco alla natura, che è l' insieme di tutti i fenomeni. Così, non è la natura che impone le sue leggi alla intelligenza, ma è al contrario l' INTENDIMENTO CHE DÀ NECESSARIAMENTE DALLE LEGGI AGLI OGGETTI.

24. In qualunque subordinazione di un oggetto sensibile a una concezione pura, la rappresentazione dell' oggetto deve rassomigliare alla concezione, essere di una natura analoga alla sua. Bisogna che i segni distintivi, gli attributi che compongono questa concezione si trovino nell' oggetto stesso, vale a dire che la concezione deve contenere ciò che è rappresentato nell' oggetto da collocarsi sotto questa concezione; infatti significa appunto questo la proposizione: un oggetto è contenuto sotto una concezione. Così, la concezione geometrica pura di *sfera*, per esempio, non si applica agli oggetti *globo* o *palla*, se non perchè la rotondità chè è conosciuta nella concezione pura può esser percepita nelle concezioni empiriche.

Ciò non ostante, le concezioni pure dell' intendimento sono totalmente differenti

dalle intuizioni empiriche ed anco dalle intuizioni sensibili in generale, e non possono mai trovarsi in un' intuizione. È cosa dunque importantissima il ricercare come si operi la subordinazione delle intuizioni alle concezioni pure, e per conseguenza l' applicazione delle categorie ai fenomeni.

25. Per rendere possibile l'applicazione di una categoria a un fenomeno, deve trovarsi un termine medio che rassomigli in parte alla categoria, e in parte al fenomeno. Questa rappresentazione media deve esser per un lato intellettuale e *puro*, e per l'altro *sensibile*. Tale è il carattere di ciò che Kant chiama *Schema trascendentale*.

Per esempio, l' idea di poligono è uno *schema*, poichè nessuna immagine o rappresentazione empirica può essere adequata alla concezione di poligono in generale, nè potrebbe mai comprendere la generalità della concezione; essa non potrebbe rappresentare che un *triangolo*, o un *quodrato*, o un *pentogono*, ec.; mentre l' idea di poligono comprende in sè tutte queste figure.

26. Tutte le nostre idee hanno per base uno *schemo*, e non mai le immagini dell' oggetto, poichè nessuna immagine dell' oggetto può coincidere perfettamente coll' idea pura. L' immagine è il prodotto dell' immaginazione empirica; lo schema al contrario è il prodotto dell' immaginazione pura, è il metodo generale in forza del quale si giunge a poter dare un' immagine a un'idea. Così, quando si dispongono tre punti uno dopo l' altro . . ., si ha l' immagine del numero *tre*; ma quando al contrario si concepisce solamente un *numero* in generale, che può essere allora o *tre*, o *cento*, o *mille*, ec., questo pensiero piuttosto che presentare un' immagine è la rappresentazione di un metodo per rappresentare in un' immagine una moltiplicità, in conformità di una certa concezione.

27. Lo *schema* è l' applicazione delle forme dell' intendimento alle forme della sensibilità, e segnatamente al *tempo* che abbraccia tutti gli oggetti sì esterni che interni. Vi sono dunque tante classi di schemi quante sono le classi delle categorie.

1.° Lo schema di *quantitò* è l' idea dell' addizione successiva delle parti omogenee del tempo, è la sintesi o la produzione del tempo stesso: Il Numero. *Uno. — Più. — Tutto.*

2.° Lo schema di *qualità* è la Realtà dell' esistenza nel tempo, di ciò che in generale corrisponde ad una sensazione*: Essere nel tempo. — Non essere*, o *ossenza di esistenzo nel tempo. — Tronsizione dal grado d'intensità di una sensozione alla suo sparizione.*

3.° Lo schema di *relazione* è il rapporto dei fenomeni tra loro nel tempo, ossia Ordine del tempo. Sostanza, *Principio invoriabile e durabile nel tempo.* — Causalità, *Successione regolare nel tempo.* — Connessità, *Esistenzo simultonea nel tempo.*

4.° Lo schema di *modalità* è il modo di Esistenza dei fenomeni nel tempo. Possibilità, *Ideo di un oggetto che può esistere in un tempo qualunque.* — Esistenza, *Ideo di un oggetto esistente in un tempo doto.* — Necessità, *Idea di un oggetto esistente sempre nel tempo.*

Gli schemi sono le vere e sole condizioni che possono dare alle categorie un rapporto con gli oggetti, e rendere i fenomeni suscettibili di un legame universale nell' esperienza. Sono essi concezioni nel tempo stesso *pure* e *sensibili*. Quando una cosa limita uno *schemo*, ne resulta un' *immagine*, e questa immagine diviene un *oggetto* quando è riferita a una sensazione.

È appunto in tal modo che i primi principj delle scienze si producono nello spirito dell' uomo, e si trovano quindi realizzati nella natura.

28. Abbiamo detto (4) che oltre la sensibilità e l' intendimento noi siamo dotati di una terza facoltà superiore alle altre due. Infatti, indipendentemente dalle

rappresentazioni d'oggetti dati dall'attività dell' intendimento, ne abbiamo ancora altre che presentano un carattere essenzialmente differente. Noi colleghiamo le concezioni dell' intendimento come questo ultimo aveva unito insieme le percezioni della sensibilità, e ne deduciamo conclusioni e idee d' oggetti che non possono realizzarsi nell' esperienza; così siamo tratti verso l' *infinito*, verso l' Assoluto; risalghiamo continuamente di conseguenza in conseguenza, di principio in principio, verso una condizione talmente generale e incondizionale, che essa non possa più derivare da alcuna altra. Tutto questo lavoro intellettuale suppone necessariamente una facoltà capace di eseguirlo, e questa facoltà suprema si chiama Ragione.

29. Questa facoltà ha, come l' intendimento, un uso puramente formale o logico, poichè trae delle conclusioni e deduce delle conseguenze; ma essa ha un uso reale, poichè racchiude in sè stessa certe concezioni e certi principj che non riceve nè dai sensi, nè dall' intendimento.

Se si può definire l' intendimento, la facoltà che riduce i fenomeni all' unità per mezzo delle *regole*, la ragione è allora la facoltà che riduce all' unità le leggi dell' intendimento per mezzo dei *principj*. Essa non concerne mai immediatamente l' esperienza o un oggetto qualunque, ma l' intendimento soltanto, per dare, per mezzo di concezioni universali, l'unità *a priori* alle diverse cognizioni di questo intendimento, unità che si può chiamare *razionale*, e che è di una specie affatto diversa da quella che può derivare dall' intendimento.

30. Analizzando l' uso logico della ragione, giungeremo a riconoscere il suo uso reale, come l' uso logico dell' intendimento, nella formazione dei giudizj, ci ha condotto a riconoscere le sue leggi (19). Ora, quest' uso logico consiste nel dedurre, per mezzo di conclusione, un giudizio da altri giudizj dati. Questo è appunto ciò che forma il *ragionamento*. Per esempio, in questo ragionamento: *Tutti i corpi sono pesanti*; *l' oro è un corpo*; *dunque l' oro è pesante*; la conclusione *l' oro è pesante* è un prodotto della ragione.

In ogni ragionamento, si pensa in primo luogo una regola (*la maggiore*) per mezzo dell'*intendimento*. In secondo luogo, si sottopone una cognizione alla condizione della regola (*la minore*) per mezzo del *giudizio puro*. Finalmente, si *determina* la cognizione mediante la proprietà enunziata nella regola (*conclusione*), e per conseguenza *a priori*, per mezzo della *ragione*. Il rapporto che rappresenta la maggiore come regola tra una cognizione e le sue condizioni costituisce dunque tre specie di ragionamenti corrispondenti alle tre specie di giudizj che esprimono il rapporto delle cognizioni nell' intendimento, cioè i giudizj di *modalità*. Noi abbiamo dunque: 1.° il ragionamento *categorico*; 2.° il ragionamento *ipotetico*; e 3.° il ragionamento *disgiuntivo*.

31. L' uso logico della ragione ci rivela le leggi della *ragione pura*, poichè 1.° il ragionamento non considera le intuizioni per sottoporle a regole, come fa l' intendimento colle sue categorie, ma considera unicamente le concezioni del giudizio. L' unità razionale che produce la ragione non è dunque l' unità d' un' esperienza possibile. 2.° La ragione cerca la condizione generale del suo giudizio, della conclusione, e il ragionamento non è altra cosa che la subordinazione della sua condizione a una regola generale. Ma questa regola è esposta anch' essa dal canto suo alla stessa ricerca della ragione, e la condizione della condizione deve essere investigata più lungi che sia possibile. Così il principio proprio della ragione nel suo uso logico consiste nel trovare alla cognizione condizionale dell' intendimento un principio incondizionale e assoluto, mediante il quale rimanga compinta la sua unità.

L' atto della ragione in questa ascensione continua verso l' assoluto suppone dunque un principio che si può enunziare nel modo seguente: essendo dato il

condizionale, è data con esso l'intera serie delle *condizioni*, e per conseguenza anco l'*incondizionale*, compreso nella totalità di queste condizioni.

Questo principio completo, incondizionale, avente la sua sorgente nell'essenza stessa della ragione, è la concezione pura e primitiva della ragione pura e il fondamento di ogni unità razionale.

32. Da questo primo principio resultano differenti proposizioni, rispetto alle quali l'intendimento puro non ha cognizione nessuna, poichè esso si riferisce unicamente agli oggetti dell'esperienza possibile, di cui la cognizione e il legame sono sempre condizionali; e sebbene l'assoluto possa divenire applicabile agli oggetti dell'intendimento, coll'aiuto della facoltà del GIUDIZIO, che serve di legame o di transizione tra esso e la ragione, e che partecipa così di queste due opposte facoltà, ciò nondimeno le proposizioni resultanti da questo principio supremo della ragione pura, relativamente a tutti i fenomeni, sono *trascendenti*, che è quanto dire che nessun uso empirico di queste *proposizioni principj* potrà mai divenir simile a lui.

33. L'*idea* dell'incondizionale può esser resa relativa in tre modi, applicandola 1.° al soggetto che concepisce, all'*io* pensante; 2.° agli oggetti sensibili, ai fenomeni; e 3.° alle cose in generale. Di qui tre diverse classi alle quali si riferiscono tutte le concezioni della ragione o tutte le *idee* della ragione, come le chiama Kant, cioè: l'*unità* assoluta del soggetto pensante; l'*unità* assoluta *della serie delle condizioni del fenomeno*; e finalmente l'*unità* assoluta *delle condizioni di tutti gli oggetti del pensiero* in generale.

Il soggetto pensante è l'oggetto della *psicologia*; l'insieme dei fenomeni, l'universo, quello della *cosmologia*; e la condizione assoluta di tutto ciò che può esser pensato, l'essere degli esseri, Dio, è l'oggetto della *teologia*.

Vi sono dunque in generale tre specie d'*idee* della ragione: *idee* psicologiche, cosmologiche e teologiche.

34. Queste *idee* o concezioni pure dell'*anima*, dell'*universo* e di *Dio*, sono indispensabili alla *ragione* per introdurre l'unione nelle concezioni dell'intendimento, e portar così la nostra cognizione al suo più alto grado di unità. Ma l'esistenza delle cose alle quali queste idee sono relative non può essere nè dimostrata, nè CONFUTATA con nessun argomento ammissibile; la logica ordinaria in questo punto diviene assolutamente insufficiente. Affinchè questioni di simil sorta potessero esser trattate in un modo soddisfacente, mediante la ragione speculativa, bisognerebbe che questa ragione avesse realizzato l'assoluto che essa richiede per *postulato*, e senza il quale essa non può affrontarle senza cadere in contradizioni inconciliabili.

Considerando la ragione nel suo uso *pratico*, Kant si è elevato verso la regione assoluta del sapere dell'uomo, ed ha finalmente collocato il dogma conservatore dell'esistenza di Dio fuori degli attacchi del *sensualismo* e al coperto delle sue pretese prove.

35. Da ciò che abbiamo detto resulta chiaramente che le idee della ragione pura non sono *costitutive*, vale a dire non forniscono oggetti che aumentino la sfera delle nostre cognizioni: esse sono unicamente *regolative*, cioè servono a produrre l'unità sintetica nelle cognizioni. Esse non sono idee degli oggetti, ma idee dell'unità assoluta di tutte le regole dell'intendimento, senza le quali tutte le nostre cognizioni non sarebbero che un aggregato senza armonia e senza unità.

La ragione pura è dunque relativamente ai fenomeni una facoltà *regolativa*, mentre l'intendimento è una facoltà *costitutiva*. Questa osservazione è della più alta importanza per la filosofia delle scienze.

Così il principio di totalità assoluta: *Quando è dato il condizionale*, *è data pure tutta la serie delle condizioni*, non stabilisce la serie totale delle con-

dizioni, come oggetto dato in sè stesso, ma serve soltanto di regola, e afferma che nei fenomeni bisogna risalire da una condizione all'altra senza che alcuna condizione debba considerarsi come l'ultima.

36. Abbiamo già detto che la facoltà di giudicare, considerata in particolare, contiene in sè il principio d'unione delle altre due facoltà attive; per completare le nozioni filosofiche di cui abbiamo adesso bisogno ci resta da aggiungere poche parole sull'uso logico e la natura di questa facoltà.

Il Giudizio è la facoltà di distinguere se un oggetto può o non può esser collocato sotto una data regola, ossia la facoltà di considerare il particolare come contenuto nel generale.

37. Si presentano due casi: o è dato il generale, cioè la regola o il principio, e allora facil cosa è il riferirvi il particolare; o è dato soltanto il particolare, e il *giudizio* cerca il generale al quale deve quello venir sottoposto. Nel primo caso la facoltà è *determinante*, e prende il nome di *giudizio subsontivo*, nel secondo è *riflettente*, e prende il nome di *giudizio riflessivo*.

38. Il giudizio subsontivo ha i suoi principj nelle categorie che stabiliscono le leggi trascendentali per applicarle ai casi particolari dell'esperienza, e abbraccia i dodici giudizj da cui abbiamo estratto queste categorie, e che portano i seguenti nomi:

I. — *Giudizj di quantità.*

1. Giudizj individuali; 2. plurali; 3. generali.

II. — *Giudizj di qualità.*

4. Giudizj affermativi; 5. negativi; 6. determinativi.

III. — *Giudizj di relazione.*

7. Giudizj categorici; 8. ipotetici; 9. disgiuntivi.

IV. — *Giudizj di modalità.*

10. Giudizj problematici; 11. assertorici; 12. apodittici.

39. Il *giudizio subsontivo*, in generale, è la funzione di neutralizzazione dell'intendimento e della ragione.

Il *giudizio riflessivo* è la funzione di transizione tra l'intendimento e la ragione. Prende esso il nome di *induzione* quando rimonta dall'intendimento alla ragione, o dai fatti alle leggi; e si dice *analogia* quando al contrario discende dalla ragione all'intendimento, o dalle leggi ai fatti.

40. Lo scopo della facoltà riflettente essendo quello di trovare il *generale* quando è dato il *particolare*, si vede chiaro che le si rende indispensabile un principio diverso dalle categorie per istabilire l'unità di tutte le regole particolari empiriche, e per sottometterle a un principio supremo. Questo principio non può esser dato dalle categorie che sono le leggi generali per la natura, e non sono le leggi particolari per il tale oggetto o per il tal caso. Non può nemmeno esser dato dall'esperienza, perchè non sarebbe universale. Bisogna dunque che sia *a priori*, che abbia cioè la sua sorgente nella facoltà stessa del *giudizio*.

41. Ma avanti di ricercare questo principio *puro* del giudizio, dobbiamo fare osservare che tutti i giudizj, tutti i confronti esigono la *riflessione*, vale a dire la distinzione della facoltà di conoscere alla quale riferisconsi le date concezioni. Dicesi *riflessione trascendentale* l'azione di porre in relazione il confronto della rappresentazione in generale colla facoltà di conoscere nella quale essa si

compie e si risolve, e di distinguere se le cose sono paragonate tra loro come appartenenti all'intendimento puro ovvero all'intuizione sensibile. Ora i rapporti secondo i quali le concezioni possono appartenersi scambievolmente l'una all'altra in un certo stato dello spirito, sono i rapporti: 1.° d'*identità* e di *diversità*; 2.° di *convenienza* e di *repugnanza*; 3.° d'*interno* e d'*esterno*; e 4.° finalmente di *determinabile* e di *determinazione*, ossia di *materia* e di *forma*.

42. Le quattro concezioni pure colle loro opposte, sulle quali sono fondati questi rapporti, prendono il nome d'*idee riflessive*, ed è di somma importanza il non confonderle colle categorie, perchè esse non servono che a indicare il rapporto delle idee date delle quali si conosce l'origine, laddove le categorie servono alla sintesi degli oggetti.

43. I falsi sistemi non si generano nell'umana intelligenza che per mancanza di *riflessione trascendentale*; poichè, nel semplice confronto o *riflessione logica*, non si ha riguardo alla facoltà di conoscere alla quale appartengono le date rappresentazioni, che allora trattansi come omogenee relativamente alla loro sede nella mente. Non ostante, quando si tratta di sapere se le stesse cose sono identiche o diverse, d'accordo o repugnanti, ec., siccome le cose possono avere un doppio rapporto colla nostra facoltà di conoscere, cioè colla sensibilità e coll'intendimento, e siccome il modo col quale appartengonsi reciprocamente dipende necessariamente dai loro rapporti con queste facoltà, così è la sola riflessione trascendentale che racchiude il principio della possibilità del confronto delle cose tra loro.

44. Kant chiama *anfibolia* la confusione prodotta dalla riflessione logica, quando essa confronta rappresentazioni la cui sede intellettuale si trova in facoltà differenti, vale a dire quando confonde l'oggetto intellettuale col fenomeno. La pretesa inesattezza del calcolo differenziale riposa sopra un'*anfibolia*, della quale abbiamo altrove accennato l'origine. *Vedi* DIFFERENZIALE, n.° 1.

45. In tutti i suoi atti, il giudizio riflessivo suppone uno *scopo*, un *fine*; poichè le leggi empiriche della natura non avrebbero senza questo un'unità possibile; ed anco le diverse facoltà dell'intelligenza non potrebbero concorrere in un modo armonico alla produzione di una cognizione, se da una parte queste leggi non fossero sottoposte al principio supremo della *concordanza con un fine*, e se dall'altra ognuna di queste facoltà non potesse esser considerata contemporaneamente come *scopo* e *mezzo* rapporto alle altre. Il principio puro e *a priori* del giudizio è dunque la concordanza o la *conformità dello scopo*, e si formula in questi termini: *Nella natura, tutto ha il suo scopo, nulla è inutile.* Come le *idee pure* della ragione, il suo uso è *regolativo* (35).

46. Adesso, prima di cominciare a trattare della *filosofia delle matematiche*, ci rimane a spiegare alcuni termini di cui si fa uso nella filosofia trascendentale.

1.° Tutto ciò che si riferisce all'*oggetto* stesso di una cognizione prende il nome di *obiettivo*.

2.° Tutto ciò che si riferisce alla facoltà di conoscere prende il nome di *soggettivo*.

3.° Si chiama in generale *immanente* ciò che esiste sotto le condizioni del tempo, e *trascendente* ciò che è fuori di queste condizioni. Ciò che è generato fuori delle condizioni del tempo, ma pure trova la sua applicazione nel tempo, si dice *trascendentale*. La cognizione empirica degli oggetti è *immanente*; le leggi dell'intendimento sono *trascendentali*, e le idee pure della ragione sono *trascendenti*.

Ogni volta che ci occorrerà di citare qualche passo della *Introduzione alla filosofia delle matematiche* del sig. Wronski, ci serviremo della parola *Introd.* posta in parentesi, colla indicazione della pagina.

47. In ogni cognizione, noi dobbiamo distinguere il *contenuto* o la *materia* dell' oggetto pensato dalla sua *forma* o dalla sua *determinazione*. La *materia* appartiene propriamente all' oggetto e costituisce ciò che in lui esiste di *determinabile*, la sua essenza; la forma appartiene alla facoltà di conoscere, ed è la sola che rende possibile la *determinazione* dell' oggetto o la sua cognizione.

Così, l' insieme di tutti i fenomeni, il mondo fisico, la Natura, deve egualmente presentarci, nella cognizione che ne abbiamo, due oggetti distinti, la *materia* e la *forma*. La materia, l' essenza stessa del mondo fisico, è l' oggetto generale della Fisica; e la forma, la maniera di essere di questo mondo, è l' oggetto generale delle Matematiche.

Ora, la *forma* di tutti i fenomeni fisici, e conseguentemente la *forma* generale della natura, che resulta dall' applicazione delle leggi trascendentali della sensibilità alle impressioni che riceviamo dagli oggetti (15), è il *tempo*, per tutti gli oggetti fisici in generale, e lo *spazio*, per gli oggetti fisici esterni. Le leggi del tempo e dello spazio, considerando questi ultimi non *subiettivamente*, il che è l' oggetto dell' estetica trascendentale (16), ma *obiettivamente*, vale a dire come appartenenti al mondo fisico dato a *posteriori*, costituiscono dunque il vero oggetto delle matematiche.

48. Questa determinazione primitiva dell' oggetto delle matematiche è data da un ramo della filosofia che chiamasi *architettonica*, e il cui scopo è di coordinare le nostre cognizioni in sistemi. La determinazione ulteriore di quest' oggetto appartiene alla *Filosofia delle matematiche*.

» Quest' ultima filosofia ha per iscopo l' applicazione delle leggi pure del sapere, trascendentali e logiche, all' oggetto generale delle scienze di cui si tratta, all' oggetto generale quale è stato da noi determinato; ed essa deve così, secondo quest' idea, dedurre per una via subiettiva le *leggi prime* delle matematiche, o i loro principj filosofici. — Le matematiche stesse partono da questi principj, e ne deducono per una via puramente obiettiva, senza risalire fino alle leggi intellettuali, le proposizioni il cui insieme forma l' oggetto di queste scienze. »

» Per meglio approfondire la natura della filosofia delle matematiche, bisogna sapere (ciò che è stato da noi precedentemente spiegato) che esistono per le funzioni intellettuali dell' uomo delle leggi determinate. Queste leggi trascendentali e logiche caratterizzano l' intelligenza umana, o piuttosto costituiscono la natura stessa dell' umano sapere. Ora, applicando queste leggi, prese nella loro purezza subiettiva, all' oggetto generale delle matematiche, alla forma del mondo fisico, ne risulta, nel dominio del nostro sapere, un sistema di leggi particolari, che regolano le funzioni intellettuali speciali relative all' oggetto di questa applicazione, il tempo e lo spazio. — Sono queste leggi particolari che costituiscono i principj filosofici delle matematiche, principj che già abbiamo accennati. — Bisogna ancora riflettere che, secondo questa esposizione della filosofia delle matematiche, questa filosofia dà nel tempo stesso la spiegazione dei fenomeni intellettuali che presentano le scienze matematiche: infatti, il complesso di queste scienze forma un certo ordine di funzioni intellettuali, e queste funzioni sono veri fenomeni; dimanierachè le leggi di queste funzioni, che nel tempo stesso sono le leggi di questi fenomeni, contengono la condizione della possibilità di questi ultimi, e danno per conseguenza la loro spiegazione filosofica » (*Introd.* pag. 2).

49. La filosofia delle matematiche presenta tre parti distinte: 1.° L' *Architettonica delle matematiche*, che è quella parte che dà la deduzione dei differenti oggetti particolari distinti e necessarj di tali scienze, vale a dire il *contenuto* o la *materia* delle nostre cognizioni matematiche. 2.° La *Metodologia delle matematiche*, che è quella parte che presenta le differenti maniere di considerare gli oggetti matematici, i differenti modi intellettuali della loro cognizione; essa

riguarda essenzialmente la *forma* cognitiva. 3.° Finalmente, la *Metafisica delle matematiche*, che è quella parte che ha per iscopo le leggi obiettive degli oggetti matematici, o le leggi che ricevono questi oggetti in forza della intelligenza dell' uomo.

L'architettonica e la metodologia riguardano il punto di vista *subiettivo* della filosofia delle matematiche, e la metafisica il punto di vista *obiettivo* di questa filosofia.

La deduzione che daremo, alla parola MATEMATICHE, di tutti i rami di queste scienze, e dei diversi oggetti distinti e necessarj di cui esse si occupano, è fondata sull' architettonica delle matematiche. Noi rimanderemo il lettore per tutte le particolarità a quella deduzione medesima, che quanto siamo per dire servirà a delucidare maggiormente.

La metodologia delle matematiche, il cui scopo è la determinazione dei differenti metodi che debbono seguirsi nei differenti rami di tali scienze, riposa su principj puramente logici. La sua parte più importante verrà trattata alla parola METODO.

Quanto alla metafisica delle matematiche, essa forma la parte principale della filosofia di queste scienze; essa ha per iscopo le leggi dell' oggetto stesso delle matematiche, leggi che ne costituiscono i principj primi o filosofici. Alla metafisica, aiutata dalla architettonica, spettano tutte le determinazioni ulteriori dell' oggetto delle matematiche e la deduzione delle sue leggi fondamentali.

50. Osserviamo primieramente, come avremo luogo di farlo anche in seguito (*Vedi* MATEMATICHE), che le leggi del tempo e dello spazio possono esser considerate in sè stesse, ovvero nei fenomeni fisici ai quali si applicano, vale a dire *in abstracto* e *in concreto*. Nel primo caso, fanno esse l'oggetto delle MATEMATICHE PURE, e nel secondo quello delle MATEMATICHE APPLICATE. Ma la considerazione concreta dipende necessariamente dalla considerazione astratta: dunque noi dobbiamo occuparci adesso soltanto delle MATEMATICHE PURE.

51. Per ottenere le determinazioni ulteriori dell' oggetto generale delle matematiche, bisogna, in forza di quanto è stato detto di sopra (26 e 27), applicare a questo oggetto generale le leggi trascendentali del sapere, onde generare gli schemi che soli possono servire di base alle idee particolari che possiamo formarci di quest' oggetto. Ora, applicando al tempo, considerato obiettivamente, la prima delle leggi dell' intendimento, la *quantità*, presa in tutta la sua generalità, ne risulta lo schema del NUMERO: e questa stessa legge, applicata allo spazio, considerato pure obiettivamente, dà lo schema dell' ESTENSIONE (*Vedi* MATEMATICHE). I *numeri* e l'*estensione* sono dunque due determinazioni particolari dell' oggetto generale delle matematiche: esse danno origine ai due rami fondamentali di queste scienze: l'ALGORITMIA o la scienza dei *numeri*, e la GEOMETRIA o la scienza dell' *estensione*. Il tempo essendo la *forma* di tutti gli oggetti in generale, e lo spazio la forma dei soli oggetti esterni (15), tutte le considerazioni generali della scienza dei numeri potranno applicarsi a quella dell' estensione: così ciò che saremo per dire delle suddivisioni della prima di tali scienze dovrà intendersi egualmente della seconda, della quale per maggior semplicità ci riserbiamo a parlare alla parola GEOMETRIA.

52. L' algoritmia presenta primieramente due rami distinti, corrispondenti ai due modi di considerare subiettivamente una quantità matematica; questi due rami sono: la TEORIA e la TECNIA. La prima ha per oggetto la *natura* delle quantità, vale a dire *ciò che è* nell' essenza di queste quantità; essa è fondata sulla *speculazione*, funzione del sapere in cui domina l' *intelletto*. La seconda ha per oggetto la *misura* delle quantità, vale a dire *ciò che bisogna fare* per

giungere alla valutazione di queste quantità; essa suppone implicitamente il concetto di un *fine* o di uno *scopo*, ed è fondata in ultima analisi sulla *volontà*, facoltà dell' *azione*. In conseguenza della loro origine trascendentale, questi due rami sono distinti e *necessarj*.

53. Questi due rami dell' algoritmia si suddividono essi pure in due parti distinte. Infatti: — » Le differenti funzioni intellettuali dipendono dalla differenza contingente che trovasi nelle facoltà intellettuali, ma, qualunque ne sia la diversità, la coesistenza di queste funzioni non è possibile che in forza di una identità o di un' unità necessaria nelle differenti facoltà da cui dipendono. Questa unità necessaria ha la sua sorgente trascendentale nel principio stesso del sapere, nella coscienza (9), che serve di base alla possibilità delle facoltà intellettuali, e che le unisce mediante la legge dell'identità considerandole subiettivamente, o mediante quella dell' unità, considerandole obiettivamente. — Così, applicando le facoltà intellettuali all' oggetto generale delle matematiche, debbono dapprima risultarne delle funzioni intellettuali matematiche, differenti tra loro e dipendenti dalle differenti facoltà intellettuali, e quindi delle funzioni intellettuali matematiche, formanti il legame delle prime e dipendenti dall' unità trascendentale che si trova tra le facoltà intellettuali medesime. — Il primo ordine di queste funzioni intellettuali matematiche costituisce evidentemente gli *elementi* di tutte le operazioni sistematiche possibili; il secondo ordine di queste funzioni costituisce la *riunione sistematica* di questi elementi. » (*Introd.* pag 5).

Applicando queste considerazioni filosofiche ai due rami dell' algoritmia, la *teoria* e la *tecnia*, si scorge che questi due rami hanno necessariamente ognuno due parti distinte: l' una, che ha per oggetto gli Elementi necessarj delle operazioni matematiche che appartengono a questi rami respettivi; l' altra, che ha per oggetto la Riunione Sistematica di queste operazioni elementari.

Esaminiamo adesso la prima parte della *teoria dell' algoritmia*, ossia la Teoria algoritmica elementare.

54. Lo scopo di questa parte della scienza dei numeri è, dietro ciò che precede, la determinazione della natura di tutti gli algoritmi elementari possibili, considerandoli ognuno separatamente o in un modo indipendente dagli altri. Ora, due algoritmi elementari, primitivi ed essenzialmente opposti, cioè la Sommazione a la Graduazione, le cui forme respettive sono

$$A+B=C, \quad A^{B}=C,$$

si presentano in questa parte elementare. Ognuno di essi ha due rami particolari, l' uno progressivo e l' altro regressivo, cioè l' *addizione* e la *sottrazione* pel primo, le *potenze* e le *radici* pel secondo.

» Questi due algoritmi primitivi sono, per così dire, i due poli intellettuali dell' umano sapere, nella sua applicazione alle quantità algoritmiche. — Nella sommazione, le parti della quantità sono discontinue ed estensive, ed hanno propriamente il carattere dell' aggregazione (*per juxta positionem*). Nella graduazione, le parti della quantità sono al contrario continue, o almeno considerate come tali, e sono in certo modo intensive; esse hanno così l'aspetto del carattere della crescenza (*per intus susceptionem*). — Queste due funzioni algoritmiche del nostro sapere, ognuna delle quali ha le proprie leggi particolari, sono totalmente eterogenee, ed è impossibile di dedurle l' una dall' altra. — Ecco la loro deduzione metafisica, o almeno il loro principio trascendentale: la prima, la funzione intellettuale della sommazione, è fondata sulle *leggi costitutive dell' intendimento* (35); la seconda, la funzione intellettuale della graduazione, è fondata sulle *leggi regolative della ragione.* »

» La neutralizzazione di queste due funzioni intellettuali, e per conseguenza dei due algoritmi elementari che loro corrispondono, produce una funzione intermedia alla quale corrisponde un algoritmo egualmente intermedio, che partecipa e della sommazione e della graduazione: chiameremo quest'algoritmo Riproduzione. — I suoi due rami, progressivo e regressivo, sono la *moltiplicazione* e la *divisione*. — Questo terzo algoritmo elementare, che, considerato sotto il punto di vista metafisico, si riferisce essenzialmente alla facoltà del *giudizio* (5 e 36), deve pure, a motivo della sua origine, esser considerato come un algoritmo primitivo.

» Così, la teoria algoritmica presenta *tre algoritmi elementari* e *primitivi*. Le loro origini dipendono dalle tre facoltà primitive del nostro intelletto (4), l'intendimento, il giudizio e la ragione. Le leggi di questi tre algoritmi, fondate sulle leggi respettive di queste tre facoltà primordiali del nostro intelletto, sono, egualmente che la natura stessa di questi algoritmi, essenzialmente differenti, e non potrebbero, in tutta la loro generalità, farsi derivare le une dalle altre. — Non esistono dunque e non possono esistere per l'uomo altre funzioni algoritmiche che quelle che sono o immediatamente fondate su questi tre algoritmi primitivi, o derivate da questi algoritmi. » (*Introd.* pag. 7).

Prima di occuparci degli algoritmi derivati, studiamo un poco più minutamente i tre algoritmi primitivi, fondamento di tutta la scienza.

55. Per ciò che concerne in primo luogo l'algoritmo primitivo della sommazione, dobbiamo fare osservare che, a motivo della sua origine, costituisce esso in certo modo la *materia* di ogni funzione algoritmica possibile, perchè è l'*intendimento* che costituisce gli oggetti delle nostre cognizioni; l'applicazione o l'uso delle altre facoltà intellettuali non può influire che sulla *forma* delle funzioni algoritmiche, i cui elementi (il *contenuto* o la *materia*) sono sempre dati dall'algoritmo primitivo della Sommazione.

Lo schema di questo algoritmo, che resulta dalla *concezione generale* del suo oggetto (aggregazione o riunione di parti), è

$$A+B=C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

che necessariamente implica lo schema reciproco

$$C-B=A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Su questi due schemi infatti sono respettivamente fondate l'*addizione* e la *sottrazione*.

Ora, questi due schemi essendo identici nella loro origine, ne risulta una considerazione importante sulla *funzione particolare* della quantità B, nelle due relazioni reciproche (*a*) e (*b*). Questa funzione, considerata in sè stessa e facendo astrazione dalle operazioni di addizione e di sottrazione, si presenta nella prima di queste relazioni col carattere di una facoltà di aumento, mentre nella seconda si presenta col carattere di una facoltà di diminuzione.

Questa diversità della funzione del numero B, nelle due relazioni delle quali parliamo, è un prodotto dell'applicazione della seconda legge dell'intendimento, quella di *qualità*, alle quantità algoritmiche, e da questa applicazione oppunto risultano per le quantità due stati differenti chiamati stato *positivo* e stato *negativo*. Così, nella prima relazione, B è una quantità *positiva*, e, nella seconda, B è una quantità *negativa*. (*Vedi* Algebra, n.° 2).

Lo stato *positivo* e *negativo* dei numeri riguarda dunque essenzialmente la loro Qualità; mentre le operazioni di addizione e di sottrazione riguardano uni-

camente la loro QUANTITÀ. Dall'avere appunto fino ad ora confuso questi due punti di vista tanto distinti, sono nate tante contradizioni rapporto ai *numeri negativi*.

56. L'algoritmo della riproduzione consiste nella neutralizzazione intellettuale dei due algoritmi primitivi ed opposti, la sommazione e la graduazione. Somministra esso il modo di risalire dal primo all'ultimo, ed è fondato sulla facoltà del *giudizio*, facoltà intermedia tra l'*intendimento* e la *ragione*, che sono i fondamenti respettivi degli algoritmi opposti.

Lo schema dunque di questo algoritmo, che resulta dalla sua *concezione generale*, è

$$A+A+A+A+A \ldots\ldots\ldots\, B \text{ volte} = C,$$

ove i numeri A, B e C sono dati unicamente dall'algoritmo della sommazione; poichè, per concepire questa generazione, per formarne la prima concezione, è necessario che i numeri A e B siano dati dal solo modo di generazione dei numeri noto fin quì, la sommazione; e allora il numero C, come prodotto da una generazione di sommazione, è pure un numero intero o un numero dato dall'algoritmo della sommazione.

» Ma quando questa concezione è formata, l'influenza regolativa della ragione, che già si manifesta nell'algoritmo di riproduziona di cui parliamo, introduce nella generazione dei numeri A, B e C, una *determinazione nuova e particolare*, che soddisfa per una parte al carattere di aggregazione, cioè alla *discontinuità* di generazione algoritmica dominante nell'algoritmo primitivo della sommazione, e per l'altra parte al carattere di crescenza, alla *continuità* di generazione algoritmica dominante nell'algoritmo primitivo della graduazione. Ora è questa determinazione particolare della generazione dei numeri A, B e C, nella quale trovasi la neutralizzazione dei due algoritmi primitivi ed opposti, che forma precisamente la *legge fondamentale* della teoria della riproduzione. — Lo schema di questa legge è

$$A \times B = C \ldots\ldots\ldots (c),$$

ove si suppone che fra i tre numeri A, B, C, due qualunque di questi numeri possono esser dati dall'algoritmo della sommazione, ovvero, il che è lo stesso, che A o B essendo dati in tal modo, il numero C può rappresentare tutti i numeri formanti la sarie prodotta dalla generazione di sommazione. » (*Introd.* pag. 160).

Lo schema (*c*) contiene in sè implicitamente lo schema reciproco

$$\frac{C}{B} = A \ldots\ldots\ldots (d);$$

e su questi due schemi (*c*) e (*d*) sono fondate respettivamente la *moltiplicazione* e la *divisione*.

I numeri C e B potendo essere numeri qualunque dati dall'algoritmo della sommazione, la generazione del numero A, secondo lo schema reciproco (*d*), riceve in certi casi un carattere particolare, una determinazione più intellettuale, che pone questo numero fuori della serie dei numeri interi. Questo carattere particolare, dovuto all'influenza regolativa della ragione che comincia a manifestarsi nell'algoritmo della riproduzione, è ciò che distingue i numeri detti *numeri frazionarj*. (*Vedi* ALGEBRA. n.° 12).

Quanto alla funzione particolare del numero B nelle due relazioni reciproche (*c*) e (*d*), essa riguarda pure il concetto della *qualità*, e consiste nello stato *positivo* o *negativo* dell' esponente di graduazione di questo numero.

57. Noi abbiamo detto (54) che l' algoritmo della graduazione è fondato sulle *leggi regolative* della ragione. Sono queste leggi che recano l' ultima unità intellettuale nelle nostre cognizioni (53); senza l' influenza regolativa della ragione, la scienza dei numeri non sarebbe possibile, poichè saremmo ridotti al solo algoritmo della sommazione del quale sono identici e l' oggetto e le leggi. Ora, lo schema puramente algoritmico della graduazione è

$$A^{B} = C \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \,(e),$$

nel quale A, B e C possono essere numeri qualunque. Ma, in forza della *concezione generale* dell' oggetto di questo algoritmo, concezione che riposa sull' idea di *continuità indefinita* e ci presenta un numero qualunque come generato dalla moltiplicazione successiva e indefinita di un altro numero per sè stesso, noi vediamo che lo schema (e) è fondato sullo schema filosofico

$$\left(1 + \mu \cdot \frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = m \,.\,.\,.\,.\,.\, (f).$$

Infatti, questa forma, che si riferisce essenzialmente alla generazione indefinita, e che per conseguenza implica l' idea dell' *assoluto*, è evidentemente la sola forma possibile, sotto la quale ci è permesso di concepire, per mezzo dell' algoritmo elementare e primordiale di sommazione, che è un prodotto dell' intendimento, la *continuità indefinita* della generazione di un numero che domanda la ragione. Su questa generazione del numero *m* si fonda evidentemente la possibilità algoritmica di un *esponente* qualunque di questo numero, intero, frazionario, positivo, negativo o zero (*Introd.* pag. 163).

Noi vediamo qui manifestarsi in un modo evidente la natura della ragione, di quella facoltà superiore, tutte le concezioni o *idee pure* della quale sono dotate di universalità assoluta e che tende incessantemente verso l' incondizionale (30). Il suo principio supremo introduce nella scienza dei numeri le idee trascendenti di numeri infiniti e infinitamente piccoli, senza le quali le sarebbe impossibile di recare l' ultima unità intellettuale, non nella generazione dei numeri stessi, ma nella generazione della cognizione che abbiamo di questi numeri. Siccome la scienza sarebbe impossibile senza le leggi regolative della ragione, così si può giudicare del tatto filosofico dei geometri che hanno voluto bandire l' *infinito* dalle matematiche.

Lo schema (e) produce lo schema reciproco

$$C^{\frac{1}{B}} = A \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (g);$$

ed è su questi due schemi identici e reciproci che sono fondate le *potenze* e le *radici*.

I numeri C e B potendo esser numeri qualunque, la generazione del numero A secondo lo schema (*g*) riceve in certi casi una determinazione nuova e più *intellettuale* ancora di quella che, nella teoria della riproduzione, dà origine ai *numeri frazionarj*. Infatti, in forza dello schema (*f*), lo schema filosofico di

questa generazione è

$$A = \left(1 + \mu \cdot \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{B}} \dots . (h).$$

Ora, colla possibilità della generazione *intellettuale* del numero A, si vede in quest' ultimo schema che la generazione *sensibile* di questo numero, considerandola in generale, è necessariamente *indefinita*. In questa generazione indefinita, derivante dall'influenza regolativa e intellettuale della ragione nel dominio sensibile dell'intendimento, è riposto il carattere distintivo dei numeri detti *numeri irrazionali* (*Introd.* pag. 164).

Quanto alla funzione particolare del numero B nelle due relazioni reciproche (*e*) e (*g*), è veramente la stessa di quella del numero B nelle due relazioni reciproche (*c*) e (*d*) della riproduzione. Essa consiste nella *qualità* positiva o negativa dell' esponente di graduazione di questo numero.

Le relazioni reciproche (e) e (*g*) presentano un caso singolare, ed è quello in cui, essendo C un numero negativo, B è un numero pari. Ne risulta che la generazione del numero A implica in questo caso una opposizione intellettuale o un'*antinomia*, come dicesi nella filosofia trascendentale. — « Questa antinomia nasce perchè lo schema filosofico (*f*), che è il principio o il fondamento della possibilità dell' algoritmo della graduazione, non riguarda che la generazione della *quantità* del numero *m*, la quale, presa in generale, è realmente suscettibile di una continuità indefinita; mentre la *qualità* di questo numero, come prodotta essenzialmente ed esclusivamente dall' algoritmo della sommazione, implica necessariamente la discontinuità che è il carattere di quest'ultimo algoritmo, vale a dire che implica necessariamente l'opposizione discontinua dello stato positivo collo stato negativo del numero *m*. Ed infatti, quando si tratta di un numero negativo C, prodotto dalla generazione di graduazione A^{B}, non si può, supponendo reale il numero A, considerare indifferentemente l'esponente B come un numero pari o impari, perchè sarebbe questo un supporre, nella generazione del numero negativo C, una continuità indefinita che realmente esso non ha. — Nulladimeno ciò che non è possibile in *realtà*, nel dominio sensibile dell' intendimento, lo è almeno in *idea*, nel dominio intellettuale della ragione; e quest' ultima facoltà non desiste, per quanto è in lei, dal ridurre tutte le funzioni algoritmiche alla legge di continuità indefinita, o in generale alla legge dell'assoluto. » (*Introd.* pag. 165).

I numeri corrispondenti alla generazione ideale

$$\sqrt[2n]{-C}$$

sono quelli che impropriamente vengono chiamati *numeri immaginarj*. (*Vedi* IMMAGINARIO).

58. Passiamo alle funzioni algoritmiche *derivate*. Come avremo luogo di ripetere all'articolo MATEMATICHE, esistono solamente due funzioni derivate la cui derivazione sia *necessaria*, e questa necessità le fa porre nel numero degli *algoritmi elementari*. Poche parole basteranno quì per accennare la loro deduzione.

I tre algoritmi primitivi sembrerebbero ammettere quattro derivazioni necessarie, corrispondenti alle quattro maniere differenti nelle quali possono essere tra loro combinati, prendendoli primieramente a due a due, e quindi tutti e tre.

Ma considerando in particolare la natura di questi algoritmi, si scorge facilmente che la combinazione dell' algoritmo della sommazione con quello della graduazione si trova già nell' origine dell' algoritmo di riproduzione; dimanierachè non rimangono altre combinazioni realmente differenti, che quelle dell' algoritmo della riproduzione con gli algoritmi respettivi della sommazione e della graduazione. Sono queste la combinazioni che producono i due algoritmi elementari *derivati*, che diconsi la NUMERAZIONE e le FACOLTA'. *Vedi* MATEMATICHE, n.° 4.

59. Questi due algoritmi derivati chiuderebbero la parte elementare della teoria dell' algoritmia, se nella natura della numerazione e delle facoltà non si trovasse il principio di una conseguenza ulteriore ed egualmente necessaria. Tale principio consiste in questo, che la riproduzione, che è comune a questi due algoritmi derivati, stabilisce tra essi un legame ed una specie di unità; donde risulta, come conclusione necessaria, la proposizione, almeno problematica, della transizione dalla teoria della numerazione a quella delle facoltà, e reciprocamente dalla teoria delle facoltà a quella della numerazione. Gli schemi di queste due questioni necessarie, che debbono compiere definitivamente il sistema di tutti gli algoritmi elementari possibili per l' uomo, sono:

1.° Transizione dalla numerazione alle facoltà

$$\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \text{ec.} = \varphi(x_1 . x_2 . x_3 . \text{ec.});$$

2. Transizione dalle facoltà alla numerazione

$$\varphi x_1 . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \text{ec.} = \varphi(x_1 + x_2 + x_3 + \text{ec.}),$$

indicando con x_1, x_2, x_3 ec. delle quantità variabili qualunque, e colla caratterisca φ le funzioni incognite respettive che possono corrispondere a tali questioni (*Introd.* pag. 10).

60. Per la prima di queste due questioni, è primieramente evidente che la funzione φ, di cui si tratta, è l' esponente di una quantità data che forma, con questo esponente, il valore della quantità variabile; poichè, essendo a una quantità costante, se si ha

$$a^{\varphi x} = x,$$

si avrà pure

$$x_1 . x_2 . x_3 . \text{ec.} = a^{\varphi x_1} . a^{\varphi x_2} . a^{\varphi x_3} . \text{ec.} = a^{\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \text{ec.}},$$

e per conseguenza

$$\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \text{ec.} = \varphi(x_1 . x_2 . x_3 . \text{ec.}).$$

Non rimane dunque che a scoprire la natura di questa funzione φ, ed a sapere se essa è una funzione derivata *elementare*, o soltanto una combinazione delle altre funzioni elementari. Ora, la natura *trascendente* di questa funzione, che costituisce i LOGARITMI, c' insegna che essa è una funzione derivata *elementare*. *Vedi* LOGARITMI. n.° 11.

61. Quanto alla seconda delle due questioni (59) proposte dalla natura stessa del nostro sapere, è pure evidente che le funzioni esponenziali che appartengono interamente all'algoritmo della graduazione, le corrispondono in un modo completo. Infatti, se a ed m sono quantità costanti, si avrà la funzione esponenziale

$$\varphi x = a^{mx},$$

che dà

$$\varphi x_1 . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \text{ec.} = a^{mx_1} . a^{mx_2} . a^{mx_3} . \text{ec.} = a^{m(x_1+x_2+x_3)} \text{ec,}$$

e per conseguenza

$$\varphi x_1 . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \text{ec.} = \varphi(x_1+x_2+x_3+\text{ec.}).$$

Così, considerando le funzioni esponenziali in tutta la loro generalità, la seconda delle due questioni razionali delle quali si tratta, la transizione dalle facoltà alla numerazione, non darebbe luogo a verun nuovo algoritmo. Non potrebbe dunque qui trovarsene alcuno che nel caso particolare in coi l'esponente m ricevesse un valore che ponesse le funzioni esponenziali fuori della classe delle potenze ordinarie e suscettibili di una immediata significazione. Questo caso ha luogo effettivamente quando l'esponente m è *immaginario*, e particolarmente quando si ha $m = \sqrt{-1}$. (*Introd.* pag. 15).

62. Per determinare la natura della funzione trascendente

$$\varphi x = a^{x\sqrt{-1}},$$

osserviamo che in generale si ha

$$z = 1 + \frac{1}{1} Lz + \frac{1}{1.2}(Lz)^2 + \frac{1}{1.2.3}(Lz)^3 + \text{ec.}$$

essendo z un numero qualunque e Lz il suo logaritmo naturale (*Vedi* Logaritmo n.° 15), e per conseguenza

$$a^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{La}{1} x\sqrt{-1} - \frac{L^2a}{1.2} x^2 - \frac{L^3a}{1.2.3} x^3\sqrt{-1} + \text{ec.} \dots (i),$$

facendo $a^{x\sqrt{-1}} = z$, donde $x\sqrt{-1} . La = Lz$.

L'espressione (i) è composta di due serie, l'una reale, l'altra *immaginaria*. Indicando con Fx la prima di queste serie e con fx la somma dei coefficienti di $\sqrt{-1}$ nella seconda, si ha

$$Fx = 1 - \frac{(La)^2x^2}{1.2} + \frac{(La)^4x^4}{1.2.3.4} - \frac{(La)^6x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

$$fx = La . x - \frac{(La)^3x^3}{1.2.3} + \frac{(La)^5x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{(La)^7x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$$

Così, la natura della funzione φx in questione sarà dunque

$$\varphi x = Fx + fx\sqrt{-1},$$

nella quale le due quantità Fx e fx sono due funzioni determinate di x, suscettibili di valori reali.

Ma, a motivo del doppio segno $\pm$ del radicale che in un modo generale si trova nelle funzioni φx, si hanno le due relazioni

$$Fx + fx\sqrt{-1} = a^{+x\sqrt{-1}}$$

$$Fx - fx\sqrt{-1} = a^{-x\sqrt{-1}},$$

le quali danno

$$Fx = \frac{1}{2} \cdot \left\{ a^{+x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}} \right\}$$

$$fx = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \left\{ a^{+x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}} \right\}.$$

Tali sono dunque definitivamente le funzioni nuove suscettibili di valori reali, le quali trovansi implicita nella funzione φx in questione. L'ultima di queste funzioni è ciò che dicesi Seno e la prima è ciò che dicesi Coseno. Per maggiori dettagli vedasi l'articolo Seno.

Così le funzioni chiamate in generale *Seni* sono funzioni algoritmiche *elementari*; e la Teoria dei seni forma uno dei rami necessarj dell'algoritmia.

63. Fin qui non abbiamo considerato la teoria algoritmica elementare che nel punto di vista *trascendentale*, punto di vista che serve a scoprire la *generazione stessa* delle quantità; ci resterebbe dunque a considerarla nel punto di vista *logico*; ma siccome quest'ultimo non serve a scoprire che la *relazione reciproca* delle quantità, relazione che non può aver quì leggi particolari, così rimandando il lettore a ciò che in questo proposito diremo all'articolo Matematiche, n.° 7, riassumeremo tutta la teoria elementare nel quadro seguente, che presenta i principj filosofici di quello che si trova all'articolo e numero citati.

TEORIA dell' Algoritmia. — Parte elementare.
Generazione (punto di vista trascendentale). Costituzione algoritmica.
Algoritmi teorici primitivi.
Poli opposti, fondati sulle facoltà opposte dell' intendimento e della ragione.
Generazione discontinua. Sommazione.
Progressiva. — Addizione.
Regressiva. Sottrazione.
Numeri positivi.
Numeri negativi.
Generazione continua. Graduazione.
Progressiva. — Potenze.
Regressiva. Radici.
Numeri razionali.
Numeri irrazionali.
Reali.
Immaginarj.
Neutralizzazione degli algoritmi opposti, fondata sulla facoltà intermedia del giudizio.
Riproduzione.
Progressiva. — Moltiplicazione.
Regressiva. Divisione.
Numeri interi.
Numeri frazionarj.
Algoritmi teorici derivati.
Immediati.
Combinazione della riproduzione colla sommazione. — Numerazione.
Combinazione della riproduzione colla graduazione. — Facolta'.
Mediati.
Transizione dalla numerazione alle facoltà. — Logaritmi.
Transizione dalle facoltà alla numerazione. — Seni.
Relazione (punto di vista logico). Comparazione algoritmica.
Relazione di eguaglianza. — Eguaglianza.
Relazione d'ineguaglianza. Rapporti
Rapporto di sommazione. — Rapporto aritmetico.
Rapporto di riproduzione. — Rapporto geometrico.

64. » Tornando a portare i nostri sguardi, dice Wronski (*Introd.* pag. 29), sui principj dai quali abbiamo fatto derivare tutti gli algoritmi elementari, vedremo facilmente che la possibilità di questi differenti algoritmi nasce dalla dualità intellettuale che presentano le teorie della sommazione e della graduazione; vale a dire, risalendo a più alta origine, che essa nasce dall' opposizione delle leggi costitutive dell' intendimento dalle quali deriva l'algoritmo primitivo della sommazione, e delle leggi regolative della ragione dalle quali deriva l' algoritmo della graduazione. Ma questa specie di polarità intellettuale, se così mi è lecito di esprimermi, che si trova nell'applicazione del sapere umano alla determinazione delle leggi delle quantità algoritmiche, deve evidentemente incontrarsi in tutte queste quantità, perchè il principio di questa applicazione è lo stesso per tutte le quantità algoritmiche in generale. Ne risulta pertanto in queste quantità considerate obiettivamente, non una semplice neutralizzazione o combinazione, ma una vera *riunione sistematica* delle due funzioni intellettuali che hanno per oggetto i due algoritmi primitivi ed opposti, la sommazione e la graduazione. Questa riunione sistematica introduce, nella quantità algoritmiche, nuove determinazioni della loro natura, nuove leggi teoriche; e sono queste leggi che formano l' oggetto della parte sistematica della teoria algoritmica.

» Ma qui possiamo collocarci in due punti di vista differenti per considerare la riunione sistematica della quale si tratta; in uno, che è il punto di vista *trascendentale*, si scopre l' influenza di questa riunione sulla *generazione stessa* (la costituzione) delle quantità algoritmiche; nell' altro, che è puramente un punto di vista *logico*, si scopre l' influenza di questa riunione sulla *relazione reciproca* (la comparazione) di queste quantità. — Nel primo aspetto, la riunione sistematica della quale si tratta dà luogo, nella generazione delle quantità algoritmiche, ad una unità trascendentale tra i due algoritmi primitivi, la sommazione e la graduazione; unità le cui leggi formano l' oggetto di varj rami separati, che potrebbero chiamarsi in generale: Teoria della costituzione algoritmica. Nel secondo aspetto, questa riunione dà luogo, nella relazione delle quantità algoritmiche, ad una unità logica tra i due algoritmi primitivi, la sommazione e la graduazione; unità le cui leggi formano egualmente l' oggetto di varj rami separati, che potrebbero chiamarsi in generale: Teoria della comparazione algoritmica.

» La riunione di due algoritmi può in generale esser considerata, o come *diversità* sistematica, o come *identità* sistematica: nel primo caso, questi due algoritmi sono considerati come distinti l' uno dall' altro, nella generazione di una quantità algoritmica; nel secondo caso, questi algoritmi sono considerati come indistinti l' uno dall' altro, nella generazione di una tal quantità. — Ora, i due algoritmi primitivi, considerati rapporto alla generazione delle quantità, sono interamente opposti nella loro natura, e non potrebbero per questa ragione concorrere indistintamente alla generazione di una quantità; per conseguenza non possono essi, nella loro riunione, dar luogo che ad una diversità sistematica. Ma gli algoritmi derivati immediati, la numerazione e le facoltà, che riguardano la neutralizzazione dei due algoritmi primitivi opposti, e che di più sono legati da questa neutralizzazione, mediante l' algoritmo della riproduzione, possono concorrere indistintamente, almeno in forza dell' unità del loro legame, alla generazione di una quantità: questi due algoritmi derivati debbono dunque presentare nella loro riunione una vera identità sistematica. »

All' articolo Matematiche, n. 8, 9, 10, 11 e 12, daremo la deduzione delle diverse parti che compongono la Costituzione e la Comparazione della Teoria algoritmica, perciò ci contenteremo adesso di rinviare il lettore a quella esposizione, le cui particolarità ci condurrebbero troppo oltre.

65. Passiamo alla Tecnia dell' algoritmia, che è il secondo ramo fondamentale della scienza dei numeri, di cui abbiamo esposto l'origine intellettuale (52), e di cui indicheremo le diverse parti alla parola Matematiche, n. 15, 16, 17, 18, ec.

Esaminando i differenti algoritmi elementari e sistematici che compongono la teoria dell'algoritmia, si scorge senza difficoltà che essi sono altrettanti metodi intellettuali, costituenti immediatamente la generazione primitiva o la costruzione delle quantità algoritmiche, e che per conseguenza sono indipendenti da ogni concetto di *fine* o di *scopo*; talmentechè la teoria dell'algoritmia non è che una semplice *speculazione* fondata sulla facoltà dell'intelletto in generale. Ma, come vedremo altrove (*Vedi* Matematiche, n.° 15), oltre la *generazione primaria* data dagli algoritmi teorici, la scienza dei numeri sarebbe impossibile senza una *generazione secondaria*, che abbracciasse tutti i modi della generazione algoritmica, riducendo le forme primarie a forme secondarie equivalenti, vale a dire somministrando in tutti i casi la *valutazione* o la *misura* delle quantità.

Così, sebbene questa riduzione non possa operarsi che per mezzo delle forme primarie medesime, poichè non saprebbe immaginarsi alcun altro metodo possibile, nulladimeno essa non è contenuta nè esplicitamente nè implicitamente in queste forme primarie di generazione, perchè allora essa non sarebbe più *necessaria*. Questa riduzione esce dunque dal dominio della *speculazione algoritmica* regolata dall' Intelletto e costituente la *teoria dell'algoritmia*; essa forma una specie di *azione algoritmica*, essendo evidentemente un fine o uno scopo proprio della Volontà; e come tale, questa riduzione presenta un metodo artificiale, un'arte (τέχνη), e costituisce ciò che noi chiamiamo *Tecnia dell'algoritmia* (Wronski, *Philosophie de la Technie*). Di più, siccome abbiamo veduto ancora che i metodi della tecnia erano universali, così possiamo definire questo ramo della scienza dei numeri dicendo che esso ha per oggetto l'Universalità nella generazione delle quantità.

A motivo appunto di questa universalità degli algoritmi tecnici elementari che si compendia in un solo algoritmo tecnico sistematico, il sig. Wronski ha potuto proporsi il gran problema di abbracciare in una sola legge tutte le diverse leggi possibili della generazione delle quantità, vale a dire tutta la scienza dei numeri, e per conseguenza tutte le matematiche, poichè l'algoritmia forma evidentemente l'essenza di queste scienze. Questa *legge suprema*, che compisce l'edifizio delle matematiche elevato dalla filosofia, è stata presentata, nel 1811, all'Istituto di Francia; a questo dotto corpo, per l'organo di Lagrange e di Lacroix, suoi commissarj, ne ha riconosciuta l'universalità in questi termini: » Ma ciò che » maggiormente ha colpito i vostri commissarj nella memoria del sig. Wronski, » è l'aver egli tratto dalla sua formula tutte quelle fin qui conosciute per lo avi» luppo delle funzioni, le quali anzi divengono essi *particolarissimi* di quella » da lui proposta. »

66. La forma di questa legge suprema, segnata (𝔉) all' n.° 22 dell'articolo Matematiche, essendo identica col principio primo e più semplice, cioè coll'algoritmo primitivo e primordiale della sommazione, ne risulta che l'intero sistema della nostra cognizioni algoritmiche si trova interamente compiuto. Il nostro scopo non essendo stato altro che quello di facilitare lo studio delle opere del sig. Wronski, e di dare almeno un' idea dell'importanza di una filosofia, che viene finalmente a spiegare e compiere la scienza del geometra, quella scienza che regola le sostanze dell'universo, perciò dobbiamo ora limitarci a rimandare il lettore alle opere stesse. Se le grandi cose che queste contengono sono ancora mal note, questo non fa sì che esse non siano state ormai annunziate al pubblico, e Wronski può esclamare con Keplero: *Io pubblico le mie opere; che esse siano intese o*

dall'età presente o dalla posterità, ciò poco m'importa: Dio non ha atteso seimila anni un contemplatore delle sue opere?

FINCK. *Vedi* FINKE.

FINEO (ORONZIO), matematico e letterato, nato a Brianzone nel 1494, deve annoverarsi tra i dotti di quel tempo che maggiormente contribuirono coi loro lavori a risvegliare il gusto delle matematiche, e per conseguenza a favorire i progressi di tali scienze. Il suo merito lo fece scegliere da Francesco I per professare le matematiche nel collegio reale, impiego che tenne con lustro fino alla sua morte avvenuta il 6 Ottobre 1555. Si hanno di lui parecchi trattati sulle matematiche, sull'ottica, sulla geografia e sull'astronomia, o piuttosto sull'astrologia, perchè sotto quest'ultimo rapporto Oronzio Fineo non era al di sopra degli errori del suo secolo. I suoi scritti sono oggi dimenticati, nè meritano certamente di esser tratti dall'oblio in cui son caduti; ma dobbiamo riflettere che, nel secolo nel quale comparvero, le cognizioni matematiche erano ristrettissime, e che i cultori di tali scienze non erano punto incoraggiati. Ecco l'elenco delle principali sue opere: I *Protomathesis, seu Opera mathematica*, Parigi, 1532, in-fol: questa raccolta contiene quattro libri di aritmetica, due di geometria, cinque di cosmografia, e quattro sugli orologi a sole: essa fu tradotta in italiano da Cosimo Bartoli, Venezia 1587, in-4; II *Quadrans astrolobicus*, Parigi, 1534, in fol.; III *La composition et l'usoge du carré géométrique*, Parigi, 1566, in-4; IV *Quadratura circuli et demonstrationes variae*, Parigi, 1544, in fol.; V *De rebus mathematicis haetenus desideratis libri IV*, Parigi, 1566, in-fol. La quadratura del circolo, la duplicazione del cubo, l'inscrizione nel circolo dei poligoni di lati in numero impari formano il soggetto delle due opere precedenti. Non occorre il dire che molti sono gli errori che vi s'incontrano, e che furono rilevati da Giovanni Borrel (*Vedi* BURSO) nel suo libro *De quadratura circuli*, e da Pietro Nunnes nel suo scritto: *De erratis Orontii*. L'errore per cui credeva di aver trovato la quadratura del circolo consisteva in questo, ch'ei faceva la circonferenza del circulo eguale alla minore delle due medie proporzionali tra il contorno del quadrato iscritto e quello del quadrato circoscritto. VI *De speculo ustorio ignem ad prapositam distantiam generante*, Parigi, 1551, in-4. VII *De re et praxi geometrica libri tres*, Parigi, 1555, in-4: tradotti in francese da Pietro Forcadel, Parigi, 1570, in-4. Maggiori notizie e più estese indicazioni su questo dotto si trovano nella *Biografia Universale*.

FINITO. Tutto ciò che ha limiti è *finito*. *Vedi* alla parola CALCOLO DIFFERENZIALE n.° 1, la distinzione trascendentale dell'idea del *finito* e dell'*infinito*.

FINKE (TOMMASO), medico ed astronomo, nato a Flensburgo nel Sud-Jutland, nel 1561, dopo aver fatti eccellenti studj elementari si recò a Strasburgo, ove per cinque anni frequentò le lezioni di quella università. Visitò quindi le principali città della Germania, della Svizzera e dell'Italia, conversò coi dotti più celebri di quel tempo, e dovunque fu ricevuto colla distinzione che meritavano i suoi talenti e le sue cognizioni. Tornato in Danimarca, ottenne nel 1591 nella università di Copenaghen una cattedra di matematiche, dalla quale passò nel 1603 a quella di medicina, che occupò fino alla sua morte avvenuta nel 1656. I principali suoi scritti sono: I *Geometriae rotundi libri XIV*, Basilea, 1583 e 1591, in-4; II *De constitutione matheseos*, Copenaghen, 1591, in-4; III *Horoscopographia, sive de inveniendo stellarum situ astrologio*, Sleswig, 1591 in-4; IV *De ortu et occasu siderum*, Copenaghen, 1595, in-4; V *Methodica tractatio doctrinae sphaericae*, Coburgo, 1626, in-12. Nella *Bibliografia astronomica* di Lalande si troverà un elenco compiuto di tutti gli scritti astronomici di Finke.

FIRMAMENTO (*Astron.*). Nome col quale sovente s'indica il cielo in generale.

Gli antichi chiamavano *firmamento* l' ottavo cielo, cioè il cielo delle stelle fisse, di cui si faceva il primo mobile, così chiamato perchè si supponeva che in sè racchiudesse tutti i cieli dei pianeti ossia i cieli inferiori.

FISCHER (Giovanni Carlo), matematico ed astronomo tedesco, nacque nel 1760 ad Altstaedt. Fu professore di matematiche in vari luoghi della Germania e finalmente nell' università di Greifswalde, ove morì nel 1833. Ha scritto in tedesco molte opere assai stimate, tra le quali citeremo le seguenti: I *Elementi di aritmetica*, Jena, 1789; II *Introduzione a tutte le scienze del calcolo*, ivi, 1791; III *Elementi di matematiche pure*, ivi, 1792; IV *Elementi delle scienze meccaniche*, ivi, 1793; V *Elementi delle scienze ottiche e astronomiche*, ivi, 1794; VI *Elementi di geometria trascendente*, ivi, 1796; VII *Elementi di fisica*, ivi, 1794; VIII *Dizionario di Fisica*, ivi, 1798; 1825, 8 vol.; IX *Corso completo di matematiche*, Lipsia, 1807, 2 vol.; X *Primi principj del calcolo differenziale, del calcolo integrale e del calcolo delle variazioni*, Elberfeld, 1810; XI *Matematiche pure elementari*, Lipsia, 1820.

FISCHER (Gottlieb Augusto), matematico sassone, nacque nel 1763 nel villaggio di Okrylla da poveri genitori, che non gli poterono far dare che i primi elementi dell' educazione in una scuola di Meissen. Il giovane Fischer divenne abilissimo nell' aritmetica; ma le sue circostanze non avendogli permesso di proseguire i suoi studj, entrò nelle truppe sassoni, ed in mezzo al tumulto del campo e alle distrazioni della vita militare, gli riuscì colla sua perseveranza di rendersi profondo nelle matematiche e specialmente nelle loro applicazioni all' arte militare. I suoi talenti lo fecero nominare nel 1794 istruttore di matematiche dei paggi dell' elettore di Sassonia a Dresda: nel 1815 passò alla scuola dei cadetti e finalmente nella scuola politecnica recentemente istituita in Sassonia. Delle sue opere, che tutte si distinguono per una particolare chiarezza e concisione, citeremo le seguenti: I *L' arte di fare i calcoli mentali in qualsivoglia oggetto, fisico, militare*, ec., Dresda, 1808; II *Manuale dei primi elementi dell' aritmetica e dell' algebra*, ivi, 1823-26, 2 vol.; III *Manuale dei primi elementi di geometria*, ivi, 1818; IV *Manuale di trigonometria rettilineo e sferica*, Lipsia, 1819; V *Elementi di statica e di dinamica*, Dresda, 1822; VI *Elementi d' idrostatica e d' idraulica*, ivi, 1824; VII *Geometria delle costruzioni*, ivi, 1825; VIII *Geometria delle curve*, ivi, 1828. Fischer morì l' 8 Febbrajo 1832.

FISICO-MATEMATICHE. *Vedi* Matematiche applicate.

FISSO (*Astron.*). Si chiamano in astronomia *stelle fisse* gli astri che sembrano non avere un movimento proprio per distinguerli dai pianeti che diconsi stelle erranti. *Vedi* Stella, Pianeta, ec.

FIXLMILLNER (Placido), astronomo tedesco, nato nel 1721 nel villaggio di Achleuthen presso Cremsmunster nell' alta Austria. Ne' suoi primi anni aveva mostrato amore per le matematiche, e forse vi si sarebbe dedicato interamente, se entrato essendo nel 1737 nell' ordine dei benedettini non avesse dovuto applicarsi alla teologia, alle lingue orientali e al diritto canonico che fu in breve chiamato a professare nell' abazia di Cremsmunster. Il passaggio però di Venere sul disco del sole, che tanto richiamò nel 1761 l' attenzione dei dotti, risvegliò l' antica inclinazione del p. Fixlmillner, che da quel momento, quantunque non dismettesse gli altri offici dei quali era incaricato, pose in grande attività l' osservatorio del suo convento, nè trascurò nulla per rendersi utile all' astronomia. Determinò con molta esattezza la latitudine e la longitudine del suo osservatorio, e pubblicò i suoi calcoli in un' opera intitolata: *Meridianus speculae astronomicae cremisfanensis*, Steyer, 1765, in-4; diede poi alla luce nel 1776 il suo *Decennium astronomicum*, Steyer, in-4, che è una raccolta di osservazioni, di cui fanno anch' oggi molto conto gli astronomi. Fu uno dei primi che calcolarono l' orbita del pianeta

Urano. Fece pure un gran numero di osservazioni di Mercurio, di cui poi si valse Lalande per formare le tavole di questo pianeta. Morì nel 1791, e il p. Derfflinger, che gli successe nell'osservatorio, ha pubblicato un'opera postuma col titolo di *Acta astronomica cremisfanensia a Placido Fixlmillner*, Steyer, 1791, in-4, la quale contiene le osservazioni dal 1776 al 1791, e varie memorie sulla parallasse del sole, sull'occultazione di Saturno nel 1775, sull'aberrazione e sulla nutazione nel calcolo dei pianeti, ec. Per maggiori particolarità su questo dotto si legga l'articolo che lo riguarda nella *Biografia Universale*.

FLAGELLO (*Mec.*) Instrumento composto di due bastoni di legno duro, disposti lentamente capo a capo per mezzo di una correggia, e il quale serve a battere il grano.

Si chiama ancora *Flagello*, la verga di ferro all'estremità della quale sono sospesi i piatti di una bilancia. *Vedi* Bilancia.

FLAMSTEED (Giovanni), celebre astronomo inglese, nato il 19 Agosto 1646, a Derby piccola città del Derbyshire, si è reso sommamente benemerito dell'astronomia per le importanti e numerose sue osservazioni. Una inclinazione naturale alla solitudine e alla meditazione lo portò di buon'ora alla contemplazione del cielo. Il caso avendo fatto che gli cadesse tra le mani un trattato della sfera di Sacrobosco, lo lesse con avidità, e fu questa la sua prima guida nello stadio difficile dell'astronomia, alla quale si diede fino da quel momento con tutto quell'ardore e quella passione di che sono suscettibili le indoli malinconiche ed austere. Non si sa da quali maestri prendesse consigli per la direzione de' suoi studj, come pure è ignoto di quali strumenti facesse dapprima uso; ma è certo che i suoi progressi furono rapidi, e si appalesò tosto maestro nella nobile carriera che il suo genio gli aveva aperta. Fino dall'anno 1669, Flamsteed presentò alla Società Reale di Londra delle effemeridi per l'anno seguente, lavoro notabilissimo, che richiamò sul giovane astronomo l'attenzione dei dotti, e dimostrò ch'ei possedeva simultaneamente profonde cognizioni teoriche sulla scienza, e pratica somma nella osservazione dei fenomeni celesti. Nel 1672 pubblicò una memoria sulla *equazione del tempo* intitolata: *De aequatione temporis diatriba*, Londra, in-4, che molto accrebbe la sua reputazione e le pose in relazione coi principali astronomi dell'Europa. Non molto dopo pubblicò un trattato sulla teoria della luna di Oroccio o Horrox. Quest'astronomo non avendo avuto il tempo di calcolarne le tavole, Flamsteed, adottando l'ipotesi che da esso veniva proposta per ispiegare i movimenti di questo corpo celeste, riempì la lacuna importante che con rincrescimento vedevasi nel di lui lavoro.

Già l'Inghilterra lo annoverava tra i dotti suoi più illustri, quando Flamsteed venne a Londra verso l'anno 1673. Fu allora ch'egli senza rinunziare agli studj suoi favoriti entrò negli ordini e fu provvisto di un benefizio nella contea di Surrey del quale godè fino alla sua morte. Intanto stretto avendo amicizia col cavaliere Moore, questi lo propose per la direzione del nuovo osservatorio che faceva erigere a Greenwich il re Carlo II. Questo principe, quantunque immerso nelle dissipazioni, cercava di secondare il genio dell'illustre nazione sulla quale regnava e che occupa un posto sì grande nella storia dello spirito umano, poichè ha sempre preceduto le altre nazioni dell'Europa colle sue istituzioni e colle sue ricerche scientifiche. L'osservatorio fu terminato nel mese di Luglio 1776 e Flamsteed vi entrò nel mese successivo: da quel momento la sua vita fu interamente consacrata alla scienza, e i suoi giorni, che segnati sono da pochi avvenimenti, non si contano che pei suoi lavori di osservazione ai quali si diede esclusivamente. Lo scopo principale della fondazione dell'osservatorio di Greenwich era stato quello di rettificare le posizioni delle stelle fisse e di osservare con maggiore accuratezza i movimenti della luna, onde poter giungere a stabilire

una teoria esatta di questo pianeta che potesse favorire i progressi dell' astronomia e della navigazione. Flamsteed si occupò con perseveranza di questi due oggetti, e nel tempo stesso raccolsa un numero considerabile di osservazioni generali.

Già da quarant' anni durava il suo lavoro; i suoi risultamenti e le sue osservazioni dovevano essere di una somma utilità per l' astronomia; ne era desiderata vivamente la pubblicazione; ma Flamsteed non ancora contento del suo lavoro persisteva a non volerlo dare alla luce. Finalmente il governo inglese si vide obbligato ad usare della sua autorità, e la regina Anna commise ad Halley di raccogliere ed ordinare i diversi materiali raccolti da Flamsteed e di presederne quindi la stampa. L' opera infatti venne in luce nel 1712 col seguente titolo: *Historiae coelestis libri duo*, Londra, in-fol. Vi si vedono le osservazioni cui Flamsteed aveva fatte da quando era entrato nell' osservatorio fino al 1705, ed il suo famoso catalogo di stelle, conosciuto col nome di *Catalogo britannico*. Il venerabile direttore di Greenwich, contro la cui volontà era stata stampata l'opera, non volle riconoscerla per suo lavoro, ed intraprese da sè stesso la pubblicazione della raccolta delle sue osservazioni: essa comparve sotto lo stesso titolo, nel 1725, varj anni dopo la sua morte, in tre volumi in folio. Tale opera è una delle più belle raccolte che possieda l' astronomia. È dessa il ricco deposito della osservazioni che Flamsteed aveva fatte per 50 anni tanto a Derby, quanto a Londra e a Greenwich. Il primo volume contiene tutte le osservazioni separate dell' autore, le quali concernono le stelle fisse, i pianeti, le comete, le macchie del sole e i satelliti di Giove. Il secondo contiene i passaggi delle stelle fisse e dei pianeti pel meridiano, coi luoghi che ne risultano. Il terzo infine contiene interessanti prolegomeni intorno alla storia dell' astronomia; la descrizione degli strumenti di Ticone; il *Catalogo britannico*; i cataloghi di Tolomeo, di Olog-beg, di Ticone, di Evelio, del Langravio di Assia; il piccolo catalogo delle stelle australi osservate da Halley; un catalogo particolare di sessantasette stelle zodiacali, la cui occultazione occasionata dalla luna e dagli altri pianeti ne rende importantissima l' osservazione; e finalmente tutto ciò che gli uomini operato avevano intorno alle stelle dal rinascimento dell' astronomia in poi. Il *Catalogo* di Flamsteed era il più vasto che fino allora fosse ancora stato eseguito. Vi si rinviene la posizione di 2884 stelle, e supera in ciò tutti gli altri cataloghi contenuti nel terzo volume della *Storia celeste*: gli astronomi lo avevano continuamente per le mani ed è stato la base di quasi tutte le ricerche astronomiche. Ora tale catalogo non è più preciso quanto quelli degli astronomi moderni, nè può essere direttamente usato nelle ricerche delicate, perchè nel determinare le posizioni delle stelle non si è tenuto conto nè della nutazione nè dell' aberrazione, che al tempo di Flamsteed non si conoscevano. La Herschel ha pubblicato un volume di ricerche, di osservazioni e di correzioni al catalogo di Flamsteed, e la sua opera può considerarsi un supplemento necessario alla *Storia celeste*. Lalande nel volume delle *Effemeridi* per gli anni 1785-92 ha dato una nuova edizione del *Catalogo britannico*. Le importanti correzioni che vi ha fatto rendono tale edizione preferibile a quella di Londra del 1725.

Sulla scorta del suo catalogo, Flamsteed compose un grande *Atlante celeste* che fu pubblicato a Londra nel 1729 in foglio massimo. Questa magnifica raccolta di carti celesti, una delle migliori che siano state fatte, è composta di ventotto carte, lunga ognuna ventitre pollici e alta 18 in 19. Vi ha una prefazione intorno alla storia delle costellazioni, e circa il difetto delle figure di Bayer. Tale atlante venne ridotto al terzo da Fortin nel 1776 in 30 carte assai bene incise. Questa riduzione, in cui la posizione delle stelle venne calcolata per l' anno 1780, è stata riveduta da Lemonnier, aumentata di diverse osservazioni da Pasu-

mot, di un planisfero di Lacaille per le stelle australi, e di un altro per imparare a conoscere le stelle per mezzo dei loro allineamenti. Lalande ne pubblicò nel 1795 una nuova edizione, corretta e aumentata, colla posizione delle stelle ridotta al 1.° Gennajo 1800. Le *Istituzioni astronomiche* di Keill, tradotte da Lemonnier e pubblicate a Parigi nel 1746, contengono alcune tavole della luna di Flamsteed. Occorrono altresì nelle *Opere di Horrox*, pubblicate a Londra nel 1673, varie osservazioni e tavole del sole dello stesso autore. Finalmente ha pubblicato: *The Doctrine of the Sphere, graunded on the motion of the earth and the antient Pythagorean or Copernican system of the world*, Londra, 1680, in-4. Oggetto di quest' opera, che esiste nel *System of Mathematicks* di Moore, è un nuovo metodo per calcolare gli ecclissi del sole mediante la projezione dell' ombra della luna sul disco della terra. Flamsteed morì a Londra il 31 Dicembre 1719.

FLAUGERGUES (Onorato), distinto astronomo francese, nato il 16 Maggio 1755 a Viviers nel Vivarese. Può dirsi che fino dall' infanzia si manifestasse in lui una decisa inclinazione per lo studio dell' astronomia, inclinazione che si rafforzò in seguito per i suffragj che alcune sue memorie ottennero da varie dotte accademie. Entrato in corrispondenza con Lalande, fu nel 1796 per le di lui premure nominato socio corrispondente dell' Istituto, e nel 1797 direttore dell' osservatorio di Marsiglia, carica che però non volle accettare per non allontanarsi dal luogo suo nativo, ove morì nel 1835. Dal 1798 in poi quest'astronomo, altrettanto dotto quanto modesto, aveva arricchito di osservazioni, di calcoli e di tavole la *Connaissance des tems*. Molte interessanti memorie ha lasciato in varie raccolte accademiche, e nel 1815 una profonda sua dissertazione riportò il premio proposto dall' Accademia di Nimes sul seguente quesito: *Sottoporre ad una accurata discussione tutte le diverse ipotesi fino ad oggi immaginate per spiegare l' apparenza conosciuta sotto i nomi di coda, capigliatura, a barba delle comete*.

FLESSO CONTRARIO (*Geom. Analit.*). Si dice *punto di flesso contrario* il punto in cui una curva cessa di presentare la sua concavità ad una linea retta che non passa per questo punto, e comincia a presentarle la sua convessità, o viceversa. Ma, quando la retta passa pel punto di flesso contrario, la curva le presenta la sola concavità o la sola convessità da ambedue le parti.

L' indizio analitico di un punto di flesso contrario è un cangiamento di segno nel secondo coefficiente differenziale della equazione della curva. In alcuni trattati di calcolo differenziale si trova stabilito che il solo indizio di un tal punto si ha nell' equazione $\frac{d^2y}{dx^2}=0$: ma ciò non è esatto, poichè tale equazione può esser vera senza che vi sia flesso contrario, come può esservi flesso contrario senza che sussista l' equazione suddetta. Perchè il flesso contrario abbia luogo, è *necessario* ed è *sufficiente* che il coefficiente $\frac{d^2y}{dx^2}$ cangi di segno, il che non può avvenire che quando esso diviene nullo o infinito. Si esamineranno per conseguenza le radici delle due equazioni

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,\quad 0\quad \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}=0,$$

e quelle che porteranno seco un cangiamento di segno daranno altrettanti punti di flesso contrario.

Per esempio, sia

$$y = 3x^5 - 20x^4 + 50x^3 - 60x^2$$

l' equazione della curva: differenziando successivamente due volte, si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 60(x-1)^2(x-2).$$

Il coefficiente $\frac{d^2y}{dx^2}$ è nullo per $x=1$ e per $x=2$, ma vi è un solo punto di flesso contrario per $x=2$, perchè per $x=1$ non si ha cangiamento di segno.

FLEURIEU (Carlo Pietro Claret, Conte di), membro dell' Istituto e dell' Ufizio delle Longitudini, nacque a Lione nel 1738 da una famiglia ragguardevole. Entrò giovanissimo nella marina francese, e dotato dalla natura delle più felici disposizioni acquistò in breve le più estese e profonde cognizioni su tutto ciò che si riferisce alla nautica. Avendo conosciuto di quale importanza fosse per la navigazione l'avere buoni orologi, rivolse a questo argomento le sue meditazioni, strinse amicizia col celebre uriuolajo Ferdinando Berthoud, e gli comunicò le sue idee. Dal canto suo Berthoud insegnò a Fleurieu i segreti dell' arte sua, e da tale comunicazione di idee e di lavori risultarono i migliori orologi marini che fossero fino allora stati fatti in Francia. Furono provati nel 1768 in un viaggio sulla fregata l' *Iside* comandata da Fleurieu allora luogotenente di vascello, e il buon esito superò le speranze che eransi concepite. Nella relazione che di tal viaggio pubblicò lo stesso Fleurieu col titolo di *Voyage fait par ordre du roi en 1768 et 1769, en différentes parties du monde pour éprouver en mer les horloges marines*, Parigi, 1773, 2 vol., in-4, sono minutamente descritte tutte le precauzioni usate durante la navigazione per accertarsi della bontà degli orologi. In seguito Fleurieu venne nominato direttore dei porti e degli arsenali della marina, e finalmente elevato fu nel 1790 al posto di ministro di questo dipartimento: e in tutti questi impieghi dimostrò somma capacità ed uno spirito sempre intento ai progressi della marineria francese. Dopo aver reso molti ed importanti servigi alla sua patria, morì a Parigi il 18 Agosto 1810, amato e rispettato da tutti quelli che lo attorniavano. Egli ha pubblicato alcune altre opere, l' elenco delle quali potrà leggersi nella *Biografia Universale*.

FLUENTE (*Alg.*). Gli Inglesi dopo il Newton chiamano Fluenti ciò che i geometri del continente chiamano *Integrali*. *Vedi* Flussione e Integrale.

FLUIDO (*Idrost.*). Corpi, le cui molecule cedono alla minima pressione, e sono mobili in tutti i sensi.

I *Fluidi* si dividono in *fluidi incompressibili* e in *fluidi elastici*. I *Fluidi* incompressibili sono quelli ai quali la pressione non può far cangiare il volume. Tali sono il mercurio, l'acqua, l' olio, il vino, ec. I *Fluidi elastici*, al contrario sono quelli, la cui compressione diminuisce il volume. Tali sono l'aria, i differenti gaz, i vapori di acqua, ec.

La natura dei fluidi è di pertinenza della fisica, le leggi dei loro movimenti costituiscono due rami delle matematiche applicate, cioè: l' *Idrostatica*, ossia la scienza delle leggi dell' *equilibrio* delle forze che muovono i fluidi, l' *Idrodinamico*, o la scienza delle leggi dell' *azione* delle forze motrici che muovono i fluidi. (*Vedi* queste diverse parole).

FLUSSO e RIFLUSSO (*Idrog.*). Movimento periodico giornaliero dell'acque del mare cagionato dall' azione combinata delle attrazioni del sole e della luna. *Vedi* Maree.

FLUSSIONE (*Alg.*). Considerando un' estensione qualunque come generata dal

moto di un'altra estensione, il Newton dà il nome di *flussione* alla *velocità* con la quale ciascuna parte della prima estensione si trova descritta.

Calcolo delle Flussioni. Questo calcolo, una delle più brillanti scoperte dell'immortale Newton, in ultima analisi significa il medesimo del Calcolo Differenziale; ma il suo primo concepimento ovvero la sua metafisica non ne fa realmente che un metodo *derivato*, il quale non può essere spiegato che con i veri principii del calcolo dell'Infinito, principii che sono stati esposti alla parola Differenziale. Questo è quello che facilmente faremo comprendere. Cominciamo dal definire esattamente ciò che il Newton intende pel rapporto di due *flussioni*.

Se si suppone, per esempio, una parabola generata dal moto di una retta che si muove uniformemente, parallelamente a se stessa, lungo l'asse delle ascisse, nel mentre che un punto percorre questa retta con una velocità variabile tale che la parte percorsa sia sempre media proporzionale tra una linea data qualunque e la parte corrispondente dell'ascissa; il rapporto che vi è tra la *velocità variabile* di questo punto a ciascuno istante e la *velocità uniforme* della retta, è il rapporto della *flussione* dell'ordinata alla *flussione* dell'ascissa. Cioè questo rapporto è quello degli *accrescimenti* respettivi dell'ordinata e dell'ascissa. Da ciò si vede che il Newton chiama *flussione* quello che, per il Leibnizio si chiama *differenza*.

Ma indicando, secondo l'uso, con y l'ordinata e con x l'ascissa di una curva qualunque, y sarà necessariamente una data funzione φx dell'ascissa, e l'equazione della curva potrà esprimersi generalmente con

$$y=\varphi x \ldots\ldots (1).$$

Ora tutte le variazioni di grandezza di y, possono immediatamente dedursi da questa equazione, con l'aiuto delle variazioni corrispondenti di x, mentre supponendo che l'ascissa x cresca della parte δ, o divenga $x+\delta$, se indichiamo con Δ la variazione corrispondente o l'accrescimento di y, avremo

$$y+\Delta=\varphi(x+\delta) \ldots\ldots (2),$$

donde paragonando con l'equazione (1), otterremo

$$\Delta=\varphi(x+\delta)-\varphi x,$$

equazione, che farà conoscere il rapporto $\frac{\Delta}{\delta}$, e ciò indipendentemente da qualunque considerazione di *moto* e di *velocità*; queste considerazioni, sono molto lontane a spiegare la natura degli accrescimenti Δ, δ non essendo esse medesime possibili che in virtù dell'espressione (1). È dunque evidente che le *flussioni* o le *differenze* delle quantità, ripetono la loro origine dalla natura medesima delle quantità numeriche, e non dall'applicazione di queste quantità alle figure geometriche; in una parola, la considerazione *astratta* delle *differenze*, precede necessariamente e rende sola possibile la considerazione *concreta* di queste medesime differenze.

Quantunque i geometri dell'ultimo secolo, i quali spaventava l'Infinito, trovassero la metafisica del Newton molto più *luminosa* che quella del Leibnizio, essi compresero, e il Newton con loro, che l'idea di *velocità* è non solamente estranea alla scienza dei numeri, ma ancora che quando il moto è variabile, l'espressione algebrica di questa velocità esige appunto delle *flussioni* o delle *differenziali*, le quali mediante ciò non possano dedurne la loro significazione. Il Newton rigettò perciò di buon'ora qualunque considerazione di moto, e nel

suo celebre libro dei *Principii*, esso riprodusse il suo calcolo sotto un aspetto del tutto diverso, presentando il rapporto delle *flussioni* di due quantità, come quello che esse hanno nel limite delle loro differenze respettive, o allorchè queste differenze svaniscono. Ed è su quest' ultimo punto di vista, che si trova fondato il *metodo dei limiti*, che al giorno di oggi generalmente s' insegna sotto il nome di *calcolo differenziale*.

Se i geometri francesi hanno mostrato poco tatto filosofico preferendo i processi indiretti del metodo dei limiti, a quelli si eminentemente semplici del calcolo differenziale propriamente detto, essi hanno almeno adottato la notazione del Leibnizio. Quest' ultima è per verità molto più comoda che quella del Newton, della quale i geometri inglesi si sono esclusivamente serviti per molto tempo, ma di cui essi cominciano ad abbandonare l' uso. Dal Newton, x con un punto, come $\dot{x}$, indica la flussione del primo ordine o la differenziale prima di x; $\ddot{x}$ indica la flussione del second'ordine o la differenziale seconda; $\dddot{x}$, la flussione del terz' ordine o la differenziale terza; e così di seguito.

Il metodo inverso della Flussioni ha per oggetto di risalire alle quantità di cui son date le flussioni, o di trovare le *fluenti* di queste flussioni; e questo è propriamente il calcolo integrale. *Vedi* Integrale, *Vedi* ancora Funzione e Limite.

FOIX (Francesco de), duca di Candale, morto a Bordeaux nel 1594, in età di 90 anni. Nel 1566 aveva fatto stampare un' edizione latina degli *Elementi di Euclide*, aumentata di un sedicesimo libro sui corpi regolari, e su quelli ch'ei chiama irregolari. Riprodusse tale edizione accresciuta di altri due libri sullo stesso argomento, Parigi, 1578, in-fol.

FOLIUM Cartesii (*Geom.*). Curva del terz' ordine, che ripete il suo nome dalla rassomiglianza di una delle sue parti con una foglia. *Vedi* l' Analisi degli infinitamente piccoli, del marchese dell' Hôpital.

FOMALHAUT (*Astron.*). Stella di prima grandezza situata alla bocca del Pesce Australe. Questo nome, che deriva dall' arabo, si trova scritto in diversi modi da varj astronomi: così Ticone scrive *fomahant*; Evelio, *fomahandt*; La Caille *phomalhaut*; Flamsteed, *fomalhaut*, ec.

FONCENET (Francesco Daviet de), geometra, nato nel 1734, in Thonon, piccola città di Savoja, fu inviato da suo padre a fare gli studj superiori a Torino. Ivi ebbe lezioni dal celebre Lagrange, del quale seppe colle sue buone doti guadagnarsi l' amicizia. Fu nel 1778 ricevuto nell' accademia delle scienze di Torino, alla quale presentò parecchie dotte memorie sull' analisi trascendente, e sui principj generali della meccanica, che possono vedersi nei primi volumi della raccolta intitolata: *Miscellanea physico-mathematica taurinensia*, e per le quali molta fama ottenne tra i geometri. Disgraziatamente per la sua riputazione, da alcune espressioni sfuggite negli ultimi suoi giorni a Lagrange sembra che questo uomo sommo per giovare all' amico, padre di famiglia, gli somministrasse tutti i materiali delle memorie che portano il nome di Foncenet, lasciando a questo la cura di sviluppare i ragionamenti che erano base alle formule. E vero che nulla può affermarsi di positivo intorno a ciò, ma è indubitato che una memoria di Lagrange sulla teoria della leva sembra formar parte e seguito di una delle memorie di Foncenet, e che in ambedue si scorge quell' ordine d' idee rigoroso a un tempo ed elegante, che caratterizza le opere dell' illustre autore della *Meccanica analitica*; come è altresì vero che dopo i suoi primi lavori Foncenet non ha più scritto che una insignificantissima memoria. Intanto dovette questi al credito che gli acquistarono gli scritti da lui presentati all' accademia i diversi impieghi

che successivamente gli furono conferiti dal re di Sardegna. Morì a Casale nel 1799.

FONTAINE DES BERTINS (Alessio), geometra distinto del XVIII secolo, nacque a Claveison nel Delfinato, nel 1705. La sua famiglia, che godeva di molta agiatezza, gli fece dare una educazione conforme alla sua posizione sociale. Era destinato al foro, ma la inclinazione sua per le scienze lo indusse a recarsi a Parigi, onde sottrarsi alle sollecitazioni de'suoi parenti che contrariavano la sua volontà. La lettura del libro di Fontenelle sulla geometria dell'infinito gl'inspirò molto amore per tale scienza, ed avendo fatto amicizia col p. Castel, stimolato e diretto da quel dotto gesuita fece grandi progressi nelle matematiche. Perduto avendo nel 1728 suo padre, fu costretto a lasciar Parigi e a sospendere i suoi studj. Ma non molto dopo, per la morte di un suo fratello essendo divenuto possessore di una fortuna di cinquantamila lire, si vide in grado di secondare liberamente la sua passione per le scienze esatte. Non aspirando che ad avvicinarsi a Parigi, vendè il suo patrimonio e comprò la terra di Anel presso Compiègne, laonde potè fare frequenti viaggi alla capitale, ove strinse ben presto amicizia con Clairaut e Maupertuis. Incominciò a farsi conoscere ai dotti determinando la linea *minima* tra due punti situati sopra una superficie curva. Giovanni Bernoulli aveva già risoluto lo stesso problema, ma la sua soluzione era ignorata da Fontaine, che non aveva avuto fino allora altre nozioni sul metodo *de maximis et minimis* che quelle cui acquistate aveva colla lettura del *Trattato degl'infinitamente piccoli* del marchese de l'Hôpital. Nel 1732 presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi alcune soluzioni di problemi singolarissimi, relativi a punti attrattivi situati sopra superficie curve. Egli risolse tali problemi per mezzo di considerazioni estremamente delicate e coll'ajuto d'integrazioni complicate al sommo, nelle quali dimostrò molta sagacità ed originalità.

Dotato di una immaginazione vivace e di un carattere fermo, quantunque alquanto bizzarro, non si arretrava a veruna difficoltà, e poteva applicarsi lungo tempo ai più penosi lavori del geometra senza provare nè stanchezza nè scoraggiamento. Fontaine, di cui si temevano gli arditi sarcasmi, e di cui si apprezzavano le cognizioni, divenne ben presto membro dell'Accademia delle Scienze, e la raccolta dei lavori di quella illustre società ricevè un gran numero di memorie di questo dotto geometra sopra diversi rami delle scienze matematiche, che tutte palesano profonde cognizioni e potente originalità. Famosa tra le altre è quella sulle tautocrone che comparve nel 1734 poco dopo il suo ricevimento all'Accademia delle Scienze, e cui d'Alembert riguardava come una delle migliori di quelle che compongono la raccolta di quella società. La soluzione del problema che presentano le tautocrone è di una somma importanza teorica. Esso consiste nel trovare una curva tale che ogni corpo pesante, scendendo lungo la sua concavità, arrivi sempre nel medesimo tempo al punto il più basso, da qualunque punto della curva cominci a discendere. Tale problema era stato sciolto da Huygens nell'ipotesi del vuoto, da Newton considerando la curva in un mezzo resistente come la velocità, e separatamente da Eulero e da Giovanni Bernoulli, i quali supponevano la resistenza del mezzo proporzionale al quadrato della velocità, il che è più consentaneo all'osservazione. Fontaine, con un metodo ingegnoso e affatto nuovo, risolse lo stesso problema in tali differenti ipotesi, ed in modo che non vi ha bisogno che si sappia integrare l'equazione differenziale della velocità, il che è presupposto nelle soluzioni de'suoi predecessori. Portò in seguito la sua ad una maggior generalità riguardando la resistenza del mezzo siccome proporzionata ad un tempo al quadrato della velocità e al prodotto di tale velocità per una costante. Credè così di aver data la soluzione più compiuta e più generale di cui fosse suscettibile il problema: nulladimeno, malgrado il passo immenso

fatto dal nostro geometra, Lagrange nelle *Memorie* dell' Accademia di Berlino per l'anno 1765 andò assai più lungi e passò i confini cui Fontaine teneva d'avere toccati. Avendo quest'ultimo esaminato superficialmente il lavoro di quel sommo geometra, l'impugnò con acerbità, affermando che si era smarrito e che pareva non avesse inteso il suo proprio metodo, di cui d'altronde diceva che era limitato ed indiretto. Il grand'uomo, che per la prima volta si vedeva assalito in un arringo in cui non aveva riportato che trionfi, si contentò di confondere il suo avversario provando che egli invece aveva data una soluzione difettosa in certi casi.

Nella soluzione del problema delle tantocrone, Fontaine dimostrò il primo due teoremi, che sono la base del calcolo delle variazioni inventato dopo tale epoca. Dimostrò altresì il primo che ogni equazione differenziale di un certo ordine ha sempre un egual numero di integrali compiuti dell' ordine immediatamente inferiore, e colla scorta dei quali si può trovare mediante l'eliminazione l'integrale finito compiuto, che è sempre unico. È dovuta egualmente a Fontaine una ingegnosa notazione per esprimere i coefficenti differenziali di tutti gli ordini e che porta tuttora il nome del suo autore. È pure inventore di un principio generale di dinamica, che, sebbene da lui presentato sotto forma oscurissima, è nel fondo quello medesimo di d'Alembert; perocchè le quantità di moto guadagnate o perdute, cui d'Alembert pone in equilibrio, altro non sono nel principio di Fontaine che le forze che avevano i corpi per rifiutarsi al moto. D'Alembert pubblicò il suo principio nel 1743, mentre Fontaine non parla la prima volta del suo che nella raccolta delle sue memorie pubblicata nel 1764, ma avvertendo che tale principio gli era noto fino dal 1739, e che le comunicazioni che fatte ne aveva ad un gran numero di geometri dovevano produrre lo stesso effetto che se lo avesse loro trasmesso per mezzo della stampa. Tale dichiarazione servì ai partigiani di Fontaine ed ai nemici di d'Alembert per contrastare a quest'ultimo il merito dovutogli di tale scoperta sì importante in meccanica. Del resto non è improbabile che veramente Fontaine trovasse il suo principio senza avere avuto cognizione di quello di d'Alembert, poichè era d'ingegno acutissimo; e ciò riesce tanto più credibile se si riflette che Fontaine in tutto ciò che ha fatto non è mai andato dietro alle orme altrui: abituato a seguire le proprie idee, trascurava sovente di leggere le opere dei suoi rivali e le sue acquistavano così maggiore originalità. Non è perciò da stupire che abbia mosso molte rivendicazioni in fatto di scoperte matematiche; ha contradetto ad Eulero la scoperta delle condizioni d'integrabilità delle formule differenziali, ed un bel teorema sulle funzioni omogenee. Asseriva che nel 1738 avendo comunicato a Parigi tali scoperte a molti geometri, esse potevano essere state trasmesse ad Eulero: ma ignorava che quel gran geometra aveva da lungo tempo pubblicati siffatti teoremi nelle *Memorie* di Pietroburgo per gli anni 1734 e 1735. Tale fatto, che comprova i diritti di Eulero all'invenzione di que' teoremi, non è meno una forte presunzione che il geometra francese gli avesse egualmente scoperti.

Fontaine ha fatto molte ricerche sul calcolo integrale; ha impiegato diversi metodi d'integrazione, fondati sulle proprietà delle funzioni omogenee, sulla restituzione dei fattori spariti, sull'eliminazione delle costanti arbitrarie, ec. Credeva di aver trovato metodi generali d'integrazione, cosa che Lagrange reputava impossibile. Invano Fontaine usò di tutte le risorse che presenta il metodo dei coefficienti indeterminati; egli pervenne ad equazioni così complicate, specialmente per gli ordini superiori, che le sue norme vennero interamente rigettate. Lo stesso può dirsi della sua maniera di risolvere le equazioni letterali e numeriche. Con tale mira ha compilato parecchie tavole, mercè le quali si trova il sistema di fattori che conviene ad una data equazione: ma la difficoltà della co-

struzione di tali tavole, e la lunghezza delle operazioni susseguenti hanno fatto che niuno ha cercato di servirsi di un metodo, di cui la generalità stessa non è dimostrata.

Fontaine, ritireto in campagna, menava noa vita del tutto solitaria e divideva il sno tempo tra i lavori dell' agricoltura e le matematiche. Fu ricevuto nell'Accademia delle Scienze nel 1733. Straniero ad ogni briga, interveniva di rado alle tornate, perchè diceva che una scoperta val più di dieci anni di assiduità all'accademia. Nel 1765 vendè la sna terra di Anel ed acquistò la baronia di Cuiseaux in Borgogna, soi confini della Franca Contea, ove andò a stabilirsi ad ove mori nel 1771. Il soo elogio fn scritto da Condorcet, e le sue *Memorie*, che fanno parte di quelle dell'Accademia, sono state raccolte con alcuni scritti inediti in un vol. in-4, comparso nel 1764.

FONTANA ARTIFICIALE (*Mec.*). Macchina per mezzo della qnale l'acqua è versata o lanciata. Di queste macchine, le nne come i *getti di acqua* (vedi questa parola) agiscono per mezzo della gravità dell' acqua, le altre come la celebre Fontana di Erone di Alessandria, della quale daremo la descrizione, agiscono per mezzo dell' elasticità dell' aria.

La Fontana di Erone si compone di due cassette di metallo EZ e XY (*Tav.* LIII, *fig.* 6) alle quali si da una forma arbitraria, e le quali sono riunite da due tubi della medesima materia WX, ZY, e superate da nn bacino AE. Il bacino AB comunica colla cassetta soperiore EZ pel tobo BZ aperto in Z e che porta in B nn tubo che si attacca con viti in caso di bisogno. Questo medesimo bacino comunica con la cassetta inferiore XY pel tubo WX aperto alle due estremità, e che si reca verso il fondo della cassetta. Finalmente le due cassette comunicano insieme pel tubo YZ aperto in Y, e il qoale attraversa la cassetta superiore quasi in tutta la sua altezza. Per mettere questa fontana in moto, si empie di acqna fino ai tre quarti pel tubo BZ la cassetta superiore EZ. Se ne pone quindi nel bacino AE, in modo da tener sempre pieno il tubo WX. Questa colonna di aoqoa che teode a spandersi nella cassetta inferiore XY, comprime col suo peso la massa di aria con la qoale essa è ripiena: quest' aria così compressa sgorga pel tubo YZ e va a svilupparе la sua elasticità sulla superficie dell' acqua contenuta nella cassetta superiore EZ, e allora quest' acqua compressa dall' elasticità dell' aria, sgorga in forma di getto pel tubo BZ. Con qoesto metodo, l'acqoa della cassetta superiore EZ, mandata via dall' aria, ricade nel bacino AE, e con l' aiuto del tnbo WX passa nella cassetta inferiore, e prosegue a comprimere continuamente l'aria luterna, il che fa dorare il getto fintantochè vi è dell'acqua nel bacino superiore. Dopo l' operazione, si vuota la cassetta Inferiore per mezzo di una chiave sitnata al di sotto.

Questa fontana perfezionata dal Nienventit contiene il principio di tutte le macchine idraoliche, le quali agiscono per mezzo dell' elasticità dell'aria. (*Vedi* il Corso di Fisica del Musschenbroek). Faremo in questo ponto conoscere la costruzione e la teoria delle più importanti di queste macchine.

Macchina del Darwin.

R è il condotto soperiore che somministra l' acqoa alla macchina (*Tav.* XCVIII, *fig.* 7), R' il serbatoio nel quale si vuole elevare l' acqua. C una capacità chiusa sitoata al basso della caduta, *c* on' altra capacità chiusa situata a livello del condotto R. Queste due capacità comunicano tra loro per un tnbo, e con i serbatoi R ed R' per mezzo dei tubi indicati sulla figura, e capaci ad essere chiusi dalle chiavi m, n, p, q.

Le chiavi m, q essendo chiuse, e quelle p, n, n' aperte, la capacità C si

vuota interamente, e quella c si empie fino al livello Aa' del canale superiore. Chiudendo le chiavi p, n, n', e aprendo quelle m, q, la capacità C si empirà di acqua come l'indica la figura. A misura che essa si empirà, l'aria contenuta in questa capacità comprimendosi, forzerà l'acqua contenuta in c a salire in R'. La capacità C essendo piena, si chinderanno le chiavi m, q; si apriranno quelle p, n, n' e il medesimo giuoco ricomincerà.

Siano:

H l'altezza della caduta, contata dal livello A al fondo della capacità C.

H' l'altezza alla quale l'acqua è elevata contata dal livello A al livello d.

Ω, Ω' le aree delle sezioni orizzontali delle capacità C, c supposte prismatiche.

h, h', le altezze sopra le quali queste capacità si empiono e si vuotano a ciascuna oscillazione.

μ l'altezza della colonna di acqua che fa equilibrio alla pressione atmosferica $=10^m,3$.

Supponendo che le capacità C, c non abbiano che le altezze h, h'; trascurando il volume dell'aria contenuto nel tubo che stabilisce la comunicazione tra queste capacità; considerando l'istante in cui C è pieno di aria, c pieno d'acqua, e nel quale si chiude la chiave n; si avrà Ωh pel volume di aria racchiuso nella macchina, e sottoposto alla pressione μ. Considerando inseguito l'istante in cui C è stato ripieno di acqua, e c vuotato, si avrà $\Omega' h'$ pel volume al quale sarà stata ridotta l'aria rinchiusa nella macchina. La pressione di quest'aria sarà perciò diventata $\mu\frac{\Omega h}{\Omega' h'}$. Ma questa tensione deve fare equilibrio in c alla colonna di acqua $\mu+H'+h'$. Dunque si ha la relazione

$$\mu\frac{\Omega h}{\Omega' h'}=\mu+H'+h', \quad \text{donde} \quad \Omega' h'=\mu\frac{\Omega h}{\mu+H'+h'}.$$

Il rapporto dell'effetto prodotto dalla macchina alla quantità di azione spesa è dunque

$$\frac{\Omega' h'.H'}{\Omega h.H}=\frac{\mu H'}{(\mu+H'+h')H}.$$

Per rendere questo rapporto il più grande possibile, bisogna cominciare dal mettere $h'=o$. Esso diviene allora

$$\frac{\mu H'}{(\mu+H')H}.$$

Il suo valore aumenta con H'. Ma siccome la pressione dell'aria rinchiusa, la quale fa equilibrio in c alla colonna $\mu+H'+h'$, deve fare equilibrio in C ad una colonna al più eguale ad $H-h$, non possiamo prendere

$$H'+h'>H-h, \quad \text{ovvero} \quad H'>H-h-h'.$$

Così per ottenere il maggior effetto, bisognerà fare ancora $h=o$, e fare $H'=H$. Il rapporto diviene

$$\frac{\mu}{\mu+H},$$

esso è il più grande possibile quando $H=o$, ed eguale all'unità. Donde resulta, che

1.° L'altezza alla quale si eleva l'acqua non può superare l'altezza della caduta, meno l'altezza delle due capacità.

2.° Per ottenere il maggior effetto, bisogna fare l'altezza delle due capacità infinitamente piccola, e l'altezza alla quale si eleva l'acqua eguale a quella della caduta.

3.° L'effetto così ottenuto è tanto maggiore quanto l'altezza della caduta è più piccola, ed eguale alla quantità di azione apesa quando quest' altezza è infinitamente piccola.

Allorquando vogliamo elevare l'acqua ad un' altezza maggiore di quella della caduta, impiegando il medesimo apparecchio, possiamo elevarla a riprese per mezzo della disposizione indicata (*Tav.* XCVIII, *fig.* 9). Le chiavi n, p, p', p'' essendo state chiuse, l'affluenza dell'acqua nella capacità C ha forzato l'acqua contenuta nelle capacità C', C'', C''', ad elevarsi nei serbatoi situati respettivamente al di sopra di ciascuna di esse. Aprendo quindi le chiavi suddette, e chiudendo quelle m, q, q', q'', la capacità C si vuota di acqua, nel mentre che le altre capacità si empiono, e il medesimo giuoco ricomincia.

L'apparecchio che abbiamo indicato è descritto nell' opere inglesi sotto il nome del Darwin. La macchina tale quale si vede (*Tav.* XCVIII *fig.* 8) è stata eseguita per la prima volta dall' Hoëll a Schemnitz nell' anno 1775. Pare che vi siano alcuni errori nel resultamento annunziato sul suo prodotto. Il giuoco delle chiavi è eseguito da uperai. È stato proposto un regolatore la cui disposizione sembra poco soddisfacente, e del quale si può vedere la descrizione nel trattato dell' Hachette.

Principio della macchina del Darwin applicato all' elevazione dell' olio nelle lampade.

Per fare adempire all' apparecchio precedente l'oggetto di utilità di cui si tratta, era necessario constatare la velocità con la quale il fluido è spinto nel serbatoio superiore. Vi si giunge nel seguente modo. C, C', C'', sono tre capacità chiuse. Quelle C, C'' sono in principio ripiene di fluido. Questo fluido sgorga da C in C', con una velocità costante, dovuta alla distanza verticale dei punti A, B. L'aria contenuta in C' vi è compressa, e vi sostiene la pressione atmosferica, più quella della colonna di fluido AB. La compressione di quest'aria si trasmette in a; e se la colonna ab è eguale a quella AB, vi è equilibrio. Lo sgorgo dell'aria da C in C' con una velocità costante, cagiona dunque lo sgorgo dell'aria da C' in C'' e quello del fluido da C'' in b, con velocità egualmente costanti.

Macchina del Détrouville.

Questa macchina è analoga alla precedente. Essa ne differisce in quanto che l'azione della caduta dell' acqua si esercita per l'intermediario di un volume di aria dilatato. C, C' sono due capacità chiuse (*Tav.* XCVIII, *fig.* 10), comunicanti per mezzo di un tubo. R è il canale superiore che somministra l'acqua. R' il serbatoio nel quale si vuole elevarne. Supponiamo l'apparecchio nello stato indicato dalla figura, le chiavi n, p chiuse, quelle m, q aperte, la capacità C ripiena di acqua somministrata dalla sorgente, quella C' occupata dall' aria atmosferica. Si chiuderanno le chiavi m, q, e si apriranno quelle n, p. L'acqua contenuta in C sgorgherà per n e l'aria contenuta in C' passerà in C dilatandosi. La pressione atmosferica agendo sopra R, farà salire dell' acqua in C' per p. L'acqua cesserà di uscire da C e di entrare in C' quando le distanze del livel-

lo da A ai due livelli dell' acqua, nelle due capacità, saranno eguali tra loro, e alla differenza tra le altezze delle due colonne di acqua, le quali rappresentano la pressione atmosferica; la forza elastica rimanendo all'aria rinchiusa dopo la sua dilatazione. Perchè l' acqua giunga in C′ bisogna che l'altezza del fondo di questa capacità al di sopra di A sia minore di quella della colonna di acqua, che rappresenta la pressione atmosferica. L' acqua non può d' altra parte salire in C′ ad un' altezza al di sopra di A′, che superi l' altezza della caduta. Quando C′ sarà ripieno, si chiuderanno le chiavi p, n, e si apriranno quelle m, q, C′ si vuoterà in R′, e C si empirà di nuovo. Si chiami:

H, l' altezza della caduta contata dal livello A al fondo della capacità C.

H′, l' altezza alla quale si eleva l' acqua, contata da A al livello A′ del serbatoio superiore.

Ω, Ω'. Le sezioni orizzontali delle due capacità C, C′; h, h', le altezze alle quali il livello dell' acqua varia a ciascuna oscillazione.

μ l' altezza della colonna di acqua che fa equilibrio alla pressione atmosferica $= 10^m,3$.

Facendo astrazione dall' aria contenuta nei tubi di comunicazione, e al di sopra dell' acqua in C, quando questa capacità viene ad essere ripiena, si ha $\Omega' h'$ per il volume dell' aria rinchiusa. Quando C sarà vuoto, la pressione di quest' aria sarà $\mu - (H'+h')$, e per conseguenza questo volume sarà diventato eguale a

$$\Omega' h' \cdot \frac{\mu}{\mu - (H'+h')}.$$

Ma allora è uscito il volume di acqua Ωh, ed è entrato il volume $\Omega' h'$ dunque Ωh è il volume che ha preso l' aria dilatata, e si ha la relazione

$$\Omega h = \Omega' h' \cdot \frac{\mu}{\mu - (H'+h')}.$$

Il rapporto dell' effetto utile alle quantità di azione spesa è dunque

$$\frac{\Omega' h' H'}{\Omega h H} = \frac{(\mu - H' - h')H'}{\mu H}.$$

Per rendere questo rapporto il più grande possibile, bisogna cominciare dal supporre $h' = 0$; il che dà

$$\frac{(\mu - H')H'}{\mu H}.$$

Facendo quindi variare H′, il valore corrispondente al *maximum* sarà $H' = \frac{1}{2}\mu$, e siccome H′ non può superare H, questo valore si applicherà ai casi in cui H sarà $> \frac{1}{3}\mu$. Il valore *maximum* del rapporto dell' effetto utile alle quantità di azione spesa sarà per questi casi

$$\frac{\mu}{4H}$$

esso sarà tanto più grande quanto H sarà più piccola e per conseguenza il suo limite corrisponderà ad $H = \frac{1}{2}\mu$ e sarà $\frac{1}{2}$.

Nel caso in cui H sarà $< \frac{1}{2}\mu$ si avrà il *maximum* di effetto facendo H' la più grande possibile, ovvero $= H$. Il valore del rapporto diventa

$$\frac{\mu - H}{\mu}$$

il quale sarà tanto maggiore quanto H sarà minore, e $= 1$ se $H = 0$. Donde resulta 1.° che in generale l'effetto che può produrre la macchina è tanto maggiore quanto l'altezza della caduta è minore. 2.° Che nel caso in cui l'altezza della caduta superi $5^m, 15$, bisogna per ottenere il maggior effetto, che l'acqua sia elevata a $5^m, 15$ e che il limite di questo effetto sia la metà della quantità di azione spesa. 3.° Che nel caso in cui l'altezza della caduta sia tra $5^m, 15$ e o, bisogna per ottenere il maggiore effetto che l'altezza alla quale si eleva l'acqua sia eguale a quella della caduta, e che il limite di quest'effetto sia la quantità di azione spesa.

Se si volesse elevare l'acqua ad un'altezza maggiore di $10^m, 3$, o maggiore dell'altezza della caduta, bisognerebbe elevarla a riprese, per mezzo di un apparecchio analogo a quello indicato di sopra.

Questa macchina è stata proposta nel 1790 dal Détrouville, ed essa è stata l'oggetto di un rapporto dell'Accademia delle Scienze di Parigi, redatto dal Mesnier. Essa non è stata mai eseguita in grande. La difficoltà di impedire che l'aria atmosferica penetri nelle capacità; l'effetto dell'aria che si sprigiona dall'acqua quando la pressione è minore, contribuiscono a renderne l'uso poco vantaggioso.

Il signor Manoury Dectot ha presentato nel 1812 e 1813, diverse macchine per elevare l'acqua, fondate sopra i precedenti principii. Queste macchine offrivano questa circostanza osservabile, che le chiavi o animelle erano soppresse in modo che i nuovi apparecchi non avevano veruna parte mobile. Le alternative di affluenza e di sgorgo dell'acqua nelle capacità, si operavano per mezzo di un giuoco di sifoni. Il più che meritasse di essere osservato di questi apparecchi era quello chiamato dall'autore *Idreolo*, ove l'elevazione dell'acqua era prodotta dall'aria condensata che veniva a mescolarsi con una colonna di acqua, che essa rendeva specificamente più leggera. La descrizione di queste macchine, i cui modelli sono al Conservatorio delle arti e mestieri di Parigi, non sono stati pubblicati.

FONTANA (Domenico), celebre architetto e ingegnere italiano, nato nel villaggio di Mili, presso il lago di Como, l'anno 1543. Ad onta che Palladio e Vignola avessero già eretto in Italia i loro capo-lavori, Fontana erasi acquistato molto nome nella sua professione, quando venne in mente al pontefice Sisto V di far trasportare ed erigere sulla piazza di S. Pietro di Roma il grande obelisco, che da molto tempo era come nascosto tra le rovine in vicinanza dell'antica sagrestia di quel tempio. Tale obelisco era di granito rosso, cavato dalle montagne vicine a Tebe in Egitto, e, comprendendovi la punta, avea 111 palmi e mezzo di lunghezza, 12 di larghezza alla base e 8 alla sommità. Il trasporto di una mole così enorme, della quale anche altri pontefici avevano avuto il pensiero di decorare la piazza di S. Pietro, aveva fino allora sgomentato i più abili meccanici. Sisto V pertanto propose l'esecuzione di questa impresa ai più valenti matematici, ingegneri o architetti dell'Europa; ed il progetto fatto da Fontana

essendo stato preferito a tutti gli altri, ad esso fu affidato il portarlo ad effetto. Sarebbe difficile il descrivere in quest'articolo i metodi ingegnosi, di cui fece uso l'architetto per ismuovere, trasportare e drizzare un massa di oltre ottocento migliaja: basterà dire che Fontana non impiegò in tutto il corso del lavoro meno di 900 operaj e di 14n cavalli. S'incominciò da rovesciare l'obelisco, che era per metà sepolto nel suolo e pressochè ritto, poi fu alzato tre palmi sopra terra, e quindi fu condotto sulla piazza steso orizzontalmente sopra quattro carri. Conveniva allora elevarlo sul suo piedistallo: ma per questa operazione si attese per ordine del pontefice che fosse passato il tempo dei grandi calori; e finalmente ai dieci di Settembre 1586 fu effettuato tale compimento di un lavoro sì prodigioso. L'obelisco, formato di una materia pressochè indestruttibile, è anche oggigiorno nel luogo stesso ove l'innalzò l'architetto: una croce di brouzo di dieci palmi lo sormonta, e quattro leoni pure di bronzo gli servono di sostegno. Grandi furono gli onori e le ricompense accordate a Fontana, ed ei ne godè tranquillamente finchè visse il pontefice Sisto V: ma, sotto il suo successore Clemente VIII, una trama ordita da alcuni invidiosi avendolo fatto cadere in disgrazia, si ritirò verso la fine del 1592 a Napoli, ove fu fatto subito architetto ed ingegnere del re delle due Sicilie, ed ove morì uel 1607 in età di 64 anni.

Fontana non ha lasciato che la seguente opera: *Del modo tenuto nel trasportare l'obelisco vaticano, e delle fabbriche di nostro signore Sisto V, fatte dal cavalier Domenico Fontana*, Roma, 1590, in-folio, con 19 rami incisi da Bonifazio da Sebenico. Tale volume è curioso in quanto che indica metodi, che Fontana ha dovuto in alcuna guisa creare, poichè gli antichi non avevano lasciato nulla su tale materia. Fu ristampato a Napoli nel 1604, in-fol. col titolo di *libro primo*, e seguito da un *libro secondo*, *in cui si ragiona di alcune fabbriche fatte in Roma ed in Napoli dal cav. Domenico Fontana*, che forma un secondo volume parimente in folio.

FONTANA (Francesco), astronomo napoletano, viveva nel XVII secolo. Dopo essersi addottorato in legge, abbandonò il foro per dedicarsi interamente alle matematiche, e specialmente all'astronomia. Accoppiando la pratica alla teoria, studiò egualmente il taglio delle lenti, attese al perfezionamento degli strumenti ottici, e pretese nel 1608, ma senza alcuna prova concludeute, di avere inventato il telescopio. Ha pubblicato: *Novae coelestium et terrestrium rerum observationes*, Napoli, 1646, 1667, in-4, ed ha lasciato in manoscritto: *Fortificazioni diverse*. Morì nel 1656.

FONTANA (Gaetano), astronomo nato a Modena nel 1645. Dotato d'indole inclinata alla pietà, vestì in età non ancora di 20 anni l'abito dei teatini, e si fece sempre distinguere per l'esemplarità dei suoi costumi. Tuttavia i suoi esercizj devoti non gl'impedirono di applicarsi con molto frutto alle scienze e alla letteratura; e quantunque ponesse ogni studio nell'evitare la gloria e gli onori, pure i suoi talenti trapelarono suo malgrado, e ben presto si vide in corrispondenza coi dotti più illustri del suo tempo, Muratori, Salvago, Eustachi, Manfredi, Corradi. Strinse soprattutto un'amicizia particolare col celebre G. Domenico Cassini; e questi gli ha reso pubblica testimonianza che, di tutte le osservazioni astronomiche che da varie parti gli venivano comunicate, quelle del p. Fontana erano sempre le più esatte. Morì il 25 Giogno 1719. Le sue opere sono: I *Institutio physico-astronomica, cum appendice geographico*, Modena, 1695, in-4; II *Animadversiones in historiam sacro-politicam, praesertim chronologiam spectantes; nonnulla ad astronomiam et chorographiam, nec non dissertatio physico-mathematica de aere*, Modena, 1718; III Una *Carta geografica* dello stato di Modena, e molte altre carte egualmente manoscritte: aveva

in mente di levare la carta di tutta la Lombardia, ma la morte gl' impedì di mandare ad esecuzione questo progetto. IV Parecchie *Osservazioni astronomiche*, inserite nella raccolta delle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze di Parigi.

FONTANA (Il P. Gregorio), celebre matematico italiano, nato a Villa di Nogarola, presso Roveredo nel Tirolo, il 7 Dicembre 1735, incominciò i suoi studi in quella città, e andò a compierli a Roma, ove entrò nell' ordine dei cherici regolari delle Scuole Pie. In breve gli fu affidata una parte dell' istruzione nel Collegio Nazareno diretto da quei cherici, e poco dopo fu inviato con un officio simile a Sinigaglia. Fu in questa città che, stretto avendo amicizia col celebre matematico Giulio Fagnani, il p. Fontana cominciò ad applicarsi con ardore alle matematiche, delle quali fino allora non aveva studiato che la parte elementare. Dotato dalla natura di facile ingegno, si rese ben presto familiari le opere dei sommi geometri, ed entrò in relazione coi dotti più ragguardevoli del suo tempo. Insegnò quindi a Bologna e a Milano, e finalmente successe al p. Boscovich nella cattedra di matematiche nell' università di Pavia. Tenne quest' impiego pel corso di trent' anni, e in tal periodo di tempo non cessò d' inviare a molte accademie un gran numero di dotte e profonde memorie, che resero illustre il suo nome non solo in Italia ma anche oltremonti. L' eccessiva assiduità però che poneva il p. Fontana ne' suoi studi logorò a poco a poco la sua salute, e si vide in fine costretto a dimettersi dalla sua cattedra e a prendere riposo. Si ritirò nel 1800 a Milano ove morì il 24 Agosto 1803.

Oltre un numero grande di memorie, che si leggono nelle raccolte degli *Atti* dell' Accademia di Torino, di quella di Siena e della Società Italiana, nella *Biblioteca fisica d' Europa*, e nel *Giornale fisico-medico* di Pavia, si hanno del padre Fontana: I *Memorie matematiche*, Pavia, 1799, in-4; II *Analyseos sublimioris opusculo*; Venezia, 1763. Ha tradotto altresì in italiano non poche opere interessanti, e fra le altre l' *Idrodinomica* ed altre opere matematiche dell' abate Bossut, Siena, 1779; il *Compendio di un corso di lezioni di fisica sperimentale del sig. Giorgio Atwood, od uso del Collegio della Trinità*, Pavia, 1781; e la *Dottrina degli azzardi applicata ai problemi delle probabilità della vita, delle pensioni*, ec. *di Abramo Moivre*, Pavia, 1776, in-8, di 195 pagine. Quest'ultima traduzione, arricchita di note erudite e curiose, è tanto più importante in quanto che la traduzione dell' opera di Moivre, che ne faceva sperare l' illustre Lagrange, non è comparsa. Fontana vi aggiunse una notizia per ordine cronologico di tutte le opere o memorie sui calcoli di mortalità dalle osservazioni di Graunt, pubblicate nel 1662, fino alla dissertazione di Zeviani sulla mortalità dei fanciulli, Verona, 1775 (Vedi il *Journal des Savans*, Marzo 1777). Il p. Fontana ha pure somministrato parecchie note ed aggiunte importanti ad un gran numero di opere di fisica e di matematiche, pubblicate al suo tempo in Italia.

FONTANA (Il P. Mariano), matematico italiano, nato nel 1746 a Casalmaggiore, entrò assai giovane nell' ordine dei Barnabiti, e non tardò a farsi distinguere per prontezza d' ingegno e per profondità di cognizioni. Fu inviato nel 1771 a Bologna a professarvi la filosofia; nel 1780 passò a Mantova a insegnarvi le matematiche; e poco dopo fu chiamato a Milano per dar lezioni di matematica applicata alla meccanica nel celebre collegio di Brera. Fu allora che egli compose il suo corso di dinamica, che serviva per testo delle sue pubbliche lezioni. L' università di Pavia avendo bisogno di un professore di meccanica, Fontana ottenne nel 1785 tale cattedra, dalla quale poi per alcuni raggiri passò a quella di geometria e di algebra; e continuò ad insegnare in tale università fino al 1802, in cui avendo diritto alla pensione di emerito, si ritirò a Milano nel convento di S. Barnaba, dove terminò pacificamente i suoi giorni ai 18 Novembre 1808.

La principale sua opera è il suo *Corso di Dinamico*, Pavia, 1790-92-95, 3 vol., in-8. Gli *Atti* dell' Istituto nazionale italiano contengono nella seconda parte del tomo primo, dato in luce nel 1806, una memoria nella quale il Fontana tenta di confutare il *Traité analytique de la résistance des solides d'égale résistance*, pubblicato a Parigi nel 1798 dall' ingegnere Girard; e nel tomo secondo alcune *Osservazioni sopra l' aritmetica di Francesco Maurolico*. Da tali osservazioni storiche risulta essere stato esso matematico di Messina, appena nominato nella storia delle matematiche, quegli, che nel XVI secolo introdusse nei calcoli, in luogo di cifre, segni più generali e le lettere dell' alfabeto, e che ha stabilito le prime regole dell' algoritmo algebrico. Si sarebbe detto che Fontana temeva che i moderni s' insuperbissero troppo delle loro scoperte, perchè più d' una volta cercò di provare che quanto inventavano era stato trovato in tempi anteriori. Perciò appunto fa onore agli antichi di molti dei metodi che il suo amico Mascheroni avea pubblicati come nuovi nella sua *Geometria del compasso*; e fa vedere che l' ordine stesso di tale opera non era nuovo, essendo stato già tenuto lungo tempo prima da *G. B. Benedetti* in un opuscolo intitolato: *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessarie inventorum, una tantummodo circini data apertura, per Joannem Baptistam de Benedictis invento*, Venezia, 1553, *apud Borth. Caesonum*.

FONTENELLE (Bernardo le Bovier de), celebre segretario dell' Accademia delle Scienze di Parigi, nato l' 11 Febbrajo 1657 e morto il 9 Gennajo 1757. Ci duole di non poter qui entrare in niuna particolarità sulla vita di quest' ingegno eminentemente francese, che ha brillato pel corso di un intero secolo, e i cui successi non possono esser celebrati che nei fasti letterarj di quella nazione. Quantunque matematico poco profondo, Fontenelle si arrischiò a scrivere la *Geometria degl' infiniti*, Parigi, 1727, in-4. Tale opera, venuta alla luce in un tempo in cui gli scritti di tal genere erano poco accurati o poco intelligibili, fu molto esaltata dagli amici di Fontenelle, ma fu meglio apprezzata da d'Alembert, nell' articolo *Infinito* dell' Enciclopedia: essa sarebbe oggi affatto dimenticata, se non facesse parte della raccolta dell' Accademia delle Scienze. La meno conosciuta, e forse la migliore delle opere di Fontenelle, è la sua *Storia dell' Accademia delle Scienze*: in essa egli espone con un' arte, cui niuno ha mai saputo eguagliare, i lavori contenuti nella raccolta di quella società: egli vi tratta le materie le più astruse con una facilità che incanta, e sotto la sua penna le verità sepolte nelle lungherie e nelle oscurità del linguaggio misterioso delle scienze divengono brillanti di chiarezza e di precisione. Gli altri scritti scientifici di Fontenelle sono: la prefazione dell' opera di L'Hôpital intitolata: *Analisi degl' infinitamente piccoli*, ed una memoria sull' estensione della proprietà del numero nove. I suoi *Trattenimenti sulla pluralità dei mondi*, che sono stati tradotti in tutte le lingue d' Europa, hanno avuto parecchie edizioni, e sono stati ristampati recentemente con note del celebre astronomo prussiano Bode.

FORCADEL (Pietro), matematico francese, nato a Beziers nel secolo XVI. Dopo aver viaggiato per qualche tempo in varie città di Italia, si portò a Parigi, ove col mezzo di Ramus, al quale aveva dato alcune lezioni di geometria, ottenne una delle due cattedre di matematiche del collegio reale. Morì nel 1576. I principali suoi scritti sono: I *Arithmétique por les gects, divisée en trois livres*, Parigi, 1558, in-8. L' autore aveva pubblicato separatamente tre libri di aritmetica nel 1556, 1557 e 1558; e nel 1565 pubblicò l'*Arithmétique entière et abrégée*; II *Description d' un anneau solaire convexe*, Parigi, 1569, in-4; III *Les six premiers livres des éléments de géométrie d' Euclide, traduits en françois*, ivi, 1564, in-4; nel 1565 vi aggiunse i libri 7, 8 e 9; IV. *Deux livres de Proclus du mouvement, traduits et commentés*, ivi, 1565, in-4; V *Le premier livre d'Ar-*

chimède des choses également pesantes, ivi, 1565, in-4; VI *Le livre d' Archimède des pois, qui aussi est dict des choses tombantes en l'humide, suivi d'une pièce du livre d' Euclide intitulé*: Du leger et do pesant, *traduits et commentés*, ivi, 1565, in-4; VII *Traduction de la musique d' Euclide*, ivi, 1565, in-8; VIII *Deux livres d'Autolice, l' un de la sphère qui est meue, et l'autre du lever et du coucher des estoiles non errantes* (Vedi Autolico): *ensemble le livre de Théodose des habitations*, ivi, 1572, in-4; IX *Traduction de la practique de la géométrie d'Oronce* (Vedi Fineo), *où est compris l' usage du quarré géométrique et autres instruments servants à même effet*, ivi, 1570, in-4.

FORFAIT (Pietro Alessandro Lorenzo), ingegnere costruttore di vascelli, nato a Rouen nel 1752. Dopo aver fatto ottimi studj elementari, andò a Brest a imparare la teoria e la pratica della costruzione dei vascelli. Rapidi e grandi furono i suoi successi, talchè in breve cominciò ad esercitare con distinzione la sua professione. Nel 1782 entrò al servizio del governo, e successivamente percorse molti impieghi importanti, dando sempre prove di grande esperienza, di profondo sapere e di rara integrità. Finalmente fu fatto ministro della marina, ufficio eminente ch' ei non tenne due anni compiti: lo renunziò nel 1801, e divenne successivamente consigliere di stato, prefetto marittimo all' Hâvre, e poi a Genova. Ad alcuni invidiosi riuscito essendo di fargli perdere la fiducia del governo, se ne afflisse talmente che morì di dolore a dì 8 Novembre 1807.

Oltre un numero grande di memorie inviate all' Accademia delle Scienze di Parigi, di cui era socio corrispondente, e molti articoli inseriti nel *Dizionario di Marina* che fa parte dell' *Enciclopedia metodica*, si ha di Forfait una memoria latina *sui canali navigabili*, coronata dall' Accademia di Mantova nel 1773, e un *Traité élémentaire de la mâture des vaisseaux à l' usage des élèves de la marine*, Parigi, 1788, in-8; ivi, 1815, in-4. Tale opera, intrapresa per ordine del ministro della marina per l' istruzione degli alunni, annunzia che l'autore conosceva a fondo il suo soggetto. Espone tutti i particolari che concernono l' arte del fabbricatore di alberi da nave, indica i legami acconci a farli, dichiara la maniera di lavorare tali legni, fa conoscere le loro qualità, i loro vizj e il loro valore, e spiega i metodi usati per dare agli alberi ed alle antenne la forma apparente ed esterna che è loro propria. Descrive le diverse forme di vele ed il loro uso per fare avanzare, voltare o fermare la nave. Definisce e paragona sotto le loro relazioni generali i diversi sistemi di veleggi, stabilisce le regole secondo le quali si proporzionano gli alberi e le antenne nei diversi sistemi, mostra la relazione dei veleggi che ne resultano, e determina il miglior metodo di collocare tali alberi e tali antenne. Le regole cui stabilisce in tale proposito furono trovate sì preziose ed esatte, che hanno servito e servono tuttora per guida ai costruttori e ai naviganti, sicchè questi regolano i lavori loro e i loro movimenti colla scorta delle tavole da lui compilate. La seconda edizione di tale libro, che è un vero modello di ragionamento, di ordine e di chiarezza, è dovuta alle cure di Willaumez, che vi ha fatto parecchie aggiunte.

FORMULA (*Alg.*). Risultamento generale di un calcolo algebrico che indica le operazioni che sono necessarie farsi per ottenere la quantità della quale questo risultamento esprime la generazione. Per esempio:

$$x^2+px+q=o,$$

essendo un' equazione qualunque del secondo grado si ha pel valore di x

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

e, questo risultamento assolutamente generale, e nel quale non bisogna che sostituire invece di p e di q dei numeri qualunque, per quindi ottenere con l'aiuto dell' indicate operazioni, i valori delle radici di un' equazione proposta del secondo grado, questo risultamento è ciò che si chiama formula.

FORNELLO CHIMICO (*Astron.*). Costellazione meridionale, introdotta da Lacaille; essa comprende quarantotto stelle, la maggiore delle quali è di terza grandezza.

FORONOMIA. Scienza delle leggi del moto dei solidi e dei fluidi. La parola *foronomia* deriva dalle voci greche φόρα, *moto*, e νόμος, *legge*. Vedi Meccanica e Moto.

FORTIFICAZIONE (*Matemat. applic.*). La fortificazione ha per oggetto la disposizione di un dato terreno, che si vuol difendere, in modo da porre un' armata in grado di resistere con vantaggio a forze che le siano superiori.

Quando la posizione da difendersi è di una grande importanza e la sua difesa non deve essere momentanea, si occupa il terreno con una piazza forte: e la disposizione più conveniente da darsi a questa piazza, sebbene dipenda dalla configurazione del terreno su quale deve la piazza stessa esser costruita, si appoggia a principj, lo sviluppo e dimostrazione dei quali appartiene alla *fortificazione permanente* o *murale*.

Quando poi non si ha altro oggetto che quello di occupare momentaneamente una posizione, sia per somministrare un punto di appoggio a un'armata, sia per impedire al nemico di stabilirvisi, vi si costruiscono dei trinceramenti, il disegno ed armamento dei quali costituiscono la *fortificazione passeggera* o *campale*.

Fortificazione permanente

1. Tostochè i popoli si furono costituiti in nazioni ed ebbero fondato delle città, pensarono a metterle al coperto dalle incursioni dei loro vicini. Nacque di qui l' arte della fortificazione. In principio non si fece che circondare di una muraglia il luogo che si voleva proteggere. In seguito le si scavò davanti un fosso all' oggetto di renderne più difficile l'accesso, come si vede nella figura 1 della Tavola CXXXV. Ben presto si conobbe come fosse impossibile il difender questo fosso senza esporre i difensori ai colpi degli assedianti; si costruirono quindi di distanza in distanza torri rotonde o quadrate, che permettevano di veder di fianco la parte esterna del recinto. La loro distanza massima era determinata dal tiro più lontano delle armi allora in uso. Affinchè il muro presentasse una maggior resistenza agli arietì e alle altre macchine destinate a battere in breccia, venne terrapienato, vale a dire che gli si appoggiò dalla parte interna una massa di terra, che, terminata da un piano orizzontale vicino alla sommità del muro, formava così una banchina adattata a ricevere i difensori.

L' attacco delle piazze fu allora diretto contro le porte, che presentavano una resistenza meno grande. Per difenderle, si aprirono sopra le medesime certe buche dette *piombatoj*, dalle quali gli assediati facevano piombare ogni sorta di projetti sopra gli assalitori.

Questi furono i progressi della fortificazione fino all' invenzione della polvere da cannone. Ma quando contro i recinti venne impiegata l'artiglieria, si conobbe subito che la difesa era in uno stato d'inferiorità marcatissimo di fronte all'attacco. Le torri destinate a fiancheggiare il fosso non presentavano comodità nessuna per collocarvi l' artiglieria. Allora si dovè dar loro dimensioni più considerabili, senza peraltro alterarne la forma. Si fecero terminare a guisa di freccia, la cui punta era rivolta verso la campagna. Le torri costruite in tal modo presero il nome di *bastioni* (*Tav.* CXXXV, *fig.* 2); ed un recinto così armato,

come quello che si vede nella figura 3 della Tavola CXXXV fu chiamato *recinto bastionato*, ed ha conservato lo stesso nome nella fortificazione moderna.

2. Tali miglioramenti s'introdussero verso l'anno 1500. Errard di Bar-le-Duc, che viveva al tempo di Enrico IV, è il primo ingegnere francese che abbia scritto sulla fortificazione. Il suo trattato, che è intitolato: *La Fortification démontrée et réduite en art*, ha la data del 1594. Il disegno che porta il nome di questo ingegnere vien determinato e costruito nel modo seguente. Sia AB (*Tav.* CXXXV, *fig.* 4) il lato di un esagono regolare da fortificarsi. Si conducano i raggi AO e BO al centro dell'esagono, e con queste due rette si facciano nei punti A e B due angoli CAO, DBO di 45°. Si dividano questi angoli in due parti eguali colle rette AF e BG, e i punti F e G in cui esse s'incontrano colle rette BD e AC si congiungano con una retta FG, che sarà paralella ad AB. Dai punti F e G si abbassino le perpendicolari FH e GI sulle rette AC e BD, e così sarà completamente determinato sul terreno il disegno della faccia esterna che guarda il lato AB. Le parti AH e BI sono le *facce* dei bastioni, il di cui angolo sagliente è in A e B; FH e GI sono i *fianchi*, ed FG la *cortina*. Facendo le stesse operazioni sopra gli altri lati dell'esagono, si avrà il disegno completo della pianta della piazza forte. Questo metodo è oltre ogni eredere vizioso, perchè i fianchi destinati a difendere l'angolo sagliente del bastione non possono dirigere il loro fuoco che sulla cortina: ed inoltre sono di una piccolezza estrema.

3. Marolois, ingegnere olandese, propose un disegno che presentava alcuni vantaggi sopra quello di Errard suo contemporaneo (*Tav.* L, *fig.* 3).

Per un punto A di una linea indefinita AB si conduca una retta AO, che faccia colla prima un angolo eguale alla metà di quello dell'esagono regolare. Per lo stesso punto A si conduca una retta AD, che faccia con AO un angolo di 40°, e sulla medesima si prenda una lunghezza AE di 40 tese. Dal punto E si abbassi la perpendicolare EN sopra AB. Si porti da N in I una lunghezza di 72 tese, che sarà quella della cortina. Nel punto I si alzi una perpendicolare IL eguale ad NE, si faccia IB eguale ad AN, ed unendo i due punti B ed L con una retta, sarà questa la faccia dell'altro mezzo bastione. Prolungando la retta EN, si farà con essa nel punto E un angolo GEF di 55°, e pel punto d'incontro F colla retta AO si condurrà FM paralella ad AB. Si prolungheranno le perpendicolari EN ed IL fino al loro incontro in G e H con questa retta, e la fronte sarà così pienamente determinata.

In questo disegno i fianchi possono difendere l'angolo sagliente dei bastioni, ma la direzione è troppo obliqua, e la difesa è ben lungi dall'essere efficace.

4. Il cavaliere Antonio De Ville, distinto ingegnere sotto Luigi XIII, pubblicò nel 1628 un'opera intitolata: *Les Fortifications du chevalier Antoine de Ville*, nella quale trovasi descritto il seguente disegno di fortificaziona (*Tav.* XXXIX, *fig.* 2).

Sia AE il lato di un esagono da fortificarsi: si divida questo lato in sei parti eguali. Si prendano le rette AC e DE eguali ognuna ad una di queste parti; nei punti C e D si alzino le perpendicolari CL e DH, che si prenderanno eguali ad AC. Si conducano i raggi indefiniti OA e OE. Dal punto L si abbassi LQ perpendicolare sopra AO, si prenda AM eguale a QL, e la retta ML sarà la faccia del bastione. Si farà la stessa costruzione per l'altro angolo del poligono. Il fosso deve esser tirato parallelamente alle facce del bastione, ed avere una larghezza di 20 tese. Per coprire il fianco DH, vi si faceva un *orecchione* GKIH, la cui costruzione si determinava nel modo seguente. Si divide DH in tre parti eguali. Si prende DG eguale ad una di esse, e si tira MG; su questa retta si prende GK eguale a DG, e pel punto K si conduce una paralella a DH. Così

l' orecchione è interamente determinato. Ordinariamente si usava di terminarlo in una forma rotondeggiante, che doveva esser tangente alle due rette GM e RH. EF è un secondo fianco ritirato, elevato al di sopra del fianco DG, il che dava due ordini di fuoco.

In questo disegno i fianchi sono ancora troppo obliqui; e le gole dei bastioni sono talmente strette, che è troppo difficile il collocarvi tutto ciò che è necessario alla difesa.

5. Il conte di Pagan, morto maresciallo di campo nel 1665, ha pubblicato nel 1645 un' opera che ha per titolo: *Les Fortifications du comte de Pagan*. Il suo disegno si costruisce nel seguente modo (*Tav.* L, *fig.* 4). Sia AB il lato di un esagono regolare, che supporremo di 180 tese. Si divida in due parti eguali, e nel punto di divisione D si elevi la perpendicolare DC di 30 tese. Si conduca la linea di difesa CA. Si prenda la faccia AE di 55 tese, e dal punto E si abbassi EM perpendicolare sulla linea di difesa BC. MN, condotta parallelamente ad AB sarà la cortina. All' oggetto di accrescere i fuochi dei fianchi, si costruiscono tre fianchi elevati gli uni al di sopra degli altri. Di più si costruisce un secondo bastione interno al primo. Per determinare questi fianchi, si divide FN in due parti eguali nel punto G, e si conduce AG, che si prolunga indefinitamente, egualmente che la linea di difesa AN Si prendono le parti NI, IL, LQ, ognuna di 7 tese, e si conducono le rette IH, KL e QP parallele a FN; l'altra retta che passa pel punto P è condotta parallelamente alla faccia del bastione, ma indietro alla medesima alla distanza di 16 tese. Il terrapieno del fianco superiore è a livello di quello del bastione; quello del secondo fianco è elevato della metà dell'altezza del bastione al di sopra della campagna; e il terrapieno del terzo è a livello della campagna. Si entra in questi ultimi due fianchi da alcuni sotterranei costruiti sotto il ramparo o terrapieno dello spezzamento della cortina. In questo sistema, i fuochi dei fianchi difendono bene gli angoli saglienti dei bastioni, perchè sono perpendicolari alle linee di difesa, e il bastione interno è di un eccellente effetto per difendere la piazza fino all' ultima estremità.

6. Finalmente sorse l' uomo che doveva far fare un passo immenso all'arte della fortificazione, e che ha dato per l' attacco e per la difesa delle piazze precetti che sono, meno piccolissime modificazioni, quelli medesimi che si seguono ancor oggigiorno. Sebastiano Leprêtre di Vauban nacque nel 1633. Morì nel 1707, direttore generale delle fortificazioni e maresciallo di Francia. Diresse 55 assedii, fabbricò 33 piazze forti, e ne restaurò un numero grandissimo.

Nel suo primo sistema, il maresciallo di Vauban suppone il lato dell' esagono regolare di 180 tese (*Tav.* L, *fig.* 2). Ei lo divide nel punto F in due parti eguali per mezzo della perpendicolare FD, ch' ei fa eguale ad un sesto del lato esteriore, cioè di 30 tese. Le rette DO e DP sono le linee di difesa. Prende poi le facce OL e PB eguali ai due settimi del lato esterno, e conduce i fianchi LQ e BC perpendicolarmente alle linee di difesa; la retta CQ, parallela al lato esterno, è la cortina. Le relazioni tra la lunghezza delle facce, quella della perpendicolare e quella del lato esterno sono estremamente semplici, e quando è data la lunghezza del lato esterno, tutto il disegno della fronte è interamente determinato. In seguito Vauban immaginò un secondo e un terzo sistema, ch' ei peraltro non applicò che alle piazze di Landau e di New-Brisack, ma siccome il suo primo sistema, alquanto modificato da Cormontaingne, e quello che viene generalmente adottato, così ci asterremo dal far conoscere gli altri due.

7. Nel descrivere la fronte moderna, e nel dare i mezzi per disegnarla esattamente, faremo conoscere le opere differenti delle quali la medesima si compone, indipendentemente dai bastioni, che costituiscono ciò che si chiama propriamente il *corpo della piazza*.

Supporremo il lato esterno AB (*Tav.* CXXXV, *fig.* 5) di 360 metri; la perpendicolare CD, innalzata sulla metà, un sesto di questo lato ossia di 60 metri; le facce sono il terzo di AB cioè di 120 metri. I fianchi EG ed FH sono condotti perpendicolarmente alle linee di difesa. Per dare una maggior forza alla cinta bastionata, le si aggiungono delle opere che prendono il nome generale di opere esteriori. La prima è la *tanaglia*, posta avanti alla cortina e destinata a coprire la sortita dalla porticciuola, che è un'apertura munita di un rastrello di ferro, fatta nel mezzo della cortina per andare liberamente e fuori della vista del nemico dalla piazza alle opere esteriori. A 12 metri e a 26 metri di distanza avanti alla cortina si conducono due rette paralelle ad essa, la seconda delle quali termina alle linee di difesa della fronte. Si lascia un passo di 10 metri tra la tanaglia e i fianchi dei bastioni. La tanaglia termina per la parte di dietro con due rette condotte parallelamente alle linee di difesa e a 14 metri di distanza da esse.

Dagli angoli dei bastioni come centri, si descrivono degli archi di circolo di un raggio di 30 metri, e le rette condotte tangenzialmente a queste circonferenze e alle altre circonferenze concentriche, descritte dagli stessi centri con un raggio di 34 metri limitano la larghezza del fosso del corpo della piazza e formano le *contrascarpe* di questo fosso. Si chiama *scarpa* il limite interno del fosso.

Di tutte le opere erette al di là della contrascarpa, la più considerabile e la *mezza luna*. Per costruirla, si prolunga la perpendicolare elevata sulla metà del lato esterno della fronte, e sopra di essa si prendono 96 metri a partire dal suo punto d'incontro col lato esterno. Il punto in tal modo determinato è l'angolo sagliente della mezza luna. Unendo questo punto con due punti presi sulle facce dei bastioni a 36 metri di distanza dall'angolo formato dalla faccia e dal fianco, che chiamasi *angolo allo spallo*, si ha la direzione delle facce della mezza luna, che vanno a terminare alla contrascarpa del fosso del corpo di piazza. La mezza luna è preceduta da un fosso di 20 metri di larghezza, che rotondeggia intorno all'angolo sagliente.

Nell'interno della mezza luna, si costruisce un'opera che prende il nome di *ridotto di mezza luna*. Le facce ne sono condotte a 30 metri di distanza dalle facce della mezza luna e sono ad esse parallele. Sul davanti vi è un fosso di 10 metri. Le facce terminano a 16 metri di distanza dalla contrascarpa del fosso del corpo di piazza, e per questi punti si conducono delle rette parallelamente alla perpendicolare al lato esterno della fronte di fortificazione, le quali determinano i fianchi del ridotto.

Il corpo di piazza e la mezza luna sono circondati da una *strada coperta* larga 10 metri, nella quale le parti poste avanti gli angoli saglienti della fortificazione prendono il nome di *piazze d'arme saglienti*. Le parti situate dirimpetto al punto d'incontro della contrascarpa del corpo di piazza colla contrascarpa della mezza luna sono le *piazze d'arme rientranti*. Eccone il disegno. Si prendono 54 metri sulla contrascarpa della mezza luna e su quella del corpo della piazza, e pei punti così determinati si conducono due rette che s'incontrino e che abbiano ognuna 60 metri di lunghezza. Nell'interno di questa piazza d'arme rientrante, si costruisce un *ridotto* murato, del quale uno dei lati della scarpa è determinato dalla retta che unisce l'angolo sagliente della mezza luna con un punto preso sulla contrascarpa del fosso del corpo della piazza alla distanza di 40 metri dal punto d'incontro di questa contrascarpa colla contrascarpa della mezza luna. Pel punto in cui questa retta incontra la capitale della piazza d'arme, vale a dire la retta che la divide in due parti eguali, e per un punto preso a 40 metri di distanza sulla contrascarpa della mezza luna si condurrà una retta che determinerà l'altra scarpa del ridotto. Avanti a questo ridotto si farà un fosso di 5 metri di larghezza.

In questo disegno le mezze lune pongono i bastioni assai indentro. Per fare che sporgano maggiormente, si circondano con una mezza luna senza ridotto, la quale ne sia separata da un fosso, e che allora prenderà il nome di *controguardia*.

Qualche volta avanti ai bastioni e sulle loro capitali si pongono delle mezze lune con fianchi: esse si chiamano allora *lunette*. Si circondano con una strada coperta che qualche volta è riunita a quella delle mezze lune adiacenti. Le opere così lontane dal corpo della piazza prendono il nome generale di *opere distaccate o avanzate* (*Tav.* CXXXVII).

8. Dopo esserci così occupati del disegno completo della fronte moderna, ci rimane a dare i mezzi per determinare esattamente il suo rilievo, e i rapporti di altezza che debbono tra loro avere le sue differenti parti per presentare la miglior difesa possibile. In tutto ciò che saremo per dire supporremo sempre che la fortificazione sia situata sopra un terreno orizzontale.

Si chiama *rilievo* l'altezza di un'opera di fortificazione al di sopra di un piano qualunque scelto arbitrariamente: ordinariamente le altezze si contano tutte dal fondo del fosso.

Il *rilievo relativo*, o la differenza delle altezze di due opere rapporto allo stesso piano, si chiama *comando*.

Un *profilo* è un taglio verticale, perpendicolare alla projezione orizzontale della scarpa di un' opera. Per mezzo del profilo (A) (*Tav.* CXXXV, *fig.* 5, *e Tav.* CXL, *fig.* 1 e 2), fatto perpendicolarmente alla faccia di un bastione, e rivolto poi a squadra sul ridotto della piazza d'arme rientrante; e per mezzo del profilo (B) fatto perpendicolarmente alla metà della cortina, e rivolto poi a squadra sulla mezza luna e sul suo ridotto, passeremo a spiegare le differenti parti del rilievo della fortificazione. Nel profilo (A), il punto *a* è l'estremità superiore della scarpa del bastione, la quale è coronata da un cordone di pietra, destinato a rigettare le acque piovane. Il pendio di questo muro di rivestimento, che ha ordinariamente 10 metri di altezza, è un decimo, inclinazione che numerose esperienze hanno fatto riguardare come la migliore. Questo muro ha alla sua sommità 2,50 metri di grossezza, e per conseguenza ne ha 3,50 alla base. Ha il suo fondamento ad un metro di profondità al di sotto del fondo del fosso, sopra un imbasamento o sodo, che sporge 0,60 metri fuori del piede della scarpa. La sua parete interna è verticale. La massa di terra appoggiata a questo muro si chiama *parapetto*. Esso è terminato esternamente da una scarpa la cui obliquità è quella delle terre abbandonate a sè stesse. Il punto *b* è la *cresta interna* e *c* è la *cresta esterna* del parapetto, il quale deve avere 6 metri di grossezza; la retta *bc*, che chiamasi il *pendio* del parapetto, fa coll'orizzontale un angolo la cui tangente è compresa tra il quinto e il sesto del suo raggio. Il prolungamento del *pendio* deve passare un metro circa al di sopra della sommità della contrascarpa. La linea *ac* è la *scarpa esterna*. La *scarpa interna bd* ha 3 di altezza sopra uno di base, onde dar libertà ai difensori di appoggiare comodamente il loro fucile sul pendio; la banchina *df* è 1,20 metri più bassa della cresta interna, e quest'altezza è sufficiente per poter tirare agevolmente senza troppo scoprirsi. La banchina si ricongiunge col terrapieno, situato 2,50 metri al di sotto della cresta interna, per mezzo di una scarpa che ha uno di altezza sopra due di base. Una lunghezza orizzontale di 13 metri a partire dalla cresta interna determina l'estremità del terrapieno, che si riunisce col suolo della piazza mediante una scarpa, il cui pendio è quello stesso delle terre sciolte e abbandonate a sè stesse. La contrascarpa del fosso è rivestita di muro, il quale ha pure un'inclinazione di un decimo, ma la sua grossezza è minore di quella della scarpa, perchè la massa della terra da sostenersi è assai meno considerabile. La strada coperta, che

ha 10 metri di larghezza, ha una cresta interna elevata di 2,50 metri al di sopra della sommità della contrascarpa, la qual cresta si ricongiunge col terreno circostante dalla parte della campagna mediante un piano la cui inclinazione varia tra un quindicesimo e un trentesimo e che si chiama *spalto*. La cresta della strada coperta o dello spalto deve esser tale che copra il muro della scarpa dalla vista del nemico, vale a dire che conducendo per la sommità della scarpa e per la cresta dello spalto un piano, questo piano deve lasciare al di sotto di sè tutti gli stabilimenti ed opere del nemico, o almeno esser loro tangente.

La nomenclatura delle differenti parti che compongono il profilo (B) è assolutamente la stessa di quella del profilo (A). Le relazioni di comando che debbono esistere tra queste differenti parti sono le seguenti. Il piano delle creste degli spalti della mezza luna passa a 3,85 metri al di sopra del piano del terreno; il piano delle creste interne della mezza luna passa a 5,70 metri al di sopra del terreno; quello delle creste del ridotto a 6,35 metri, e quello della cresta della cortina, e per conseguenza di tutte le creste del corpo di piazza, a 7,00 metri.

Mediante tutti questi dati, sarà facile il determinare compiutamente la pianta e il rilievo di un poligono da fortificarsi, supponendo che il terreno sul quale è situato sia orizzontale, egualmente che il terreno circonvicino.

9. Quando il terreno che circonda la fortificazione non è più orizzontale, il rilievo non è più lo stesso di quello del caso del quale abbiamo fin qui trattato. I parapetti delle opere debbono esser tali che i loro terrapieni non possano esser veduti dal nemico. È evidente che avremo soddisfatto a questa condizione, se il piano delle creste interne passerà al di sopra di tutti gli stabilimenti degli assedianti. Si vede senza difficoltà che in questo caso non è possibile il tenere tutte le creste interne di una piazza forte in un medesimo piano; perciò bisogna cercare quale è il minor numero possibile di piani che possono risolvere il problema, soddisfacendo alla condizione di non ricorrere a rilievi eccessivi.

Il piano che contiene le creste interne di un' opera si chiama *piano di diffilamento*; e *diffilare un' opera* vuol dire determinare questo piano in modo che passi al di sopra degli stabilimenti del nemico. Siccome non è necessario coprirsi che dai punti che possono battere con qualche sicurezza, si è fissato il limite del diffilamento a 1400 metri, tiro di punto in bianco dei pezzi d' artiglieria del massimo calibro. Al di là di questa distanza non si ha più riguardo alle accidentalità del terreno.

Uno dei migliori mezzi che possano impiegarsi per diffilare una piazza si è di farlo per ciascuna fronte separatamente. Allora si comincia dal determinare la *costa*, o distanza dal piano di confronto (*Vedi* Scala di Pendio), del fondo del fosso, e prendendo nel mezzo della scarpa della cortina un punto che sia 10 metri al di sopra del fondo del fosso, si considera questo punto come appartenente al piano di diffilamento. La questione si riduce allora a far passare per un punto dato un piano che passi 1,50 metri al di sopra delle altezze conosciute. E se si diminuiscono di 1,50 metri le *coste* di tutte le curve orizzontali le quali determinano le ineguaglianze del terreno, non si tratterà più che di condurre ad esse un piano tangente per questo punto dato. *Vedi* Scala di Pendio.

Accade spesso che non possa diffilarsi una fronte con un solo piano: allora si fa uso di due piani di diffilamento i quali si tagliano lungo la perpendicolare innalzata sul mezzo della cortina. In questo caso, quando i due piani si tagliano a grooda, si costruisce una *traversa* lungo la direzione della capitale della mezza luna e del ridotto, all' oggetto di preservare i difensori dalle viste di rovescio.

Spesso riesce più comodo l' obbligare il piano di diffilamento a passare per una retta di cui si determina la posizione e le coste. Questa retta si chiama *direttrice*. Il problema del diffilamento delle opere è uno dei più difficili dell' arte

della fortificazione, ed è impossibile il determinare anticipatamente i piani che dovranno scegliersi. Soltanto dopo avere acquistato una grande esperienza con un lungo esercizio potrà giungersi a trovare rapidamente quali sono i migliori mezzi per preservare i difensori, non solamente dalle viste dirette o di fronte del nemico, ma ancora dalle viste di rovescio e d'infilata.

Vi sono peraltro certe posizioni per le quali il problema del diffilamento è insolubile, a meno che non vogliano darsi alla fortificazione dei rilievi affatto straordinarj.

Quello che allora può farsi di meglio si è di abbandonare una posizione che non può mai dar luogo ad una buona difesa.

10. Per assicurare le comunicazioni delle differenti parti della fortificazione tra loro, si costruisce sotto la metà delle cortine un androne a volta che sbocca a due metri al di sopra del fondo del fosso: questo androne continua sotto la tanaglia, ma a livello del fondo del fosso. Per potarsi recare a coperto nel ridotto della mezza luna, si costruisce da ciascuna parte del mezzo della tanaglia e nel fondo del fosso un'opera di terra, che si chiama *coponiera*. Si sale nella tanaglia e nel ridotto della mezza luna per due scale. Un corridojo sotterraneo fatto sotto il fianco del ridotto della mezza luna conduce nel suo fosso, e dirimpetto si trova una scala per cui si entra nella mezza luna. Altre due scale conducono nel ridotto della piazza d'arme rientrante, il quale ha comunicazione colla strada coperta per mezzo di due passi sotterranei che sboccano nel suo fosso, dal quale poi si ascende al terrapieno della strada coperta per mezzo di un'erta lungo la contrascarpa del fosso stesso (*Tav.* CXXXVII).

Uno dei grandi difetti di questo sistema è di presentare delle comunicazioni poco facili. Le scale sono strette e ripide, e siccome non hanno parapetto o appoggio, sono di difficile accesso per un soldato carico del suo sacco e delle sue armi. Non essendovi strada adattata per il trasporto dell'artiglieria nelle opere esterne, bisogna gettare i pezzi e i loro armamenti nel fosso del corpo di piazza, e per mezzo di capre collocarli poi nelle opere da difendersi. Mezzo assai lento, e che necessariamente danneggia il materiale, qualunque precauzione si prenda.

I rami della strada coperta della mezza luna potendo facilmente esser battuti nel senso della loro lunghezza dai projetti, vi si costruiscono delle traverse all'oggetto di proteggere i difensori. Le traverse che possono esser necessarie sulle facce delle mezze lune non si costruiscono mai che nel tempo stesso dell'assedio, non potendosi determinare anticipatamente la posizione loro più conveniente.

11. Nella difesa delle piazze si fa uso con molto vantaggio delle *mine*. Si chiamano con questo nome certe cavità fatte nella terra, ripiene di una quantità di polvere da cannone, destinata a far saltare colla sua esplosione tutto il terreno che si trova al di sopra di essa. Si costruiscono con muri delle *gallerie*, o condotti sotterranei, in differenti parti della fortificazione, e da esse si parte per costruire durante un assedio altre gallerie più piccole, che si chiamano *rami*, alle estremità dei quali si pone la quantità di polvere necessaria per produrre l'effetto voluto. Si chiamano *contrammine* le gallerie costruite anticipatamente.

12. Esaminiamo ora quali sono le proprietà della fronte di fortificazione che fin qui abbiamo descritto. Immaginiamo che il nemico voglia impadronirsi della piazza, percorriamo rapidamente le diverse epoche dell'assedio, e vediamo quali soccorsi possono prestarsi scambievolmente le differenti parti della piazza.

Per cominciare l'attacco di una piazza forte, il nemico la *investe*, vale a dire che manda avanti delle truppe per impadronirsi di tutte le strade che vi mettono capo, intercettare tutte le comunicazioni, e impedire che nessuno possa entrare nella piazza o sortirne. L'armata assediante prende quindi le sue posizioni. Essa

pianta il suo campo in modo da esser fuori del tiro del cannone degli assediati, e lo circonda di trinceramenti destinati a proteggerlo contro un'armata di soccorso e contro le sortite della guarnigione. Si determina quale è il punto più favorevole per l'attacco, e si comincia l'apertura della *trinceo*. Si chiama trincea un fosso largo da tre a quattro metri e profondo un metro, del quale si getta dalla parte della piazza la terra che di mano in mano si scava. Si forma così un parapetto che pone al sicuro dal fuoco degli assediati gli uomini che sono nel fondo della trincea. La prima trincea si fa a 600 metri di distanza dagli angoli saglienti delle opere attaccate e si tira paralellamente alle opere (*Tav.* CXL, *fig.* 3). Questa trincea si chiama propriamente *parallelo*. I Mussulmani sono stati i priori a fare uso delle parallele nel celebre assedio di Candia La prima parallela comunica per mezzo di trincee coi depositi d'armi e di attrezzi da guerra, che si stabiliscono ordinariamente a una distanza di millecinquecento in milleottocento metri dalla piazza. Una seconda parallela è tirata a 300 metri dalla piazza. Essa comunica colla prima per mezzo di trincee serpeggianti, onde non essere infilate o imboccate dal fuoco degli assediati. I serpeggiamenti o svolte della trincea si chiamano ancora *rami della trinceo*. Essi hanno per linea di mezzo o direttrice la capitale delle opere attaccate. Nella seconda parallela si piantano le batterie. Esse sono disposte perpendicolarmente ai prolungamenti delle creste o cigli interni delle opere. Così si può far percorrere ai projetti tutta la lunghezza della faccia di un'opera. Diconsi queste *batterie di rimbalzo.* Si erigono ancora delle *batterie in dirittura*, vale a dire disposte parallelamente alle opere da battersi. Poco dopo che è cominciato il tiro di rimbalzo, l'assediato si vede costretto ad abbandonare i pezzi che armano le facce della mezza luna, perchè in poco tempo vengono essi smontati. Non è nemmeno più possibile di rimanere nelle strade coperte. Appena pochi uomini protetti dalle traverse possono azzardarsi a venire ad esaminare i progressi dell'assediante, e ad inquietarlo con qualche tiro di moschetto. Frattanto l'assediante costruisce i rami della trincea che lo conducono alla terza parallela, che egli apre a 60 metri di distanza dagli angoli saglienti delle opere attaccate. Sul davanti dispone una quarta parallela, nella quale pianta delle batterie di mortaj, destinate a scacciare i difensori dalla strada coperta e dai ridotti delle piazze d'arme rientranti. Dalla terza parallela si avanza verso il sagliente della strada coperta camminando sulla capitale per una trincea che prende il nome di *zappa*. A 30 metri di distanza dalla cresta o ciglio dello spalto, la zappa segue una direzione parallela a questa cresta fino al prolungamento della contrascarpa della mezza luna. Il parapetto delle zappe si costruisce per mezzo di *gobbioni*, sorta di panieri di figura cilindrica senza fondo, che si riempiono di terra, ed ai quali si appoggia la massa delle terre estratte dalla trincea. La parte della zappa parallela alla cresta dello spalto riceve una grande elevazione mediante tre ordini di gabbioni, il che permette di scoprire la strada coperta e di scacciarne a colpi di fucile gli uomini che potessero ancora trovarvisi. Allora la zappa si chiama propriamente un *cavaliere di trincea*. Quando il cavaliere di trincea ha prodotto il suo effetto, l'assediante riprende la sua zappa e la conduce fino a quattro o cinque metri dalla cresta dello spalto, per continuarla poi da una parte e dall'altra dell'angolo sagliente, parallelamente alla cresta. Dicesi questo *assiepare la strada coperto*. Qui si dispongono quattro *botterie da breccia*: due contro l'angolo sporgente della mezza luna, e due contro i due bastioni del corpo di piazza che scopronsi per l'apertura del fosso della mezza luna.

13. Qui diviene sensibilissimo uno dei grandi difetti del sistema di fortificazione. Le opera esterne dovrebbero difendere il corpo di piazza fino all'ultima epoca dell'assedio, e non ostante appena è stata assiepata la strada coperta

può subito aprirsi la breccia nel corpo di piazza. Tostochè la breccia è divenuta di facile accesso, vale a dire quando le rovine della muraglia e le terre smottate hanno formato una specie di scala che permetta di penetrare nell'interno della piazza, l'assediante aprirà una galleria da mina sotto la strada coperta della mezza luna e la farà sboccare nel fondo del fosso di quest'opera. Col suo mezzo potrà recarsi rapidamente al piede della breccia, e se il suo attacco violento riesce, si sarà impadronito del bastione, e per conseguenza della piazza, senza essere stato obbligato a prendere la mezza luna e il suo ridotto. Un gran numero d'ingegneri si è occupato di questo problema importante, e molte disposizioni sono state proposte. L'esperienza non ne ha per anche sanzionata nessuna, talchè è difficile il dare un giudizio sicuro in proposito; poichè un attacco fatto sulla carta procede sempre a seconda di quello che lo dispone, ed è impossibile di nulla concluderne sul maggiore e minor vantaggio della tale o tale altra disposizione. Ciò non ostante si evita una parte degl'inconvenienti accennati di sopra, formando un trinceramento nell'interno del bastione, perchè dalla perdita di questo non ne consegua quella della piazza, e perchè in seguito il nemico non possa mantenersi nel bastione, ove sarebbe esposto al fuoco della mezza luna e del suo ridotto. L'assediante sarà dunque costretto a prendere la mezza luna, al che non potrà giungere che dopo avervi aperto una breccia, dopo averla spianata sufficentemente, aver costruito una galleria sotterranea che gli permetta di scendere nel fosso, ed aver dato l'assalto. Presa la mezza luna, rimarrà a prendersi il ridotto, pel quale bisognerà operare in un modo analogo. Ma qui l'assediante non si trova in circostanze così favorevoli come nell'attacco della mezza luna. Egli non potrà infatti farvi portare la sua artiglieria che con molto stento, e la strettezza del terrapieno gli porgerà poca comodità per piantarvi delle batterie nelle quali sia egli al coperto dal fuoco del ridotto. Non ostante anco il ridotto alla fine sarà preso, perchè la sua guarnigione sarà sempre piccolissima rapporto alle forze delle quali potrà disporre il nemico, e perchè non può esservi speranza di sloggiarlo a viva forza dalla mezza luna.

Subitochè il nemico si sarà impadronito del ridotto della mezza luna, verrà a stabilirsi nella gola per piantarvi delle batterie destinate a far la breccia nella tanaglia. L'utilità di quest'opera apparisce adesso in un modo evidente, poichè, se essa non esistesse, l'assediante potrebbe far subito la breccia nella cortina e per conseguenza dare immediatamente l'assalto al corpo della piazza. L'occupazione del ridotto della mezza luna rende impossibile il soggiorno dell'assediato nei ridotti delle piazze d'arme rientranti, perchè egli vi avrebbe il nemico a ridosso e vi sarebbe battuto. È questo un altro degli inconvenienti del sistema, perchè un'opera non dovrebbe mai esser resa inutile che dopo essere stata attaccata direttamente. Non bisogna peraltro concluderne che i ridotti delle piazze d'arme rientranti siano inutili. Il loro scopo principale è quello di procurare un ricovero sicuro ai difensori della strada coperta nel caso in cui il nemico tentasse un attacco violento. Quando il nemico si è impadronito di tutte le opere esterne, spinge le sue trincee verso l'angolo sagliente della strada coperta del bastione, l'assiepa, pianta le sue batterie da breccia, e dà quindi l'assalto al corpo della piazza. Allora non rimane più alla piazza assediata che ottenere una capitolazione onorevole.

Noi abbiamo supposto che le mezze lune sporgessero verso la campagna più dei bastioni. Quando gli angoli saglienti dei due bastioni e quello della mezza luna si trovano presso a poco sopra una medesima linea retta, si può cannoneggiare nel tempo stesso il sagliente delle tre strade coperte, e l'assedio ne rimane tanto più abbreviato, specialmente se i bastioni non hanno trinceramento interno.

FORTIFICAZIONE PASSEGGERA.

14. I trinceramenti impiegati nella fortificazione passeggera sono semplici o composti. Questi ultimi prendono il nome di *linee*.

I trinceramenti semplici, o elementi delle linee, comprendono:

Il *Dente*. Quest' opera è composta di due facce congiunte ad angolo sagliente verso il nemico, e aperta dalla parte della sua gola (*Tav*. CXXXVI, *fig*. 1). Ha poca estensione, e non serve che a coprire uno sbocco, un ponte gettato sopra un torrente, ec.

La *Lunetta*. È questa un dente, al quale si aggiungono dei fianchi, all'oggetto di fiancheggiare delle opere collaterali, o per iscoprire delle parti di terreno che sfuggirebbero alla vista delle facce. La lunghezza delle facce varia dai 30 ai 60 metri, e quella dei fianchi dai 12 ai 15 metri: quest' opera è aperta alla gola (*Tav*. CXXXVI, *fig*. 2).

Il *Ridotto*. È la più semplice delle opere chiuse. Esso ha ordinariamente la forma di un quadrato (*Tav*. CXXXVI, *fig*. 3); non ostante qualche volta ha la forma di altro poligono. Siccome non ha angoli rientranti, non ha che dei fuochi diretti, e per conseguenza non può difendere il suo fosso. Di più, avanti a ciascun angolo sagliente vi è un *settore mancante di fuoco*, settore che è determinato dal prolungamento delle due facce.

Il *Forte stellato* è un ridotto del quale si rompono i lati per avere una difesa dei fossi (*Tav*. CXXXVI, *fig*. 4). Quest' opera è cattiva. La sua capacità interna è estremamente piccola, e i settori privi di fuoco sono assai grandi.

I *Denti di sega* sono stati immaginati per dare dei fianchi a un trinceramento in linea retta (*Tav*. CXXXVI, *fig*. 5). Le sue facce non debbono avere più di 80 metri di lunghezza e i suoi fianchi più di 12 metri.

La *Fronte bastionata*, che si compone delle stesse parti della fortificazione permanente, non deve avere il lato esterno maggiore di 250 metri (*Tav*. CXXXVI, *fig*. 6). Può qualche volta esser ridotto ad averne soli 100. La lunghezza dei fianchi dei bastioni è, pel quadrato, di $\frac{1}{8}$ del lato esterno; pel pentagono, di $\frac{1}{7}$; e per gli altri poligoni di $\frac{1}{6}$. Le facce sono i $\frac{2}{7}$ del lato esterno.

Nelle opere chiuse, la capacità interna deve essere abbastanza grande per contenere facilmente tutto ciò che è necessario alla difesa. Vi è dunque una relazione tra lo sviluppo di un'opera e la sua capacità. Siano x la lunghezza del lato di un ridotto quadrato, y il numero dei difensori, v quello degli uomini compresi nel corpo di riserva, n il numero degli ordini di uomini posti sul parapetto, p quello dei pezzi di cannone, ed s lo spazio necessario per collocare ciò che occorre all' artiglieria espresso in metri quadrati. Si avrà la relazione

$$(x-8)^2 = \frac{2}{3}y + s,$$

supponendo che dalla cresta interna fino al piede della scarpa della banchina vi sia una distanza di quattro metri, e che un uomo occupi i due terzi di un metro quadrato.

Da un'altra parte, $4x$ è eguale alla lunghezza occupata sul parapetto dai difensori e dai pezzi d' artiglieria, il che darà

$$4x = \frac{y-v}{n} + 5p,$$

calcolando 5 metri lo spazio occupato da un cannone. Se in quest' ultima equazione si fa $v = 0$ e $n = 2$, si esprimerà che il ridotto è difeso da due ordini di uomini, senza riserva; il che darà evidentemente il *maximum* di lunghezza del suo lato. La prima relazione esprimendo che lo spazio è strettamente necessario per contenere ciò che occorre alla difesa, darà il *minimum* del lato del ridotto. Si otterranno così due limiti, tra i quali si potrà scegliere. E mediante le due equazioni superiori, essendo date quattro delle quantità che le compongono, si potranno trovare facilmente le altre due.

15. Il profilo da darsi ad un' opera di campagna dipende dalla qualità del terreno su cui si lavora, dalla natura dell' attacco che l'opera deve sostenere, dalla resistenza che deve presentare, dalla durata presunta della sua utilità, e dal tempo e dai mezzi che possono destinarsi alla sua costruzione.

La cresta interna (*Tav.* CXXXVI, *fig.* 7) dovendo porre al coperto i difensori posti sul terrapieno, non potrà aver meno 2,00 metri di elevazione; essa ne avrà 2,50 quando l' opera conterrà degli uomini a cavallo. La grossezza del parapetto dipende dal peso dei projetti al quale è esposto. Siccome in generale le opere di fortificazione passeggera non sono attaccate che dall'artiglieria da campagna, basta dare al loro parapetto una grossezza di tre metri. L' inclinazione del pendio varia da $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{6}$. Esso deve però esser tale che il suo piano prolungato passi circa un metro al di sopra della contrascarpa del fosso. La scarpa interna deve avere uno di base sopra tre di altezza. Siccome le terre con questa inclinazione non possono sostenersi da sè medesime, questa scarpa è rivestita di piote o di canne. La banchina, che è a 1,20 metri al di sotto della cresta interna, ha 1,20 metri di larghezza, e si ricongiunge col terrapieno mediante una scarpa che ha 2 di base sopra 1 di altezza. La scarpa esterna ha il declive naturale delle terre. Affinchè il peso del parapetto non faccia smottare o franare questo declive, si lascia al piede della scarpa esterna un *rilascio* di una larghezza da 1,00 a 0,60 metri. La scarpa ha per base i due terzi della base del declive naturale delle terre, restando la stessa l' altezza; la base della contrascarpa è la metà dalla base del medesimo declive.

16. Il quesito della proporzione tra il vacuo dello scavo fatto nella costruzione di un' opera e il volume che occupa il terrapieno formato colle terre scavate è uno dei più importanti della fortificazione passeggera. In certi casi è molto difficile; ma, per semplicizzarlo per quanto è possibile, supporremo che l'opera sia situata in un terreno orizzontale.

Siano R il volume del terrapieno, S la superficie del suo profilo, ed l la lunghezza del cammino percorso dal centro di gravità di questo profilo. Si avrà la relazione

$$R = Sl.$$

Indicando con D il volume dello scavo o del fosso, con S' la superficie del profilo del fosso stesso, e con l' il cammino percorso dal centro di gravità di questo profilo, si avrà la relazione

$$D = S'l'.$$

Se $\frac{1}{m}$ è il rapporto del rigonfiamento delle terre smosse, avremo, per esprimere che il terrapieno deve essere eguale allo scavo, l' equazione

$$R = D\left(\frac{1+m}{m}\right).$$

Donde, sostituendo in luogo di R e di D i loro valori, ed isolando S', si ha

$$S' = S\frac{l}{l'}\left(\frac{m}{m+1}\right),$$

equazione che dà S' in funzione di l'. Si otterrà un' approssimazione sufficiente prendendo per l' la lunghezza della linea di mezzo del fosso.

Rimangono ora a determinarsi, per mezzo di S', le dimensioni del fosso, sottoponendolo per il declive della scarpa e della contrascarpa alle condizioni espresse di sopra.

Siano x la larghezza del fosso, y la sua profondità, ed a l'angolo del declive naturale delle terre: si avrà:

$$S' = y\left(x - \frac{7}{12} y \cot a\right):$$

donde

$$x = \frac{7}{12} y \cot a + \frac{S'}{y},$$

$$y = \frac{6}{7} \operatorname{tang} a \left(x - \sqrt{x^2 - \frac{7}{3} S' \cot a}\right).$$

Nel valore di y non si considera che il segno meno, perchè è il solo che convenga al quesito, giacchè y deve diminuire quando x aumenta e viceversa. Essendo dato o x o y, potremo sempre per mezzo di queste relazioni ottenere il valore dell' altra variabile, facendo attenzione che x è obbligato ad avere almeno 4 metri, e che y è compreso tra 2 e 4 metri. Quando, scegliendo tra questi limiti, si otterrà per y un valore immaginario, si cangerà allora l'inclinazione del pendio del parapetto, il che darà un altro valore per S', e permetterà di ottenere dopo pochi tentativi un valore reale pel radicale.

17. Quando la fortificazione è situata sopra un terreno disegnale, le creste interne non possono esser più contenute in un piano orizzontale, perchè allora esse non proteggerebbero i difensori posti sul terrapieno. Bisogna diffilare l'opera; e siccome non si ha allora il tempo di levare per mezzo di curve orizzontali la pianta del terreno circostante onde conoscerne con esattezza le diverse eminenze, bisogna necessariamente che le operazioni di diffilamento si eseguiscano con sollecitudine, senza aver bisogno di ricorrere ai mezzi impiegati nella fortificazione permanente.

Sopponiamo che si voglia diffilare una lunetta da un' altezza situata avanti di essa e della quale sia ben determinato il punto culminante. Il piano di diffilamento dovendo passare a 1,50 metri al di sopra del terreno, noi sopporremo questo piano abbassato di questa stessa quantità e allora diverrà esso tangente alle altezze. Determineremo sulla gola dell' opera il punto d'intersezione di questa linea colla retta che unisca l'angolo sagliente della lunetta col punto culminante del terreno. Si pianterà in questo punto una biffa dell' altezza di un metro, il vertice della quale sarà evidentemente nel piano di diffilamento. Facendo passare per questo vertice e pel punto culminante un raggio visuale, sarà questo contenuto interamente nel piano di diffilamento, e la sua intersezione con una pertica piantata sull'angolo sagliente dell' opera determinerà un punto appartenente a questo medesimo piano. Rialzandolo ora di 1,50 metri, si avrà l'altezza della cresta interna del sagliente.

Se il diffilamento avesse per oggetto di proteggere i difensori da varie altezze, il servirsi di un solo piano condurrebbe spesso a rilievi eccessivi. Si adopreranno allora due piani che si taglino lungo la capitale dell' opera, e lungo

questa intersezione si costruirà una traversa destinata a coprire i difensori dalle viste di rovescio. Qualche volta non basterà più una sola direttrice, e bisognerà adoprarne parecchie. Tocca alla sagacità dell'Ingegnere a determinare quali saranno i migliori mezzi da impiegarsi, non perdendo però giammai di vista che i rilievi debbono essere i più piccoli possibili. In tutti i casi, quando i differenti piani di diffilamento si taglieranno a gronda, bisognerà necessariamente costruire delle traverse lungo la loro intersezione.

In tutti i casi dei quali ci siamo occupati, la proporzione tra il vacuo dello scavo e il terrapieno non può farsi che per facce separate, e talvolta anco per porzioni di faccia. Allora si ricorrerà al teorema di Tommaso Simpson o al *profilo medio*.

18. La difesa dei trinceramenti è affidata a truppe d'infanteria sostenute da un certo numero di cannoni. Sul sagliente dell'opera si costruisce una *barbetta* per potere scoprire tutto il terreno circostante, e per avere un campo di tiro più vasto. Sulle facce, i cannoni si pongono nelle cannoniere, potendo la direzione del tiro calcolarsi preventivamente, e dovendo restar la stessa in tutta la durata dell'attacco.

19. Indipendentemente da questi mezzi di difesa, ve ne sono altri compresi sotto il nome generico di *difese accessorie*.

Si dispongono lungo la contrascarpa degli alberi tagliati e gettati a terra coi rami rivolti verso il nemico. Dicansi queste *abbattute*. Sul davanti del sagliente, che è il punto di attacco a motivo del settore mancante di fuoco, si dispongono delle *buche di lupo*. Sono queste certe cavità costruite a forma di un tronco di cono, del quale rimane al di sopra la base più grande. La loro profondità è circa un metro, e nel centro è piantato un chiodo d'acciajo assai appuntato. Si rende aspro il terreno con piccoli pali sporgenti in fuori della lunghezza dai 30 ai 40 centimetri posti alla distanza di 20 o 30 centimetri. Si spargono dei *triboli*, sorta di chiodi a quattro punte disposta in modo che una di esse rimanga sempre rivolta in alto. Si piantano delle *palizzate* nel fondo del fosso al piede della controscarpa. Si conficcano sotto il parapetto delle *steccate*, o palizzate inclinate, che sporgono sul pendio della scarpa, e si oppongono alla scalata. Quando le località lo permettono, si fa uso delle acque come difesa accessoria, o facendo delle inondazioni, o riempiendo i fossi di acqua.

20. Si chiamano *linee* i trinceramenti composti, nei quali entrano come elementi le differenti opere che abbiamo descritte precedentemente. Le linee sono *continue* o *ad intervalli*.

Le prime, come lo dice anco il loro nome, abbracciano tutto il terreno da difendersi con una serie di opere tra le quali non vi è rottura di continuità. Vi si fa uso, nelle parti meno suscettibili di attacco, della linea a denti di sega, avendo però cura di troncare i denti di tre in tre metri. Nelle altre parti si ricorre alla ciota bastionata. Le linee offrono grandi inconvenienti. Il loro grande sviluppo esige un tempo considerabile per la loro costruzione, e un numero grande di uomini per la loro difesa. Rotte e forzate in un punto, divengono del tutto inutili.

Le linee ad intervalli si compongono di una combinazione di ridotti, di lunette e di denti. Si dispongono ordinariamente in due linee, ed in modo che si fiancheggino reciprocamente. In questo caso, si chiudono alla gola i ridotti e le lunette, o con un fosso, o con *cavalli di Frisia*, o con palizzate; e ciò perchè la cavalleria spinta al galoppo non possa, dopo avere oltrepassato l'intervallo delle linee, venire a prendere le opere per la gola.

21. Indipendentemente da questi trinceramenti costrutti a bella posta, un generale abile sa approfittarsi di tutto ciò che il caso può presentare di utile per

la difesa, come i villaggi, le case isolate, i molini, le chiese, i cimiteri ec. Il solo principio che possa esser dato per simili disposizioni è questo, che i difensori non siano esposti a fuochi di rovescio o d'infilata, e che in ogni sinistro evento sia sempre assicurata la loro ritirata.

Per maggiori notizie si consultino le opere di Vauban, di Cormontaingne, di Carnot, e il *Mémorial de l'officier du génie.*

FORZA. (*Mec.*). Causa qualunque che mette un corpo in moto, o più generalmente, che tende a muovere o muove realmente un corpo.

Secondo questa definizione, la potenza muscolare degli animali, come pure la gravità, l'urto di due corpi, la pressione, ec., si considerano come *forze* o sorgenti di moto, perchè è evidente, dalla giornaliera esperienza, che i corpi esposti alla libera azione di una di queste cause, sono posti in moto ovvero provano delle variazioni in quello che essi possono avere digià.

La natura intima delle forze, delle quali l'aspetto dei fenomeni fisici ci conduce ad ammettere l'esistenza, è interamente incognita, e sarebbe impossibile di sottoporla al calcolo, se non si stabilissero delle relazioni matematiche tra gli effetti per mezzo dei quali esse si manifestano, e se inseguito non si estendessero queste relazioni alle forze esse stesse, supponendole proporzionali ai loro effetti. Dipende da ciò che si chiamano *forze eguali*, per esempio, due forze capaci a produrre il medesimo effetto, e, per conseguenza a distruggersi scambievolmente ovvero a farsi equilibrio, quando esse si trovano applicate in senso opposto l'una dell'altra, ad un medesimo punto materiale, qualunque d'altra parte siano i loro caratteri distinti. Esistono certamente differenze essenziali molto maravigliose tra la forza della gravità, la forza elastica del vapore di acqua, e gli sforzi spontanei degli uomini e degli animali; ma non è però meno vero che, senza che sia necessario di risalire alle loro prime cause, i fenomeni che resultano dal concorso di queste forze permettono di paragonare le intensità delle loro azioni, di rappresentarle con numeri o con linee, e di sottoporle mediante ciò alle leggi generali delle quantità.

Le forze meccaniche possono riportarsi a due classi, cioè: quelle che agiscono sopra un corpo in riposo, e quelle che agiscono sopra un corpo in moto. Le prime che si concepiscono come residenti in un corpo sostenuto da un piano o sospeso ad un ostacolo invincibile, si chiamano *forze* di *pressione*, di *tensione*, ovvero Forza morta, esse possono sempre misurarsi per mezzo di un peso. In questa classe di forze, si possono porre le forze dette *centripete* e *centrifughe* (*vedi* queste parole), quantunque esse risseggano in un corpo in moto, perchè queste forze sono omogenee coi pesi, pressioni o tensioni di diverse sorte.

Le forze dei corpi in moto sono potenze che risseggono in un corpo tanto tempo quanto il moto continua; si chiamano *forze motrici*, ovvero Forze viva. Esaminiamo successivamente queste diverse forze.

Forza Morta. Questa, come l'abbiamo digià detto, è quella che agisce contro un ostacolo invincibile, la quale per conseguenza consiste in una semplice tendenza al moto, e la quale non produce alcun effetto sopra l'ostacolo sul quale agisce. Tale è per esempio, la *forza* di un corpo pesante che tende a discendere, ma che è posto sopra una tavola o sospeso ad una corda. Questo corpo non potrebbe discendere, perchè la resistenza della tavola o della corda l'impedisce, ma egli *pressa* la tavola o *tende* la corda, e prova con ciò la sua tendenza al moto, la quale non può aver effetto fintantochè questi ostacoli invincibili ci si oppongono. Questa pressione del corpo pesante è perciò senza effetto nei due casi; o piuttosto, gli effetti che essa produce, vale a dire, la pressione della tavola o la tensione della corda, sono effetti i quali non consu-

mano punto la causa pressante. Così questa causa pressante non perde niente della sua forza, perchè essa non la sviluppa punto, ma tende solamente a svilupparla. Quando dunque gli ostacoli sono invincibili, l'azione della forza che tende a spostargli, è ad ogni momento distrutta da questi ostacoli, e ad ogni momento riprodotta dallo sforzo continuo che fa la forza pressante per vincere questa resistenza.

La *forza morta* di un corpo si misura dal prodotto della sua massa o della sua propria materia, moltiplicata per la sua velocità, vale a dire, per la velocità che essa avrebbe nel primo istante, se l'ostacolo che la ritiene vanisse a cedere.

Forza viva. È quella di un corpo attualmente in moto, la quale agisce contro un ostacolo che cede e che produce un effetto sopra di esso. Tale è, per esempio, la *forza* di un corpo, il quale, con la sua gravità, è cadoto da una data altezza, e urta in un ostacolo che esso incontra. Tale è ancora la forza di una molla che si rallenta contro un ostacolo che essa sposta.

Fino al Leibnizio si era sempre pensato, che la *forza viva* dovesse esser valutata come la *forza morta*, per il prodotto della massa moltiplicata per la semplice velocità, ma questo grand' uomo stabilì che bisognava valutarla pel prodotto della massa moltiplicata pel quadrato della velocità, (*vedi Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum*. Act. trad. Leipsic. 1686 pagina 161). Per quanto quest' opinione fosse opposta ai principii conosciuti e adottati fin' allora, essa trovò ardenti promotori, e fece nascere fra i geometri una celebre disputa, della quale si possono vedere i documenti nelle *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi*, 1728, e in quelli di *San Petersbourg*, t. 1. Senza entrare in questo punto nelle ragioni prò e contro che sono state allegate dai due partiti con più o meno esattezza, cercheremo di schiarire la questione rendendo più esatta, secondo quanto ne ha detto il Cornat, quello che si deve intendere per l'espressione di *forza viva*.

Gli uomini, gli animali, e gli altri agenti della medesima natura, possono esercitare forze paragonabili a quelle dei pesi, sia infatti per mezzo dei pesi loro propri, sia per gli sforzi spontanei dei quali essi sono capaci. Ora, si presentano due modi altrettanto naturali, tanto l'uno quanto l'altro di valutare l'azione che essi realmente esercitano. Uno consiste a vedere qual peso un uomo, per esempio può portare, o quale sforzo valutato in peso, esso può sostenere, tutto rimanendo in riposo. Allora la forza di quest' uomo, è una forza di pressione equivalente ad un tale o tal' altro peso, e si può considerare come una' *forza morta*.

Il secondo modo di valutare la forza di un uomo, di un cavallo ec., è di esaminare l'opera che esso è in stato di fare in un dato tempo; in un giorno, per esempio, con un lavoro seguitato. Sotto questo punto di vista, per giungere come nel primo caso ad una valutazione esatta, possiamo ancora paragonare il risultamento del suo lavoro, all'effetto della gravità; poichè è naturale di valutare questo lavoro, e per mezzo del peso che esso può elevare in un dato tempo, e all'altezza alla quale esso eleva questo peso. Ed è così che s'intende, quando si dice che un cavallo equivale, per la forza, a sette uomini; ciò non vuol dire, che se sette uomini tirassero da una parte e il cavallo dall'altra, vi sarebbe equilibrio, ma che in un lavoro seguitato, il cavallo da se solo eleverà, per esempio, tanta acqua dal fondo di un pozzo, ad una data altezza, quanta i sette uomini riuniti nel medesimo tempo. Quando s' impiegano degli operai, l'interesse è di sapere ciò che essi possono fare di lavoro in un genere analogo a quello del quale abbiamo parlato, e non quello di sapere i pesi che essi potrebbero portare senza muoversi di posto. Questa nuova maniera di considerare le forze, è dunque almeno tanto naturale e tanto importante quanto la prima. E

siccome è sensibile che elevare un peso di cento chilogrammi a mille metri di altezza, è la medesima cosa, con questo metodo di valutare le forze, che elevare duegento chilogrammi a cinquecento metri solamente: segue che le forze, sotto questo nuovo punto di vista, debbono considerarsi come in ragione diretta dei pesi da elevare e delle altezze alle quali bisogna portargli, o ad altri lavori paragonabili a questo. Ora, sopra questa considerazione si fonda l'usuale nozione delle forze vive.

Infatti sia M una massa, P il suo peso, g la gravità, dt l'elemento del tempo, e H l'altezza alla quale P è stato portato. Seguendo questa nuova maniera di considerare le forze, quella che ha dovuto impiegarsi per elevare P all'altezza H, sarà $P\times H$. Ma H essendo lo spazio percorso, può esprimersi per il prodotto di una velocità V e di un tempo T (*vedi Moto*). Da un'altra parte si ha $P=gM=\frac{gdt.M}{dt}$ (*vedi* Peso), e $g.dt$ esprime un'altra velocità V' (*vedi* Velocita') dunque $PH=MVV'\frac{T}{dt}$; dunque dt e T essendo due quantità omogenee, PH sarà il prodotto di una massa pel prodotto di due velocità o pel quadrato della velocità media proporzionale tra V e V'; dunque la forza PH si riassume in un prodotto di una massa pel quadrato di una velocità, come Mu^2, chiamando u la velocità media proporzionale tra V e V' (*vedi* Carnot *Principii fondamentali dell'equilibrio e del moto*).

Le forze si distinguono ancora in *uniformi* e *variabili* (*vedi* Moto e Accelerato, *vedi* ancora Centrale.).

Composizione della Forza. Quando un corpo materiale che si può ridurre a un punto è sottoposto all'azione simultanea di più forze che agiscono sopra esso in direzioni differenti e le quali non si fanno equilibrio, è certo che esso deve muoversi in una data direzione, e allora niente impedisce di attribuire il moto che esso prende ad una forza unica che agisca sopra esso in questa direzione. Questa forza è ciò che si chiama la *resultante* di quelle che hanno messo il corpo in moto, e queste si chiamano le *componenti* della prima; la proprietà caratteristica della resultante è di poter sostituire identicamente le componenti e per conseguenza di far loro equilibrio, quando si applica al punto materiale, in senso contrario della sua direzione, poichè allora questo punto si trova assolutamente nel medesimo stato che se esso fosse sollecitato da due forze eguali e direttamente opposte. Il problema della composizione delle forze sul quale riposa tutta la statica, consiste a determinare la grandezza e la direzione di un numero qualunque di forze date.

Se le forze date sono nel numero di due, caso al quale è facile di riportare tutti gli altri, rappresentando queste forze con due rette, basta una semplice costruzione geometrica per risolvere il problema. Sia, infatti, il punto P (*Tav.* CXXXVI, *fig.* 8) sollecitato nella direzione Pm da una forza rappresentata con Pa, e nella direzione Pn, con una forza rappresentata da Pb. Se si costruisce tra Pa e Pb il parallelogrammo $Pacb$, la diagonale Pc di questo parallelogrammo sarà la direzione delle risultante e rappresenterà la sua grandezza.

Per dimostrare quest' importante teorema si può considerare il punto P come se si muovesse da P in a sul piano $Pacb$ in virtù della sola forza Pa, nel mentre che questo piano esso stesso si muove nella direzione Pn, in modo tale che esso si trovi occupare la posizione $cbnd$ al momento in cui il punto P giunge in a; ora è evidente che per l'effetto di questo doppio moto, il punto a, e per conseguenza P, giunge in c, al momento in cui $Pacb$ si trova in $cbnd$, il punto materiale P è dunque giunto da P in c mediante il concorso di due moti,

vale a dire che esso ha descritto la diagonale Pc e che queste diagonale rappresenta la grandezza e in direzione la risultante delle forze Pa e Pb.

La dimostrazione diretta di questo teorema che porta il nome del *parallelogrammo delle forze* è stata tentata da diversi geometri; fra tutte le dimostrazioni dobbiamo citare la dimostrazione *sintetica* o geometrica del signor Duchayle che si trova nella maggior parte dell' opere elementari, e soprattutto l' elegante dimostrazione algebrica, o, come si dice, *analitica* del signor Poisson (*Vedi* i suoi *Elementi di Meccanica*).

Una volta stabilito il parallelogrammo delle forze, diviene facilissimo il trovare la risultante di un numero qualunque di forze, poichè dopo aver trovato la risultante di due tra esse, si compone questa risultante con una terza forza, il che dà una seconda risultante che si compone egualmente con una quarta forza, e così di seguito fino a tanto che si sia giunti alla risultante finale.

Il parallelogrammo delle forze serve ancora a *decomporre* una forza data in diverse altre per mezzo di costruzioni geometriche, le quali non presentano veruna difficoltà.

Forza Animale. Questa è quella che risulta dalle potenze muscolari dell' uomo e degli animali.

Il Désagulier, nella sua *Filosofia Sperimentale*, riporta diverse osservazioni curiose e utili sul paragone delle forze dell' uomo e di quelle dei cavalli, e sul miglior modo di applicarle. Siamo costretti di rimandare alla sua opera per le particolarità le quali escono interamente dal nostro piano. (*Vedi Desagulier's experimental philosophy.*).

Fatte conoscere le denominazioni particolari conservate dall' uso per indicare le diverse specie di forze, esporremo in questo punto più particolarmente quello che concerne la loro *misura*.

1. L' effetto di una forza qualunque, che produce un moto, essendo di animare una data massa di una certa velocità, le grandezze respettive di questa massa e di questa velocità entrano necessariamente come termini di paragone nella valutazione numerica dell' effetto o delle forze che esso rappresenta; ma vi sono due casi differenti da considerare: quello di una velocità costante e quello di una velocità variabile. Nel primo caso, la forza è una di quelle che si chiama *istantanee*, e le quali abbandonano il mobile a se stesso dopo avergli dato un solo impulso, in virtù del quale esso percorre spazi eguali in tempi eguali. Nel secondo caso, la forza appartiene alla classe di quelle dette *accelerotrici*, e le quali si attaccano per così dire al mobile, gli comunicano a ciascun istante un nuovo impulso che fa variare la velocità acquistata dagli impulsi antecedenti. Occupiamoci prima di tutto delle forze istantanee.

2. Indichiamo con f e f' due forze tali che essendo applicate successivamente ad un medesimo punto materiale, la prima gli comunichi una velocità uniforme v, e la seconda una velocità uniforme v'; è evidente che gli effetti di queste due forze non differiscono che per le velocità che esse producono, poichè tutte le altre circostanze sono le medesime. Così, potremo dire che la prima forza è doppia, tripla o quadrupla della seconda, se la velocità v è doppia, tripla o quadrupla della velocità v', ed avremo, in generale,

$$f : f' = v : v'.$$

Se il punto materiale che abbiamo supposto isolato e libero fosse legato in un modo invariabile ad altri punti che esso trasporta seco nel suo moto, la riunione di questi punti potrebbe rappresentare la massa di un corpo solido qualunque, e siccome allora tutti i punti del sistema si muoverebbero in una me-

desima direzione e con una medesima velocità, gli effetti delle due forze non differirebbero ancora che per le velocità; dimodochè possiamo stabilire come uno dei principii fondamentali della misura delle forze:

Le intensità di due forze stanno tra loro come le velocità che esse sono capaci di comunicare ad uno stesso mobile.

3. Per paragonare ora le forze che agiscono sopra mobili differenti, osserviamo che, quando una massa si muove liberamente per mezzo dell'azione di una forza istantanea, e che tutti i suoi punti materiali sono animati da una medesima velocità, l'effetto prodotto deve naturalmente misurarsi dal nomero dei punti materiali messi in moto, e dalla velocità che è stata loro comunicata. Supponiamo, per esempio, che un corpo composto di m molecole elementari o di m punti materiali riceva da una forza f una velocità di 5 metri per secondo, nel mentre che un altro corpo composto di $2m$ molecole riceve la medesima velocità da un'altra forza f'; l'effetto di quest'ultima sarà evidentemente il doppio di quello della prima, poichè la forza f' ha messo in moto due volte più di molecole della forza f e con la stessa velocità. In generale, l'effetto della forza f' sarà n volte maggiore dell'effetto della forza f, se il corpo che essa muove con una velocità di n metri per secondo si compone di nm molecole, e siccome questa relazione non cangia, qualunque sia la velocità, purchè essa sia la medesima nei due mobili m, nm, abbiamo per qualunque velocità comune V

$$f : f' = m : mn.$$

Ma i numeri m ed mn delle molecole elementari, o punti materiali dei due mobili, non sono altro che le masse di questi mobili; così, rappresentando generalmente le masse con M ed M', avremo ancora

$$f : f' = \mathrm{M} : \mathrm{M}',$$

vale a dire che *due forze che comunicano a due mobili una stessa velocità sono tra loro come le masse di questi mobili.*

Basta combinare questo principio col precedente per concludere che le intensità di due forze sono nel rapporto composto delle masse e delle velocità dei corpi che esse fanno muovere. Infatti, sia f'' una terza forza la quale, applicata alla massa M', gli comunica una velocità V', differente dalla velocità V, che comunica a questa medesima massa la forza f', avremo, dal primo principio,

$$f' : f'' = \mathrm{V} : \mathrm{V}'.$$

Moltiplicando questa proporzione e la proporzione precedente

$$f : f' = \mathrm{M} : \mathrm{M}',$$

termine per termine, e sottraendo il fattor comune f', verrà

$$f : f'' = \mathrm{MV} : \mathrm{M'V'};$$

il che significa che *le forze le quali muovono mobili differenti con velocità differenti, sono tra loro come i prodotti delle masse di questi mobili per le loro velocità respettive.*

4. Questa proposizione conduce direttamente alla valutazione delle forze istantanee, poichè se prendiamo per *unità di forza* quella che comunica l'*unità di*

velocità all'*unità di massa*, vale a dire se facciamo $f''=1$, $M'=1$, $V'=1$, avremo

$$f=MV.$$

L'intensità di una forza istantanea è dunque equivalente al prodotto della massa del corpo che essa muove per la sua velocità, o almeno può sempre rappresentarsi con questo prodotto.

Il prodotto della massa di un corpo per la sua velocità attuale si chiama in generale la *quantità di moto* di questo corpo. (*Vedi* QUESTA PAROLA).

5. Tutte le precedenti considerazioni possono applicarsi, con alcune modificazioni, al caso delle velocità variabili, come lo faremo vedere.

Si sa che una forza acceleratrice (*vedi* ACCELERATO) comunica a ciascun istante al mobile sul quale essa agisce una nuova velocità, che si aggiunge alla velocità digià prodotte, dimodochè l'espressione *velocità* del mobile non deve intendersi che della velocità effettiva, che esso possiede ad un istante determinato del suo moto. Quando la velocità varia per gradi eguali in intervalli di tempi eguali, la forza acceleratrice è *costante*, ovvero agisce nella medesima maniera a tutti gli istanti del moto; quando al contrario la velocità varia per gradi ineguali in intervalli di tempo eguali, la forza acceleratrice non agisce allora nella medesima maniera a tutti gl'istanti del moto; essa riceve allora l'epiteto di *variata*. Se, in luogo di aumentare continuamente, la velocità diminuisse per gradi eguali o ineguali, la forza sarebbe una *forza ritardatrice costante* o *variata*.

Le forze variate in modo qualunque essendo sempre paragonabili tra loro, e con una forza acceleratrice costante presa per *unità*, è essenziale di formarsi un'idea esatta della misura delle forze costanti. Ora, *l'effetto* prodotto da quest'ultime essendo quello d'imprimere una medesima velocità al mobile a ciascuno istante del moto, questa velocità rappresenta l'effetto delle forze, e, per conseguenza, la sua intensità, in virtù del principio della proporzionalità degli effetti alle cause. Ma se indichiamo con v la velocità effettiva del mobile dopo un intervallo di tempo t, passato dall'istante in cui la forza ha cominciato ad agire, questa velocità v conterrà tante volte la velocità costante che dà la misura della forza acceleratrice, quante l'intervallo di tempo t conterrà unità di tempo; $\frac{v}{t}$ sarà perciò l'espressione della velocità costante, e conseguentemente rappresenterà la forza acceleratrice.

Ordinariamente alla forza acceleratrice costante della gravità si paragonano tutte le altre forze variate; l'esperienza avendo fatto conoscere che alla latitudine di Parigi e al livello del mare la gravità imprime ai corpi, in ciascun secondo della loro libera caduta, una velocità di 9,808795 metri; abbiamo per questa forza

$$\frac{v}{t}=9^{m},808795,$$

ovvero $g=9^{m},808795$, perchè abbiamo convenuto di rappresentare la forza di gravità con la lettera g.

6. La teoria del moto uniformemente accelerato fa conoscere tutte le circostanze della caduta libera dei corpi; si sa che indicando con h lo spazio percorso, o l'altezza da cui un corpo è caduto in un intervallo di tempo indicato da t, e con v la velocità acquistata allo spirare di questo tempo t, si ha la relazione generale

$$v^2=2gh,$$

di cui l'uso è frequentissimo nelle questioni di meccanica. Faremo osservare in proposito di questa relazione, che nella dimostrazione che ne abbiamo data (*Vedi* Accelerato), abbiamo rappresentato con g lo spazio che i corpi pesanti descrivono nel primo secondo dalla loro libera caduta, ovvero $4^m,9043975$; il che dà $2g$ per l'espressione della forza di gravità. Si dovrà dunque sostituire da per tutto il fin qui trattato ed ancora in seguito, $2g$ con g, se vogliamo dare a questa lettera la significazione che generalmente è adottata.

7. L'azione delle forze acceleratrici costanti non può paragonarsi a quella delle forze istantanee, che risalendo agli elementi indefinitamente piccoli dello spazio e del tempo; poichè se s'immagina che un mobile, dopo aver ricevuto un primo impulso da una forza istantanea, riceva, dopo un tempo t, un secondo impulso nel medesimo senso di un'altra forza eguale alla prima, poi dopo un tempo $2t$, un terzo impulso, e così di seguito, in modo che la velocità comunicata all'origine essendo v essa divenga successivamente

$2v$ dopo il tempo t,
$3v$ . . . . $2t$,
$4v$ . . . . $3t$,
ec. . . . . ec.,

non si potranno evidentemente sostituire tutte le forze istantanee con una sola forza acceleratrice costante, che supponendo gl'intervalli di tempo eguali t infinitamente piccoli, come pure la velocità v impressa al principio di ciascuno intervallo. In questa ipotesi, la quale d'altra parte conduce a risultamenti rigorosi, se indichiamo con M la massa del mobile, e con dv la velocità infinitamente piccola che gli è comunicata al principio di ciascuno intervallo di tempo dt infinitamente piccolo, Mdv esprimerà la *quantità di moto* infinitamente piccola, impressa nel medesimo tempo al mobile e che esso conserverà in tutta la durata dell'intervallo dt, nel quale la velocità dv è considerata uniforme.

$\int Mdv$ ovvero Mv sarà dunque la quantità di moto che possederà il mobile dopo il tempo finito t, allo spirare dal quale la velocità effettiva e finita è v; dimodochè se la forza acceleratrice cessasse tutto ad un tratto di agire, alla fine del tempo t, la quantità di moto Mv, rimarrebbe costante, e il mobile si muoverebbe come se esso avesse ricevuto un solo impulso da una forza istantanea $= Mv$.

8. Quando si tratta della forza della gravità per la quale si ha l'equazione fondamentale $g = \frac{v}{t}$, ovvero $gt = v$, si ottiene, differenziando, $gdt = dv$, donde

$$Mgdt = Mdv;$$

il che dà $Mgdt$ per la quantità di moto che acquista un corpo a ciascuno elemento del tempo della sua libera caduta. Osservando che Mg rappresenta il peso della massa M (*Vedi* Peso), e indicando questo peso con P, si ha ancora Pdt per l'espressione di questa medesima quantità di moto.

9. Le forze acceleratrici variate in un modo qualunque si misurano ancora per mezzo delle loro velocità; ma bisogna osservare che per la velocità di queste forze s'intende il rapporto, che esiste tra l'accrescimento infinitamente piccolo della velocità, che ha luogo in un intervallo di tempo infinitamente piccolo, e quest'intervallo esso stesso. Ecco sopra che riposa questa valutazione. Nella

durata di un intervallo di tempo infinitamente piccolo, si può considerare una forza variata come una forza costante, che comunichi al mobile un medesimo accrescimento di velocità a ciascuno istante di questa durata, accrescimento costante di cui l'espressione è evidentemente $\frac{dv}{dt}$. Ora quest'accrescimento è l'effetto della forza, e, per conseguenza, la rappresenta; così, indicando con φ una forza acceleratrice variata, abbiamo generalmente

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

10. Forza di Pressione. La tendenza dei corpi materiali verso il centro della terra gli fa pesare sopra tutti gli ostacoli che si oppongono alla loro caduta; quest'effetto si chiama una *pressione*, e la forza della gravità che lo produce riceve allora il nome di *forza di pressione* o di *forza morta*. La forza di pressione si misura dal prodotto Mg della massa M del corpo e della gravità g, o per il *peso* del corpo (*Vedi* Peso).

11. Forza di Percussione. La forza in virtù della quale un corpo percorre uniformemente un dato spazio, e che abbiamo indicato sotto il nome di *quantità di moto*, prende il nome di *forza di percussione*, al momento in cui questo corpo ne urta un altro. La forza motrice di un corpo, la sua quantità di moto e la sua forza di percussione sono dunque tre denominazioni differenti di una medesima cosa, solamente l'espressione *quantità di moto* si riporta più particolarmente ai corpi che si muovono attualmente, e quello di forza di percussione ai corpi considerati nel momento del loro urto.

Nei corpi mossi da un moto accelerato, la quantità di moto aumentando continuamente, l'intensità dell'urto è tanto più grande quanto vi è luogo ad una più grande distanza dall'origine del moto; questo è quello che spiega gli effetti prodigiosi dei piccoli corpi che cadono da una altezza grandissima. Una pietra del peso di un'oncia francese, per esempio, cadendo da mille metri, produrrebbe un urto eguale a quello di una pietra del peso di due libbre francesi che cadessero da un metro, se la resistenza dell'aria non modificasse le condizioni della caduta. Senza questa resistenza, i disastri cagionati dalla grandine sarebbero maggiormente considerabili. (*Vedi* Percussione).

12 Forze moventi. S'indicano specialmente sotto il nome di *forze moventi* le forze applicate alle macchine, o destinate a vincere delle resistenze; da ciò il nome di *motori* dato agli agenti che si adoperano per produrle, tali come gli animali, l'acqua corrente, il vento, il vapore, le forze elastiche, ec. La misura delle forze moventi è un punto importantissimo della meccanica pratica.

L'effetto di una forza movente si compone generalmente di una pressione esercitata contro un punto, e in virtù della quale questo punto percorre un dato spazio, nel tempo che la *resistenza*, che si può considerare come un peso, applicato ad un altro punto, descrive un altro spazio. L'apparecchio che lega i due punti o trasmette l'azione della forza alla resistenza è ciò che si chiama una *macchina*.

13. Lo sforzo esercitato dalla resistenza, e che la forza movente deve soperare, può sempre paragonarsi a quello, che sarebbe necessario per elevare verticalmente un peso ad una data altezza; poichè dalle osservazioni del signor Navier, resulta che è sempre possibile di sopprimere la resisteoza e di attaccare nella sua direzione, al punto ove essa agisse, una corda che passasse sopra una puleggia di rinvio, all'estremità della quale si sospenderebbe un peso eguale allo sforzo o pressione che questa resistenza esercitasse. Niente sarebbe cangiato alle con-

dizioni del moto della macchina, la quale resterebbe esattamente la medesima, e di cui l' effetto sarebbe solamente trasformato nell' elevazione del peso. E nel tempo che questa macchina impiegherebbe ad eseguire un lavoro dato, un peso eguale allo sforzo della resistenza si troverà elevato verticalmente ad un'altezza eguale allo spazio percorso in questo medesimo tempo e nel senso della resistenza col suo punto di applicazione, l' elevazione di questo peso rappresenterà dunque il lavoro della macchina, e una macchina si considererà fare tanto maggior lavoro quanto essa potrà così elevare un peso più grande ad un' altezza più grande. (Navier, *Note sopra Belidor*).

Ma l' effetto del motore sopra la macchina può egualmente considerarsi come l' elevazione di un peso ad una data altezza; poichè si può, egualmente, sostituire al motore un peso eguale alla sua pressione, attaccato all' estremità di una corda che passa sopra una puleggia di rinvio, e di cui l' altra estremità sarebbe attaccata al punto di applicazione del motore; la discesa del peso sostituirà esattamente l' azione del motore; e siccome un peso che discende è capace di far salire un peso eguale all' altezza da cui esso è disceso, l' effetto del motore, in un tempo dato, sarà rappresentato da un peso, eguale alla pressione, elevato ad un' altezza eguale allo spazio percorso, nel senso di questa pressione, per il suo punto di applicazione.

Gli effetti del motore e della resistenza si trovano mediante ciò rappresentati nella medesima maniera, ciò che dà il mezzo di paragonargli e di determinare le condizioni dell' equilibrio di una macchina qualunque.

14. Tutto si riduce dunque a valutare numericamente l' intensità della forza capace di elevare un dato peso ad una data altezza in un tempo dato. Ora, se indichiamo con f e f' le forze capaci di elevare i pesi P e P' in un medesimo tempo T ad una medesima altezza H, avremo, partendo sempre dal principio che l' intensità di una forza è proporzionale al suo effetto,

$$f : f' = P : P' \ldots\ldots (1).$$

Per la medesima ragione, se f'' indica una terza forza capace di elevare il peso P' all' altezza H' nel tempo T, avremo ancora

$$f' : f'' = H : H' \ldots\ldots (2);$$

come ancora avremo

$$f'' : f''' = T : T' \ldots\ldots (3),$$

se f''' è una quarta forza capace di elevare il peso P' all' altezza H' in un tempo T'.

Moltiplicando queste tre proporzioni termine a termine, e sottraendo i fattori comuni del primo rapporto, verrà

$$f : f''' = PHT : P'H'T';$$

vale a dire che due forze moventi sono tra loro come i prodotti dei pesi che esse elevano per le altezze e per i tempi. Premesso ciò, se prendiamo per unità di queste forze quella che eleva l' *unità di peso* all' *unità di altezza nell' unità di tempo*, avremo, ponendo $f''' = 1$, $P' = 1$, $H' = 1$, $T' = 1$,

$$f = PHT.$$

Il prodotto PHT rappresenterà dunque l' azione della forza nell' intervallo di

tempo T, e, per conseguenza, PH la sua azione nell'unità di tempo. Ne resulta quindi la seguente proposizione.

L'intensità di una forza movente è equivalente al prodotto del peso che essa può elevare per l'altezza, alla quale essa l'eleva nell'unità di tempo.

15. Il prodotto PH ha ricevuto diverse denominazioni. Lo Smeaton gli aveva dato il nome di *potenza meccanica*; il Carnot, quello di *momento di attività*; il Monge, quello di *effetto dinamico*; ma più generalmente si chiama, dal Coulomb, *quantità di azione*. ec. Adottando per unità di peso e di altezza il *Chilogrammo* e il *metro*, P rappresenta un numero di Chilogrammi, e H un numero di metri, e si dà ancora spesso a queste lettere le caratteristiche c ed m, e al loro prodotto la caratteristica cm (*Vedi* Dinamica e Effetto.) Vedremo altrove come si applica questa valutazione delle forze al calcolo dell'effetto delle macchine. (*Vedi* Macchina.).

16. Le forze moventi possono ancora essere rappresentate per il *prodotto di una massa e del quadrato di una velocità*, prodotto che abbiamo convenuto di chiamare una *forza viva*, astrazione fatta da qualunque nozione metafisica. Ecco il fatto; se una forza movente, in luogo di esercitare una pressione P contro un punto resistente, che percorre uno spazio H in virtù di questa pressione, avesse agito sopra una massa m, cedendo liberamente alla sua azione, la massa m dopo aver percorso lo spazio H, avrebbe acquistato una velocità v, e per conseguenza una certa forza viva mv^2; ciò è dunque assolutamente la medesima cosa, per la forza, di consumare una quantità di azione PH sopra una macchina, ovvero d'imprimere una forza viva mv^2 ad una massa libera m; ed è evidente che si può indifferentemente rappresentare l'intensità della sua azione per l'una o per l'altra delle quantità PH, mv^2. Ora, per passare da una di queste quantità all'altra rappresentiamo con M la massa del peso P, avremo, g indicando sempre la forza della gravità, $P=Mg$, e per conseguenza

$$PH=MgH.$$

Ma, V essendo la velocità che acquisterebbe la massa M cadendo liberamente dall'altezza H, abbiamo, per la relazione conosciuta (n.° 6);

$$\frac{1}{2}V^2=gH;$$

così

$$PH=\frac{1}{2}MV^2.$$

Il prodotto MV^2 è dunque numericamente eguale al doppio del prodotto PH, ed è provato che una *quantità di azione* può sempre trasformarsi in una *forza viva*; vale a dire in un prodotto di una massa per il quadrato di una velocità.

La considerazione delle forze vive essendo di un'alta importanza in tutte le questioni relative alle macchine e ai motori, presenteremo gli elementi della loro teoria.

17. Forza Viva. Senza ritornare in questo punto sopra la denominazione di *forza viva*, data al prodotto di una massa per il quadrato di una velocità, della quale abbiamo parlato al principio di questo articolo, rammenteremo una volta per tutte, che la forza viva di un corpo in moto ad un istante qualunque, è rappresentata per il prodotto della sua massa, e pel quadrato della sua velocita effettiva a questo istante. Rammenteremo egualmente che nell'urto di due corpi perfettamente elastici,

La somma delle forze vive è lo medesima avanti e dopo l'urto (*Vedi* URTO), ma che nell'urto di due corpi non perfettamente elastici, la perdita delle forze vive è tanto maggiore, quanto l'elasticità di questi corpi è più imperfetta. Abbiamo dimostrato questa legge del Carnot per i corpi perfettamente duri.

La differenza delle forze vive, avanti e dopo l'urto, è eguale alla somma delle forze vive che avrebbero i mobili, se, dopo l'urto, le mosse si movessero con le velocità perdute o guadagnate. (*Vedi* COMUNICAZIONE DEL MOTO).

Premesso ciò, per far comprendere quello che in meccanica si chiama, *principio delle forze vive*, ci rimane da dimostrare alcune proposizioni preliminari.

18. L'azione di un motore o di una forza movente consiste unicamente in uno sforzo o *pressione*, esercitata esternamente contro la superficie del corpo al quale la forza è applicata. Questa pressione può sempre essere sostituita per mezzo di un peso, e così se ne ottiene la sua misura, e ne risulta che lo sforzo di un motore è sempre paragonabile all'azione della forza della gravità, e può esprimersi nella medesima maniera. Ora, se una forza movente, invece di esercitare una pressione p sopra un ostacolo immobile, dividesse la sua azione sopra tutte le molecole materiali di una massa libera m, essa gl'imprimerebbe un moto uniformemente accelerato, dimodochè indicando con γ la velocità acquistata dalla massa m in ciascuna unità di tempo, γ rappresenterebbe la forza che agisce sopra ciascuna molecola in particolare, e $m\gamma$ la risultante di tutte le forze parziali o la forza totale che produce la pressione p; le due quantità p ed $m\gamma$ hanno dunque tra loro la medesima relazione di quella, che esiste tra il peso di un corpo e il prodotto della sua massa, per la forza di gravità (*Vedi* PESO); cioè, si ha $p=m\gamma$. Così, tutte le volte che si saprà che una forza che agisce sopra una massa m, la quale cede liberamente alla sua azione, comunica a questa massa una velocità γ in ciascuna unità di tempo, se ne potrà concludere che, se questa forza fosse applicata contro un ostacolo immobile, essa eserciterebbe una pressione $p=m\gamma$.

19. Supponiamo ora che un punto materiale sia sottoposto all'azione di più forze acceleratrici, che agiscono in direzioni differenti, e che gli fanno descrivere una data curva nello spazio. Riportando questa curva a tre assi rettangolari, potremo decomporre ciascuna forza in tre altre respettivamente paralelle agli assi, e, siccome le componenti paralelle ad un medesimo asse si aggiungono tra loro, non avremo perciò da considerare che tre forze. Si chiami γ la somma delle velocità, che le componenti paralelle all'asse delle x possono imprimere nell'unità di tempo, γ' la medesima somma per le componenti paralelle all'asse delle y, e γ'' la medesima somma per le componenti paralelle all'asse delle z. Queste tre quantità rappresenteranno le tre forze variate alle quali si riducono tutte le forze del sistema. Le coordinate x, y, z rappresentano gli spazj che il mobile percorre nel senso dei tre assi, avremo quindi per la legge del moto variato (*Vedi* ACCELERATO)

$$\gamma=\frac{d^2x}{dt^2},\quad \gamma'=\frac{d^2y}{dt^2},\quad \gamma''=\frac{d^2z}{dt^2}\,\ldots\ldots(1).$$

Le velocità del mobile, nel senso dei tre assi, saranno respettivamente $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; e se rappresentiamo con v la loro risultante, o la velocità del mobile

sul punto della curva le cui coordinate sono x, y, z, avremo la relazione conosciuta (*Vedi* RISULTANTE)

$$v=\sqrt{\left[\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right]} \ldots\ldots (2).$$

Moltiplichiamo respettivamente le tre equazioni (1) per le quantità dx, dy, dz, e formiamo la loro somma, verrà

$$\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=\gamma\, dx+\gamma' dy+\gamma'' dz;$$

il che ci darà, integrando,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}=\int(\gamma\, dx+\gamma' dy+\gamma'' dz)+\text{cost}.$$

ovvero, per l'espressione (2),

$$v^2=2\int(\gamma\, dx+\gamma' dy+\gamma'' dz)+\text{cost}.$$

Per determinare la costante, osserviamo che la quantità senza il segno $\int$ era nulla quando le forze γ, γ', γ'' hanno cominciato ad agire; dimodochè indicando con v' la velocità che aveva il corpo in quell'istante, e moltiplicando i due membri per la massa m del punto materiale; avremo definitivamente

$$mv^2-mv'^2=2\int(m\gamma\, dx+m\gamma' dy+m\gamma'' dz) \ldots\ldots (3),$$

equazione il cui primo membro rappresenta l'accrescimento della forza viva, che il mobile ha provato dall'istante in cui le forze hanno cominciato ad agire sopra esso, e di cui il secondo rappresenta il doppio della somma delle quantità di azione impresse da queste forme al mobile nel medesimo tempo. Infatti, le quantità $m\gamma$, $m\gamma'$, $m\gamma''$ esprimono le pressioni che le forze le quali agiscono sopra il corpo, nel senso di ciascun asse, esercitano sopra esso (n.° 18), e per conseguenza le quantità $m\gamma\, dx$, $m\gamma' dy$, $m\gamma'' dz$ sono i prodotti delle pressioni per l'elemento dello spazio che il corpo percorre, seguendo le loro respettive direzioni; il secondo membro dell'equazione (3) è dunque il doppio della somma dei prodotti simili, presa dall'istante in cui le forze hanno cominciato ad agire; ma il prodotto della pressione esercitata contro un corpo per lo spazio che questo corpo ha percorso nella direzione di questa pressione è la *quantità di azione* (n.° 12) sviluppata dalla forza; dunque,

1.° *La forza viva acquistata in un dato tempo da un corpo, che si muove per l'azione di più forze qualunque, è sempre numericamente eguale al doppio delle quantità di azione, che queste forze gli hanno impresse nel medesimo tempo, prendendo negativamente le quantità di azione, quando gli spazj percorsi sono in senso contrario dell'azione delle forze.*

2.° *La forza viva acquistata dal corpo ad un dato istante, e, per conseguenza, il valore della sua velocità, dipende unicamente dalla grandezza delle forze che hanno agito sopra esso, e dello spazio che ha percorso seguendo la direzione di ciascuna di queste forze, e non per niente dalla figura della curva che esso ha descritto, nella maniera con cui la sua velocità ha variato, nè dalla durata del suo moto.*

Quest'importante proposizione è conosciuta sotto il nome di *principio della*

conservazione delle forze vive. Si estende facilmente al caso generale di un sistema di punti materiali legati tra loro, sia in un modo invariabile per formare un solo corpo solido, sia sottoposto solamente con fili e componente un sistema capace di cangiare di figura; il suo enunciato diviene allora:

La somma delle forze vive acquistate dai differenti punti del sistema in un dato tempo è sempre numericamente eguale al doppio della somma delle quantità di azione, che le forze le quali agiscono sopra questi punti hanno impresso nel medesimo tempo.

20. Risulta immediatamente da questo principio che la forza viva del sistema è indipendente dalla condizioni del legame e dalla natura delle linee descritte dai corpi, e può calcolarsi unicamente dagli spazj che i corpi hanno percorso nel senso di ciascuna forza. Si vede ancora che se, ad un istante qualunque, il sistema fosse abbandonato a se stesso, e che nessuna forze non venisse ad agire sopra esso, la somma delle forze vive che avrebbero luogo a quest' istante si conserverebbe senza alterazione, qualunque fossero i movimenti che i corpi prenderebbero inseguito gli uni rapporto agli altri, e le variazioni che potessero provare le loro velocità. Tuttavia, dobbiamo fare osservare che la condizione fondamentale del principio è che non vi sia verun cangiamento brusco di velocità, vale a dire, che le curve descritte per i punti siano continui, e che le velocità di questi punti non varino in ciascuno elemento di tempo che di una quantità infinitamente piccola. Qualunque cangiamento brusco porta una perdita di forza viva che fa l' oggetto del principio rammentato di sopra (n.° 17).

21. Nell' applicazione della teoria delle forze vive alle macchine, si considera ciascun motore come contenente una quantità determinata di forza viva che esso può trasmettere, con l' aiuto di una macchina, ad una resistenza qualunque; il calcolo della macchina si riduce ancora alla determinazione del rapporto tra la forza viva impiegata a la forza viva comunicata. Per le macchine messe in moto da fluidi, questo rapporto dipende dal principio seguente, che ci contenteremo di stabilire:

La forza viva comunicata alla resistenza è eguale a quella che possedeva il motore, diminuita, e delle forze vive perdute nei cangiamenti bruschi di velocità, e di quelle che il motore conserva dopo avere esercitato la sua azione.

22. Forza d' inerzia. L' inerzia della materia (*Vedi* Materia) è la proprietà che ha ciascun corpo di perseverare nel suo stato di riposo o di moto. La *forza d' inerzia* è la resistenza che un corpo oppone al suo cangiamento di stato, o la reazione che esso esercita sopra il sistema degli altri corpi che modificano questo stato.

Si misura la forza di inerzia di un mobile per la *quantità di moto* che esso imprime a qualunque altro corpo, l' urto del quale lo fa passare dal riposo al moto o dal moto al riposo, o finalmente da un moto ad un altro moto: questa *quantità di moto* essendo, per la legge di *antagonismo* (*Vedi* Natura), una forza eguale ed opposta a quella che cambia lo stato primitivo del mobile. Se si decompone dunque la velocità effattiva del mobile, avanti l' urto, in due altre, di cui l' una è quella che esso deve prendere dopo l' urto, l' altra, moltiplicata per la massa di questo mobile, darà l' espressione della sua *forza d' inerzia* al momento dell' urto. (*Vedi* Carnot, *Princ. dell' Equil. e del moto*).

FORZA ELASTICA DEI GAS. (*Fisic. Mat.*) Si chiama forza elastica di un gas l' azione che esso esercita contro tutto ciò, che si oppone all' espansione delle sue molecole.

Consideriamo un vaso cilindrico chiuso, ripieno di un gas, e situato nel voto. La forza di espansione dei gas siccome agisce egualmente in tutti i sensi, le pa-

reti del vaso sopporteranno in tutti i loro punti delle pressioni eguali e dirette dal di dentro al di fuori; se supponiamo che una delle pareti, una delle basi del cilindro, per esempio, sia mobile, come lo stantuffo di un corpo di tromba, questo stantuffo sarà evidentemente proiettato al di fuori, e il gas si spanderà uniformemente in tutto lo spazio vuoto, a meno che non si eserciti sullo stantuffo una pressione esterna eguale alla pressione interna dovuta alla forza espansiva del gas; questa pressione esterna, eguale ed opposta alla pressione interna, dà per conseguenza la misura della forza elastica del gas. Se, invece di esser situato nel vuoto, il vaso fosse situato nell' aria atmosferica, la pressione esterna da esercitare sopra lo stantuffo per fare equilibrio all' elasticità del gas non sarebbe che la differenza tra la pressione interna e la pressione dell' atmosfera sullo stantuffo. In tutti i casi, si vede che la forza elastica può misurarsi per mezzo di un peso.

Immaginiamo ora che la parete mobile sia un vero stantuffo, capace di salire e di discendere nel cilindro senza dare alcun passaggio al gas racchiuso, e che si esercitino sopra questo stantuffo delle pressioni esterne continuamente più forti. Il gas occuperà successivamente, per l' effetto di queste pressioni, degli spazi continuamente più piccoli; ma qualunque sia la grandezza di ciascuna pressione, fintantochè essa rimarrà costante, il gas occuperà un medesimo spazio, e per conseguenza, svilupperà una forza elastica eguale alla pressione. Siccome veruna pressione esterna, supponendola ancora infinitamente grande, non sarebbe capace a far discendere lo stantuffo fino al fondo del cilindro, poichè per ottenere ciò bisognerebbe che il gas fosse annientato, ne risulta che i gas hanno una forza elastica indefinitamente crescente, per la quale essi possono resistere alle pressioni che si esercitano sopra di essi, riducendosi a volumi continuamente più piccoli.

I fisici impiegano, per misurare la forza elastica dei gas, un istrumento chiato *manometro*; questo è una specie di barometro il cui ramo aperto comunica col vaso chiuso che contiene il gas; l' altezza della colonna di mercurio, nel ramo chiuso e vuoto d'aria, indica la pressione del gas, come quest' altezza indica la pressione atmosferica in un barometro ordinario. Per riportare la misura ad un peso, basta calcolare il peso della colonna di mercurio, che ha per altezza la differenza dei livelli del mercurio nei due rami dell' istrumento. Se, per esempio, la sezione del tubo manometrico è di un centimetro quadrato, e che la differenza dei livelli sia di 80 centimetri, la pressione esercitata dal gas sopra un centimetro quadrato di superficie sarà equivalente ad un peso di $1^c,08687$, perchè un cilindro di mercurio la cui base è un centimetro quadrato e l' altezza 80 centimetri pesa 1,08687 chilogrammi.

È più semplice riportare le pressioni all' *unità* di superficie o al metro quadrato. Nel caso precedente, la pressione essendo di $1^c,08687$ per centimetro quadrato sarà di $10868^c,7$ per metro quadrato, e questo sarà il medesimo come dire che la pressione del gas è di $10868^c,7$ per unità di superficie, o che essa corrisponde ad una colonna di mercurio di $0^m,80$.

La valutazione delle pressioni in colonne di mercurio dà il mezzo di paragonarle alla pressione atmosferica, la quale ordinariamente serve di *unità* per misurare le grandi pressioni, e il di cui valore medio è rappresentato da una colonna di mercurio di $0^m,76$ di altezza. Così, quando la forza elastica di un gas fa equilibrio ad una colonna di mercurio di $0^m,76$, si dice che essa è equivalente ad *un' atmosfera*; essa sarebbe equivalente a *due atmosfere* se la colonna di mercurio fosse $1^m,52$, e così di seguito. Per rendere tutte queste misure esattamente corrispondenti, è essenziale di riportare le lunghezze delle colonne di mercurio a ciò che esse sarebbero, se esse avessero tutte la temperatura del ghiac-

cio che si fonde, che è quella in cui la pressione media dell'atmosfera, alla superficie del mare, è di $0^m,76$; come è importante, ancora, d'impiegare, per le conversioni in pesi, il peso del mercurio a *zero* gradi di temperatura. Facendo conto di tutte queste circostanze, se indichiamo con h l'altezza della colonna di mercurio che misura la forza elastica di un gas, potremo rappresentare questa forza per le tre quantità

$$h,\ 13598h,\ \frac{h}{0^m,76}.$$

La prima è semplicemente la colonna di mercurio; la seconda è la pressione in chilogrammi sopra l'unità di superficie, perchè il peso del metro cubo di mercurio è di 13598 chilogrammi, e la terza è un numero di atmosfere. Sia per esempio, $h=1^m,14$, si potrà dire indifferentemente che la pressione del gas è $1^m,14$ o che essa è di $13598\times1,14=15501^c,72$ per unità di superficie, o finalmente che essa è di $1\frac{1}{2}$ atmosfere.

La forza elastica del gas varia con la loro temperatura. Le osservazioni hanno fatto conoscere che un medesimo peso di gas, sottoposto ad una pressione costante si dilata a misura che la sua temperatura si eleva, e che questa dilatazione, la medesima per tutti i gas, è di $\frac{1}{267}$ o di 0,00375 del loro volume a $0°$ per ciascun grado centigrado di accrescimento di temperatura.

Si sa inoltre che la legge del Mariotte (*Vedi* ACCELERATO) si applica a tutti i gas semplici, vale a dire che *quando la temperatura di un medesimo peso di gas rimane costante, i volumi che esso prende, per l'effetto delle diverse pressioni, sono in ragione inversa di queste pressioni*, e che *le densità sono in ragione diretta delle pressioni o delle forze elastiche corrispondenti*.

Queste due leggi che sussistono insieme, almeno nei limiti delle esperienze fatte fino a questo giorno, ci danno i mezzi di determinare le relazioni numeriche che esistono tra il volume, la temperatura e la forza elastica di una medesima quantità nel peso di un gas qualunque.

Si chiama A il volume di un gas alla temperatura di $0°$ e sotto la pressione h; A' ciò che diviene questo volume alla temperatura di ρ gradi e sotto la medesima pressione h; e B il volume del gas alla temperatura di ρ gradi e sotto la pressione H. Abbiamo dalla legge della dilatazione dei gas,

$$A'=A\,(1+0,00375\rho)\ \ldots\ (1);$$

e, dalla legge del Mariotte,

$$B : A' = h : H;$$

donde

$$B=\frac{h}{H}A'\ \ldots\ldots\ (2).$$

Sostituendo in quest'ultima espressione il valore di A' dato dalla prima, otterremo la relazione generale tra le cinque quantità A, B, h, H, ρ,

$$B=\frac{h}{H}\,(1+0,00375\rho)\,A\ \ldots\ (3),$$

per mezzo della quale si potrà calcolare una qualunque di queste quantità, quando le altre saranno data,

Quando si conosce la forza elastica di un peso di gas alla temperatura o°, è facile di trovare quella che esso acquista ad una temperatura qualunque, il suo volume restando il medesimo. Infatti prendendo il valore di H dall' equazione (3) e facendo A = B, viene

$$H = h(1 + 0{,}00375p).$$

Sia, per esempio, $p = 100°$, si ha

$$H = h(1{,}375);$$

vale a dire che la forza elastica di un gas qualunque cresce nel rapporto di 1 a 1,375 quando la sua temperatura si eleva da 0° a 100° senza che esso cangi di volume.

Le precedenti espressioni ci conducono ancora alla determinazione del peso dell' unità di volume di un gas, nelle diverse circostanze che fanno variare la sua densità. Indichiamo con P il peso di quest' unità di volume, quando il volume è A, vale a dire, quando la quantità di gas è sottoposta alla pressione h, e che la sua temperatura è o°, e con Q il peso dell' unità di volume della medesima quantità di gas alla temperatura p gradi e sotto le pressione H, o quando il suo volume è B. Nel primo caso, il peso totale del gas sarà espresso da AP, e nel secondo da BQ; ma il peso totale è supposto invariabile, così

$$AP = BQ,$$

ovvero

$$Q = \frac{A}{B}P,$$

prendendo il valore del rapporto $\frac{A}{B}$ dalla relazione (3), e sostituendolo in quest' ultima eguaglianza, avremo

$$Q = \frac{P}{1 + 0{,}00375p} \cdot \frac{H}{h}.$$

Per far conoscere l' applicazione di questa formula, proponiamoci di determinare il peso di un metro cubo di gas idrogene alla temperatura di 100° centigradi, e sotto la pressione di $0^m{,}80$. Sapendo che il peso del metro cubo d'idrogene, alla temperatura di o° e sotto la pressione media, è di $89^g{,}4$, faremo $P = 89^g{,}4$; $h = 0^m{,}76$; e siccome dalla questione, abbiamo $H = 0^m{,}80$, e $p = 100$, la formula ci darà

$$Q = \frac{89^g{,}4}{1{,}375} \cdot \frac{0{,}80}{0{,}76} = 68^g{,}44;$$

il peso domandato è perciò presso a poco di 68 grammi e mezzo.

Ecco la tavola dei pesi di un litro dei principali gas, dedotti dall' esperienze le più esatte,

TAVOLA DEI PESI DI UN LITRO DI GAS A 0°, E SOTTO LA PRESSIONE DI 0^m,76

Nome dei gas	*Peso in grammi*
Aria atmosferica	1,2991
Gas idriodico	5,7719
— fluo-silicico	4,6423
— cloro-carbonico	4,4156
Cloro	3,2088
Gas euclorino	3,0081
— fluo-borico	3,0800
— solforoso	2,8489
Cianogeno	2,3467
Protossido di azoto	1,9752
Acido carbonico	1,9805
Gas cloridrico	1,6205
— solfridrico	1,5475
Ossigene	1,4325
Deutossido di azoto	1,3495
Gas-dell' olio	1,2752
Azoto	2,2675
Gas ossido di carbonio	1,2451
Gas ammoniaco	0,7752
— idrogene carbonato	0,7270
Idrogene	0,0894

La forza elastica dei vapori non è, come quella dei gas permanenti, capace di un accrescimento indefinito; poichè, quando si comprime un vapore, giunge sempre un punto in cui il vapore si condensa e ritorna allo stato liquido, la sua forza di espansione non essendo più sufficiente per far equilibrio alla pressione; ma fuori di questo punto di condensazione, i vapori isolati si comportano esattamente come i gas, e si possono applicare loro le leggi precedenti. È probabile che, se si potesse produrre delle pressioni sufficienti, tutti i gas si liquefarebbero; questo è almeno quello che è stato fatto per diversi gas considerati per lo passato come permanenti, e dobbiamo concluderne che la legge del Mariotte, e quella della dilatazione dei gas non si estendono generalmente a qualunque temperatura e a qualunque pressione.

La forza elastica dei vapori si chiama più particolarmente *tensione*, e s' indica sotto il nome di *tensione massima* quella che fa equilibrio alla pressione, nel momento in cui il vapore è costretto di ripassare allo stato liquido. Il Dalton, al quale dobbiamo quasi tutto ciò che è conosciuto sopra la teoria dei vapori, ha riconosciuto:

1.° Che un liquido evaporabile, messo in contatto con uno spazio vuoto, emette istantaneamente tutto il vapore che esso può formare;

2.° Che la quantità di vapore prodotta è proporzionale all' estensione dello spazio vuoto;

3.° Che la sua forza elastica è indipendente da quest' estensione, vale a dire,

che essa ha un valore determinato per ciascuna temperatura, la quale non varia punto quando ancora l'estensione dello spazio vuoto varia;

4.° Che aumentando lo spazio nel quale il vapore si forma, se ne emette una maggior quantità, se vi è eccesso di liquido;

5.° Finalmente, che se tutto il liquido è evaporato, il vapore si dilata come un gas.

In quest' ultimo caso, se lo spazio diminuisce o se la temperatura abbassa, una porzione del vapore ripassa allo stato liquido, dimodochè la parte che rimane allo stato gassoso non ha che la tensione e la densità che debbono corrispondere alla temperatura, mediante ciò che abbiamo detto 3.°

Il Dalton ha riconosciuto, inoltre, che quando si trova una quantità sufficiente di liquido, ciascuno accrescimento di temperatura produce un'emissione di nuovi vapori, e che la forza elastica di questi vapori cresce molto più rapidamente che quella dei gas nelle medesime circostanze. Per esempio, la forza elastica del vapore di acqua sopra un eccesso di liquido cresce nel rapporto di 1 a 150, quando la temperatura passa da 0° a 100; nel mentre che quella dei gas permanenti e dei vapori isolati non aumenta che nel rapporto di 1 a 1,375. Ed è quest' accrescimento prodigioso di forza elastica, che rende il vapore dell' acqua il più prezioso e il più potente dei nostri agenti meccanici.

Vi sono dunque due casi da considerare per valutare la forza elastica dei vapori: quello in cui essi sono prodotti sopra un eccesso di liquido evaporabile, e quello in cui essi sono isolati e sottoposti a pressioni inferiori alla loro massima tensione. In quest' ultimo caso, i vapori si comportano come i gas permanenti, dimodochè tutto ciò che abbiamo detto di questi è loro applicabile. Nel primo, i vapori non possono nè aumentare, nè diminuire di tensione per la diminuzione o l'aumentazione dello spazio che essi occupano; ma questa tensione varia molto più rapidamente di quella del gas per i cangiamenti di temperatura. Quanto alle leggi della variazione delle tensioni, esse sono ancora incognite.

L' impiego del vapore di acqua come motore doveva impegnare i fisici ad occuparsi dalla determinazione della sua forza elastica ad alte temperature; tuttavia, fino al 1830, epoca nella quale furono pubblicate l'esperienze fatte dai signori Arago e Dulong, mediante la domanda fattane dal governo francese, non si conoscevano che tensioni inferiori a otto atmosfere, e ancora i risultamenti ottenuti da differenti osservatori eran ben lontani dall' accordarsi tra loro. I signori Arago e Dulong, con l'aiuto di apparecchi ingegnosissimi, e impiegando un modo di esperimentare il quale non permette di supporre il minimo errore, hanno constatato direttamente le tensioni del vapore di acqua, dalla sua produzione a 100° fino alla temperatura di 224°,2 ove essa è equivalente a 24 atmosfere. I loro risultamenti sono consegnati nella seguente tavola.

Tavola delle forze elastiche del vapore di acqua e delle temperature corrispondenti da 1 a 24 atmosfere.

Temperature contate sopra il termometro a mercurio	Tensione del vapore prendendo la pressione dell'atmosfera per unità	Pressione sopra un centimetro quadrato in chilogrammi
100°	1	1^{c},033
112,2	1 ½	1 ,549
121,4	2	2 ,066
128,8	2 ½	2 ,582
135,1	3	3 ,099
140,6	3 ½	4 ,615
145,4	4	4 ,132
149,06	4 ½	4 ,648
153,08	5	5 ,165
153,8	5 ½	5 ,681
160,2	6	6 ,198
163,48	6 ½	6 ,714
166,5	7	7 ,231
169,37	7 ½	7 ,747
172,1	8	8 ,264
177,1	9	9 ,297
181,6	10	10 ,330
186,03	11	11 ,363
190,0	12	12 ,396
193,7	13	13 ,429
197,19	14	14 ,462
200,48	15	15 ,495
203,60	16	16 ,528
206,57	17	17,,561
209,4	18	18 ,594
212,1	19	19 ,627
214,7	20	20 ,660
217,2	21	21 ,693
219,6	22	22 ,726
221,9	23	23 ,759
224,2	24	24 ,792

La temperatura e la forza elastica sono legate, nei limiti di questa tavola, dalla formula

$$f = (1 + 0{,}7153t)^{5},$$

nella quale f indica la tensione espressa in atmosfere, e t la temperatura a partire da 100°, e prendendo per unità l' intervallo di 100°. Per esempio, per cono-

scere la forza elastica corrispondente a 180°, bisognerebbe fare $t=0,80$. Questa formula si adatta tanto bene all' esperienze che, quantunque la sua deduzione sia interamente empirica, si creda potere estendare la sua applicazione fino a 50 atmosfere, almeno, senza temere degli errori troppo considarabili. Se si volesse conoscere, col suo mezzo, a qual temperatura il vapore ha una tensione di 50 atmosfare, gli si darebbe la forma

$$t=\frac{\sqrt[5]{f}-1}{0,7153};$$

e, facendo $f=50$, si trovarebbe

$$t=\frac{\sqrt[5]{50}-1}{0,7153}=2,6589,$$

vale a dire che la temperatura cercata è di 265°,89.

Esaminiamo ora come si può impiegare i gas e i vapori come qualità agenti meccanici.

Una quantità data di gas racchiuso in un vaso è un' elasticità compressa. Lasciandolo dilatarsi e passare dal suo volume attuale ad un altro volume B, questa dilazione potrà produrre una data *quantità di azione* evidentemente eguale a quella che bisognerebbe impiegare per comprimere il gas del volume B al volume A. Supponiamo che nelle sue variazioni di volume il gas conservi sempre la medesima temperatura, e consideriamo un volume di gas contenuto in un cilindro la cui base abbia l' unità per superficie, e che sia chiusa da uno stantuffo contro il quale si esercita sempre una pressione, capace di fare equilibrio alla forza elastica del gas.

Si chiaminq A e B i volumi del gas a due epoche date; x un valore intermediario qualunque tra A e B; H l' altezza della colonna di mercurio che fa equilibrio alla forza elastica del gas, quando il suo volume è A, μ il peso dell' unità di volume del mercurio.

Le pressioni essendo in ragione inversa dei volumi, allorchè la temperatura è costante, avremo, per la pressione esercitata contro lo stantuffo mobile, quando il volume del gas è x,

$$\mu H.\frac{A}{x}.$$

La quantità di azione per diminuire questo volume di dx sarà perciò

$$-\mu H.\frac{A}{x}dx.$$

Prendendo l' integrale di questa quantità, tra i limiti $x=A$ e $x=B$, otterremo, per la quantità di aziona capace di far passare il volume dalla grandezza B alla grandezza A, l' espressione

$$\mu HA\log\frac{B}{A},$$

che rappresenta nel medesimo tempo la quantità di aziona che il gas può sviluppare, dilatandosi liberamente dal volume A al volume B.

Se lo stantuffo sopportasse sopra la sua faccia esterna una pressione costante

misurata dal peso di ooa colnnna di mercurio di un' altezza h', si avrebbe per la pressiona al di sopra che bisognerabbe esercitare cootro questo stautuffo, quando il volume del gas fosse x,

$$\mu H . \frac{A}{x} - \mu h;$$

la quantità di aziooa necessaria per diminuire il volume di dx, diveoterebbe

$$\mu \left(H \frac{A}{x} - h \right) dx.$$

Integraodo tra i limiti $x = A$, $x = B$, si troverebbe, per la quantità di azione sviluppata dal gas, dilatandosi dal volume A al volume B, sotto la pressiooe costante μh,

$$\mu H A . \log \frac{B}{A} - \mu h (B - A).$$

Questo risultamento c' iosegna che se, sotto la pressinne h si fosse scaldato un volume di gas A, in modo da procurargli una forza elastica H maggiore di h, e che, maotenendo sempre la temperatura al medesimo grado, si lasciasse dilatare questo gas fiotantochè il suo volume fosse diveouto B, la quantità di azione che esso avrebbe potuto produrre sarebbe capace di elevare a un metro il numero di chilogrammi, che si otterrebbero sostitueodo oella formula i valori numerici rappraseotati dalle lettere.

La valutazione degli effetti delle macchine a fuoco è principalmeote fondata sopra il paragooe tra la quantità di calore sviluppata e la quaotità di azione ottenuta. Coooscendo la capacità calorifica di un gas (*Vedi* Caloae), possiamo ben determioare la quantità di calore necessaria per elevare la temperatura di un volume costaote di questo gas; ma siccome la temperatura dei gas si abbassa quando essi si dilatano, sarebbe necessario, quando il volume aumenta, di somministrare ooova quaotità di calore, e la acieoza ooo possiede ancora i mezzi di valutare esattameute taoto la quantità di calore necessaria per mantenere ad uoa medesima temperatora un gas che si dilata, quanto l' abbassameoto di temperatura che risulterebbe dalla sua dilatazione, se le pareti nelle quali esso è contenuto ooo gli trasmettessero punto calore. Non si può duoque ancora sottoporre ad un calcolo esatto le macchioe, oelle quali l' agente motore sarebbe uu gas riscaldato.

Coosideraudo le precedeuti denominazioni, consideriamo ancora il caso in cui la pressinoe del gas sullo stantuffo rimanga costante, il che ha luogo quaodo una nuova quantità di fluido vieue a ciascun istaote a compensare la diminuzione di elasticità prodotta dalla dilataziooe, e questo è propriamente il caso del vapore di acqua nelle trombe a fuoco. μH essendo sempre la pressiooe ioteroa quando il volume è A, lo sarà ancora quando il volume è B; e, per diminuire questo volume di uoa quantità dx, lo stantuffo supponendosi libero da qualunque pressiooe esterna, bisognerà impiegare contro questo staotuffo ona quantità di azione eguale a

$$\mu H dx.$$

La quantità di azione per riportare il volume B al volume A, o la quantità di azione sviluppata dal vapore, passando da A a B, sarà duoque l' iutegrale di $\mu H dx$ preso tra i limiti $x = A$, $x = B$, vale a dire

$$\mu H (B - A).$$

È facile vedere che se lo stantuffo sopportasse una pressione esterna costante μh, la quantità di azioue del vapore sarebbe

$$\mu(H-h)(B-A).$$

Esamineremo quello che più particolarmente riguarda il vapore dell'acqua alla parola VAPORE.

FOSCARINI (PAOLO ANTONIO), matematico italiano, nato verso l'anno 1580 in Venezia, secondo alcuni, e secondo altri nel reguo di Napoli. Entrato in età assai giovane nell'ordine dei carmelitani dell'antica osservanza, vi si fece ben presto distinguere per le estese sue cognizioni. Professò filosofia a Napoli e poi a Messina, e in fine fu oel 1608 nominato rettore della provincia di Calabria. La lettura delle prime opere di Galileo rese il p. Foscarini partigiano dichiarato del sistema di Copernico: egli pubblicò nel 1615 una lettera, nella qoale esamina i passi della Bibbia, che sembrano iu opposizione colla rotazione della terra, e gli spiega in un modo ingegnosissimo. I dispiaceri eui gli attirò tale scritto lo determinarono ad abbandonare lo studio, e gli anticiparono probabilmente la morte, che il bibliotecario del suo ordine pone avvenuta verso il 1616. La lettera che di sopra abbiamo citata è intitolata: *Lettera sopra l'opinione de'Pittagorici e del Copernico, della mobilità della terra e stabilità del sole, e il nuovo pittagorico sistema del mondo*, Napoli, 1615, in-4. Essa venoe tradotta in latino e ristampata a Leida nel 1636, ed a Lione, 1641, in-4, in seguito ai *Dialoghi* di Galileo Galilei. Questo dotto religioso ha lasciato pure alcune opere manoscritte.

FOSCHINI (ANTONIO), architetto, nato a Corfù nel 1741 da genitore ferrarese, fu ancor fanciullo ricondotto a Ferrara, ove attese con mirabile ardore allo studio dell'architettura congiungendolo a quello delle scienze esatte; esempio troppo trascurato oggigiorno in cui da molti falsamente si crede ehe le matematiche siano nemiche del gusto e del bello. Oltre varie opere sulla sua arte, ha lasciato: I *Elementi di algebra*; II *Osservazioni sulla cometa comparsa nel* 1811; III *Trattato sulle correzioni ottiche nell'architettura*; IV *Trattato dell'architettura militare*. Foschini, che era socio delle Accademie di Bologna e di Parma, ricusò, per non allontanarsi da Ferrara, la cattedra di architettura civile e militare ehe gli era stata conferita a Pavia, e non volle a niun patto accettare le vantaggiose offerte che gli vennero replicatamente fatte dal cardinale Riminaldi, per attirarlo a Roma, e dal maresciallo Pallavicini per averlo alla corte di Vienna. Morì a Ferrara il 14 Dicembre 1813, e il conte Leopoldo Cicognara lesse il suo elogio.

FOSFORO (*Astron.*). Si dà questo nome in astronomia alla stella del mattino, cioè al pianeta Venere, quando precede il sole. Questa parola deriva dalle voci greche φῶς, *luce*, e φέρω, *porto*. Per la stessa ragione i latini davaoo a Venere anco il nome di *Lucifero*.

FOSTER (SAMUELE), matematico inglese, nato ne' primi anni del secolo XVII o negli ultimi del XVI, fece i suoi studi nella università di Cambridge, e si applicò per tempo alle matematiche, nelle qoali ottenne al suo tempo distinta fama. Fatto nel 1636 professore di astronomia nel collegio di Gresham, lasciò dieci mesi dopo tale cattedra, noo si sa per qual ragiooe, e nel 1641 l'assunse di nuovo. Fu uno dei membri della compagnia che divenoe poscia il nucleo della Società Reale di Londra, ma morì nel 1652, prima che tale dotta società fosse formata. Scrisse un buon trattato di gnomonica, 1638, in-8, ed altre opere pubblicate dopo la sua morte coi seguenti titoli: I *Posthuma Fosteri*, 1652, in-4; II Quattro *Trattati di gnomonica*, 1654, in-4. Nelle diverse sue opere sulla gnomonica, commentate in Inghilterra da parecchi autori, Foster insegna l'in-

gegnosa pratica delle *scale gnomoniche*. Tale metodo, il più spedito e il più esatto di tutti, è usitatissimo in Inghilterra, ed era pressochè ignoto in Francia, prima della pubblicazione dell' *Enciclopedia*. Alcuni autori attribuiscono l' invenzione di tali scale ad Edmondo Gunter. III *Il Settore perfezionato* (*The Sector altered*), 1661, in-4; IV *Miscellanee*, o *Veglie matematiche*, (parte in latino e parte in inglese), 1659, in fol Io queste *Miscellanee* si osserva l' *Epitome* di Aristarco di Samo, *de magnitudine solis et lunae*, e la traduzione in latino dei *Lemmi* di Archimede, fatta da Giovanni Greaves sopra un manoscritto arabo, riveduta e corretta da Foster (*Vedi* Archimede). Fatto aveva delle osservazioni di ecclissi, ed inventato e perfezionato parecchi strumenti di astronomia e di matematiche.

FOSTER (Guglielmo), matematico inglese, pubblicò nel 1633, in-4, la traduzione inglese di due opere composte in latino da Oughtred, geometra famoso del suo tempo, e di cui egli era stato discepolo; una sopra i *circoli di proporzione*, specie di quadrante logaritmico; l' altra sopra uno *strumento orizzontale*, che serve per la soluzione di tutti i problemi, che ordinariamente richiedono l' uso del globo, e per delineare quadranti in ogni sorta di piani.

FOSTER (Marco), altro matematico inglese, pubblicò nel 1690 una *Trigonometria aritmetica* (in inglese), nella quale insegna il mezzo di risolvere tutti i triangoli rettilinei coll' aritmetica semplice e senza il soccorso delle tavole.

FOUCHY (Giovanni Paolo Grand-Jean de), segretario perpetuo dell' Accademia delle Scienze di Parigi, nacque in questa città nel 1707. Dotato dalla natura delle più felici disposizioni, seppe ben profittare dell' ottima educazione che gli procurò suo padre. Sebbene non trascurasse le belle lettere, la coltura delle scienze ebbe per lui maggiori attrattive. Non aveva appena ventiquattro anni, quando, nel 1731, l' Accademia delle Scienze lo accolse nel suo seno come astronomo; e ciascun volume, pubblicato dopo quel tempo da quella dotta società, contiene memorie, nelle quali dà ragguaglio delle sue osservazioni sui fenomeni accaduti durante l' anno: ne pubblicò ancora due che hanno per oggetto, la prima la semplificazione dei metodi in uso per calcolare la rivoluzione degli astri, e la seconda la semplificazione degli strumenti, di cui la compra o il trasporto poteva essere un ostacolo ai lavori de' suoi confratelli. Mairan avendo rinunziato nel 1743 alla carica di segretario perpetuo dell' Accademia, Fouchy fu eletto in suo luogo. In alcuna guisa ei succedeva così a Fontenelle, la reputazione del quale rendeva difficile l' assunto del suo continuatore. Non ostante, se gli elogi di Fouchy non interessano quanto quelli del suo predecessore, non può negarsi che siano scritti con stile conveniente e con disinvolto e franco candore, che gli ottiene la fiducia di tutti i lettori. Dopo aver tenuto tale impiego per 30 anni, l'età e le infermità l' obbligarono a renunziarvi, e gli successe Condorcet. Egli morì a Parigi, molti anni dopo, il 15 Aprile 1788, in età di 81 anni. Oltre le memorie inserite nella Raccolta dell' Accademia, si ha di Fouchy la descrizione di alcuni strumenti di sua invenzione, inserita nella *Raccolta delle macchine* dell' Accademia, nei tomi V, VI e VII. Vi si osserva un micrometro universale, un livello perfezionato, e soprattutto un mezzo ingegnosissimo ed ammirabile per la sorprendente sua semplicità per fare senz' albero nè registro qualunque specie di viti sul torno.

FOULLON (Abele), meccanico e poeta, nato nel 1513 a Loué nel Maine, divenne direttore della zecca di Parigi; ma avendo abbracciato la religione riformata, si ritirò ad Orléans, ove morì nel 1563. Abbiamo di lui un' opera intitolata: *L' usage de l' Holomètre, pour savoir mesurer toutes choses qui sont sous l' étendue de l' oeil, tant en longueur et largeur qu' en hauteur et profondité*, Parigi, 1555: quest' opera venne tradotta in latino, con aggiunte, da

Niccola Stoup, Basilea, 1577, in-fol.; e se ne ha pure una traduzione italiana, Venezia, Ziletti, 1564, in-4. Tale Olometro era una specie di tavoletta, armata di due grandi alidade, e di altri parecchi accessorii, carichi di divisioni; il che formava uno strumento complicatissimo, ma che dava immediatamente e senza calcolo il risultamento delle misure. Venne alquanto in voga in un tempo in cui l'invenzione dei logaritmi non aveva per anco fatto conoscere agli agrimensori i calcoli trigonometrici. La-Croix du Maine dice che Foullon aveva lasciato manoscritto un trattato di macchine, di organi, di movimenti, di fusioni metalliche, ec.

FOURIER (Giovan Batista Giuseppe), uno dei più celebri geometri moderni, nacque ad Auxerre il 21 Marzo 1768, di famiglia povera ma onorata, originaria di Lorena, e nel seno della quale trovò nobili esempj da imitare. Pietro Fourier, riformatore e generale dell'ordine dei canonici regolari di Lorena era suo parente. È noto che questo religioso, non meno distinto pei suoi lumi che per l'eminenti sue virtù, è il fondatore di una congregazione di donne dedicate all'educazione delle giovinette povere, la quale ha poi servito di modello a tutte le istituzioni simili che esistono ai nostri giorni.

Orfano di padre e di madre prima che giungesse all'età di otto anni compiti, Fourier sarebbe stato collocato in qualche officina ad apprendere un'arte meccanica, senza la carità di una signora che, avendo creduto di osservare in lui felici disposizioni, lo raccomandò caldamente al vescovo di Auxerre, il quale ottenne che non ostante la sua tenera età fosse ricevuto nella scuola militare di Auxerre, diretta in quel tempo dai benedettini della congregazione di S. Mauro. Pochi fanciulli hanno sì bene giustificato l'antiveggenza di coloro che nei trastulli puerili e sotto il linguaggio infantile hanno saputo intravedere i germi di un ingegno potente; Fourier era sempre il primo della sua classe, e i suoi successi non gli costavano fatica alcuna. Memoria felice, estrema facilità nel comprendere tutto, eleganza naturale nell'esporre le proprie idee, tali erano le qualità che in lui primeggiavano al cominciare della sua adolescenza. Nell'età di soli tredici anni cominciò lo studio delle matematiche, e la sua attitudine per queste scienze sublimi si manifestò anco con maggiore splendore di quella che lo aveva fatto distinguere negli altri studj. Ma ciò che maggiormente sorprendeva, si è che gli studj scientifici non gli facevano trascurare le belle lettere, nè le attrattive che per lui avevano l'algebra e la geometria lo rendevano insensibile alle bellezze di Demostene e di Corneille. Pure era facile lo scorgere che il giovine Fourier dava la preferenza alla scienza dei Fermat e degli Euler.

Non aveva che venti anni quando occupò la cattedra di matematiche nella scuola in cui aveva studiato: ei la tenne per quattro anni e qualche mese, cioè dal 1789 fino al principio del 1794, e vi si fece distinguere per l'estrema facilità e chiarezza colla quale esponeva ai suoi alunni i principj della scienza. Ma non si limitò ai successi che otteneva nell'insegnamento; già si preparava a prender posto tra gl'inventori. Una memoria che inviò all'Accademia delle Scienze di Parigi conteneva, almeno in germe, l'esposizione di un nuovo metodo per risolvere le equazioni algebriche. Fu in quel tempo appunto che la dissoluzione delle accademie divenne compiuta; non solo non fu reso conto allora della sua memoria, ma più tardi, quando calmossi la tempesta politica, non fu possibile di ritrovarla tra le carte dell'Accademia. Fourier vi supplì in seguito con una copia che di essa aveva fin d'allora consegnato ad un suo amico, e della quale ebbe cura di fare attestare l'anzianità. Ritorneremo in appresso su questo fatto.

All'epoca della fondazione della Scuola Normale, Fourier fu uno dei giovani professori che il dipartimento della Youne inviò a quel liceo scientifico per fortificarsi nell'arte tanto difficile d'istruire gli altri. Ei non tardò a rendersi degno

di questa onorevole distinzione, si attirò l'attenzione di Monge e di Lagrange, e questi illustri maestri lo raccomandarono al governo perchè fosse preso in considerazione allorchè fu creata la Scuola Centrale dei pubblici lavori, grande e potente istituzione, divenuta in seguito sì utile alla Francia, e tanto celebre in Europa sotto il nome di *Scuola Politecnica*. Fourier entrò nello stato maggiore di quella scuola, per verità non col titolo di professore, ma come uno dei tre sostituti di ciò che allora chiamavasi amministratore di polizia. Avendo allora il vantaggio di trattare con giovani di una capacità molto elevata, potè darsi ad un insegnamento di un ordine superiore a quello della scuola d'Auxerre. Sembra che nelle lezioni che diede in quel torno parlasse più d'una volta del metodo di analisi algebrica da lui scoperto ad Auxerre, e che il programma del suo corso ne presentasse qualche traccia.

Quantunque Fourier non avesse ancora pubblicato alcun lavoro, era già considerato come un geometra di primo ordine, e fu del numero dei dotti che il Direttorio permise a Bonaparte di seco condurre in Egitto. Fourier divenne necessariamente membro dell'Istituto d'Egitto, e malgrado la sua giovinezza vi si fece notare per l'attività delle sue ricerche e per l'importanza de' suoi lavori. D'altronde, i dotti, i generali, i soldati, tutto era gioventù in quella gloriosa armata, che a traverso ad un numero infinito di pericoli, andava a recar nella terra desolata dei Faraoni, il vessillo, i lumi, e le arti della Francia! Ci duole di non poter qui intrattenerci di varie particolarità onorevoli per la memoria di Fourier, e che si riferiscono a quella immortale spedizione: diciamo soltanto qualche altra parola sulla sua vita pubblica. Nel 1802, l'illustre capitano dell'armata di Egitto, divenuto primo console, circondossi di tutti gli uomini distinti che le procelle rivoluzionarie avevano risparmiato, e col doppio fine di onorare la scienza e di rigenerare degnamente l'amministrazione del paese, credè opportuno di dovere strappare alle loro utili meditazioni un gran numero di dotti che divennero i capi dei diversi rami dell'amministrazione civile e militare, nel vasto piano di organizzazione che la sua mente aveva concepito. Fourier non fu dimenticato allorchè si volle realizzare questa idea, che forse è stata funesta ai progressi della scienza: fu chiamato alla prefettura del dipartimento dell'Isère, ove il tempo e le rivoluzioni, che anco successivamente hanno turbato i destini della Francia, non hanno potuto cancellare la memoria di quell'amministratore illuminato, benevolo e giusto.

Non ostante, Fourier, mentre attendeva con zelo alle funzioni della magistratura che nella sua posizione era allora di somma importanza, trovò il mezzo di applicarsi allo studio e ai lavori scientifici che hanno reso tanto commendevole il suo nome. Infatti a quell'epoca della sua vita appartengono i più importanti ed i più ammirabili dei suoi lavori sulla teoria del calorico, lavori immensi e che suppongono nel tempo stesso numerose e delicate esperienze non meno che calcoli di un ordine il più elevato. Nel 1807 inviò all'Istituto la lunga memoria che conteneva i risultati delle sue investigazioni e delle sue veglie, e l'Istituto, il quale (ci compiacciamo di rendergli la dovuta giustizia) riconosceva tutta l'importanza delle questioni proposte e risolute da Fourier, fece al prefetto dell'Isère la gentilezza di proporre per premio quella medesima *Teoria matematica del calorico*, che egli aveva allora allora creata, e nella quale era impossibile che nessuno lo rivaleggiasse non che il superasse. Infatti, quattro o cinque anni dopo, Fourier, senza avere spinto più oltre le sue ricerche, senza aver fatta alla sua prima memoria altra aggiunta che quella dell'equazione generale della superficie, conseguì il premio nella seduta del 6 Gennajo 1812: e certamente lo meritava. Questi due scritti hanno in seguito formato le basi principali della sua *Teoria analitica del calorico*.

Grandi avvenimenti, che impossibile ci è di passare affatto sotto silenzio,

vennero pochi anni dopo a turbare la carriera politica e scientifica di Fourier. Nel 1815, il ritorno improvviso di Napoleone, che entrando in Francia passò per Grenoble, gettò in una strana perplessità un gran numero di funzionarj che i Borboni avevano conservato nei loro impieghi. Il prefetto dell'Isère, vedendo d'altronde impossibile di resistere al trasporto e all'entusiasmo della popolazione e dell'armata in favore di Napoleone, credè di non potere fare altro di meglio che di ritirarsi davanti a lui. Ma Napoleone, del quale può paragonarsi il cammino al volo dell'aquila, ritrovò Fourier a Lione, perdonò la sua esitazione al suo antico collega dell'Istituto di Egitto e lo nominò prefetto del Rodano. Poco tempo dopo però, Fourier non avendo dimostrato sufficiente devozione ed energia pei progetti di Napoleone, cadde in disgrazia. Venne allora a Parigi, ove d'allora in poi si dedicò interamente ai lavori scientifici pei quali aveva un'attitudine più reale. Nel 1816, l'Accademia delle Scienze, che aveva ben conosciuto il merito e i talenti di Fourier, lo chiamò nel suo seno quasi ad unanimità di voti. Il re Luigi XVIII, male valutando il carattere e la vita politica di questo dotto, ricusò la sua sanzione a questa nomina; ma nel 1817 la stessa unanimità avendo chiamato Fourier alla medesima Accademia, il re non esitò ad approvare la sua elezione. Divise egli con Cuvier le funzioni di segretario perpetuo, e ben presto divenne uno dei membri più attivi e più distinti di quel dotto corpo, che aveva insistito, in un modo per lui tanto onorevole, a volerlo tra' suoi membri. Alle sue ricerche sul calorico aggiunse nel 1820 la soluzione di un probelma molto complicato che si riferisce a questo fenomeno. Consiste esso nel formare le equazioni differenziali che esprimono la distribuzione del calorico nei liquidi in moto, quando tutte le molecole sono spostate da forze qualunque, combinate coi cangiamenti di temperatura. Queste equazioni appartengono all'idrodinamica generale. Finalmente nel 1822 Fourier pubblicò la raccolta di tutti i suoi lavori sulle diverse questioni che presenta l'esistenza e la diffusione del calorico, in un' opera speciale, che può considerarsi come la più importante di quelle da lui composte. Non ci tratterremo adesso della esposizione sistematica della teoria di Fourier, che d'altronde, come egli stesso lo dice, dovrebbe, se fosse definitiva, formare uno dei rami principali della fisica generale. Infatti riposa essa sull'osservazione di alcuni fatti secondo lui primordiali, nei quali crede che si trovino tutti i principj dei fenomeni che presenta il calorico, e dai quali ha voluto dedurre la dimostrazione matematica delle leggi che gli regolano. Diremo soltanto con quella severa franchezza che caratterizza i nostri giudizj, e dalla quale non potrebbe distorglierci la venerazione profonda che professiamo per la memoria di Fourier, che egli non si è posto in un punto di vista favorevole alla scoperta delle leggi del fenomeno che è stato l'oggetto de' suoi studj. Come la maggior parte dei geometri moderni, la cui dottrina è incontrastabile, Fourier mancava essenzialmente di quella filosofia elevata che può sola iniziare la scienza nella cognizione delle cause prime; apparteneva come essi alle idee filosofiche dell'ultimo secolo, e i suoi lavori per quanto coscienziosi e commendevoli non si elevano al di sopra delle cognizioni che possono dedursi dalla sola considerazione dell'esperienza. Non si deve fare altro che aprire il suo libro per confermarsi in questa opinione alla lettura dei primi versi. » Le cause » principali, dice egli, non ci sono note, ma sono soggette a leggi semplici e » costanti, che possono scoprirsi mediante l'osservazione, e lo studio delle quali » forma l'oggetto della filosofia naturale. » Non è necessario il fare osservare quanto questa proposizione sia vuota di senso filosofico.

Nulladimeno l'opera di Fourier presenta varj punti notabilissimi, contiene alcuni teoremi nuovi espressi con molta eleganza, e delle integrazioni che dimostrano il merito eminente dell'autore come geometra. Nel 1827, l'Accademia

Francese apprezzò, dandogli i suoi suffragi, le cognizioni letterarie che la severità de' suoi studj non gli aveva fatto trascurare. Gli scritti matematici di Fourier si distinguono per uno stile elegante e puro, per la rettitudine delle idee, e per la maniera felice colla quale le esprime. Queste qualità di storico brillano soprattutto in un modo mirabile nell'introduzione della grand'opera sull'Egitto, alla compilazione generale della quale ha molto contribuito, e nei diversi elogi che ha avuto occasione di pronunziare come segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze. Fourier, che è morto a Parigi il 16 Maggio 1830, mancava di quel coraggio civile necessario agli uomini di stato nei tempi di turbolenze e di disgrazie per le quali è dovuta passare la Francia, ma egli lascia nell'amministrazione non meno che nelle scienze e nelle lettere un nome stimabile e puro. Nella sua vita privata era semplice, spiritoso e benevolo; la sua conversazione era piena di attrattive, ed aveva il raro talento di far brillare le persone colle quali si tratteneva. Se, come dotto, la posterità che non potrà fare a meno di riconoscere in lui un profondo geometra, non lo porrà nel primo ordine tra quelli che hanno allargato il circolo delle nostre cognizioni, gli assegnerà però un posto distinto tra gli uomini celebri del periodo storico nel quale viviamo. La sua memoria in fine sarà sempre cara a quelli che lo hanno avvicinato e conosciuto.

Ecco l'elenco delle opere di Fourier in un ordine più metodico che cronologico: I *Théorie analytique de la chaleur*, Parigi, 1822, in-4. È questa l'opera sua principale, ed è la prima edizione della memoria inviata all'Istituto il 28 Settembre 1811, e premiata il 6 Gennajo 1812. Del resto, Fourier aveva già dato fino dal 1807 la prima spiegazione della sua teoria in un'altra memoria inviata egualmente all'Istituto; ma la seconda contiene di più della prima l'equazione generale della superficie su cui si diffonde il calorico, e vi sono per altra parte trascurate alcune costruzioni geometriche e varie particolarità di analisi che non avevano una relazione necessaria colla questione fisica. Questo lavoro è ammirabile specialmente per gl'ingegnosi metodi inventati da Fourier onde ottenere integrazioni difficoltosissime. Infatti, coll'aver trovato le equazioni generali del moto del calorico a traverso e sulla superficie dei corpi, Fourier in sostanza aveva sciolto il problema. Ma la sua soluzione sarebbe rimasta inutile, se lì si fosse fermato. Le sue equazioni particolari e generali erano equazioni differenziali, e, finchè non fossero state integrate, sarebbe stato affatto impossibile il farne uso e l'applicarle alla pratica. Tal necessità era troppo ben sentita da quel profondo geometra: egli perciò passò in rivista ad una ad una tutte le sue equazioni, e con un'analisi speciale, che in parte creò e che si fonda su teoremi non meno nuovi che ingegnosi, giunse alle desiderate integrazioni. L'originalità di Fourier in questa parte del suo lavoro consiste non solamente nell'esprimere gl'integrali per mezzo della somma di più termini esponenziali (metodo noto fino dall'origine del calcolo delle differenze parziali), ma nel determinare ancora le funzioni arbitrarie sotto i segni d'integrali definiti, in modo che il risultato dell'integrazione sia una funzione qualunque data continua o discontinua: così egli arricchì le matematiche pure di un metodo infinitamente pregevole, e meritò di esser collocato in questa scienza come inventore. Dobbiamo in fine aggiungere che l'opera della quale parliamo è un capo-lavoro per la eleganza dello stile e per la chiarezza dell'esposizione. Nel *Bulletin scientifique de la Société philomatique* per l'anno 1808 (pag. 112), si legge un estratto della memoria del 1807; e di quella del 1811 si trova una buona analisi nel tom. III, pag. 350, degli *Annales de chimie et de physique*. Quest'ultima è stata ristampata nella nuova serie delle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi, in due parti, la 1.ª nel tom. IV, 1825 (*Mem.* per gli anni 1819-20), e la 2.ª nel tom. V, 1825 (*Mem.* per gli anni 1821-22). II Diverse *Memorie* o *Note* che parimente si riferiscono alla

teoria del calorico, e che ora ne spiegano o ne sviluppano qualche punto importante, ora ne deducono delle conseguenze. Esse sono: 1.° *Note sur la chaleur rayonnante*, negli *Ann. de chimie et de physique*, IV, 129-145: questa nota comprende una dimostrazione più compinta e più elementare della parte corrispondente della sua memoria premiata; 2.° *Remarque sur la théorie mathématique de la chaleur rayonnante*, ivi, XXVIII, 337; 3.° *Questions sur la théorie physique de la chaleur rayonnante*, ivi, II, 259-303; 4.° *Sur le refroidissement séculaire de la terre*, ivi, XIII, 418-438; 5.° *Remarques générales sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires*, ivi, XXVII, 136-167; 6.° *Recherches historiques sur les propriétés de la chaleur rayonnante*, ivi, XXVII, 236-284; 7.° *Mémoire sur les vibrations des surfaces flexibles tendues et des lames ou des plaques élastiques*. Questa memoria, letta all' Accademia delle Scienze nel 1825, è tuttora inedita: essa è della più alta importanza, ed appartiene a quella parte dell' applicazione dell' analisi che ha per oggetto di integrare le equazioni differenziali esprimenti tutte le condizioni fisiche dei quesiti, e di dedurne dagl' integrali così ottenuti la cognizione completa del fenomeno che si considera. Si conoscevano per verità le equazioni differenziali delle vibrazioni delle superficie flessibili tese, e delle lame o lastre elastiche (quella è del secondo, e questa è del quarto ordine); ma ciò che non si era ancora ottenuto erano gl' integrali generali di queste equazioni, cioè le espressioni che contenessero in termini finiti tante funzioni arbitrarie, quante ne comportano l' ordine o la natura delle equazioni differenziali. Non solo Fourier voleva trovarli, ma avendo bisogno di soluzioni comode e per così dire maneggevoli, voleva di più dare a questi integrali generali una forma atta a far conoscere chiaramente l' andamento e la legge dei fenomeni. Egli vi giunse, e, ciò che è più ammirabile, dimostrò che gl' integrali generali di queste equazioni sono espressi da integrali definiti, che si ottengono dai teoremi dati nella sua grand'opera sul calorico. 8.° *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur* (1829); 9.° *Expériences thermo-électriques*, in società con Oersted. III Due opere di matematiche pure, cioè: 1.° *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires et sur l' application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendantes qui dépendent de la théorie de la chaleur*, inserita nella raccolta delle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze per l' anno 1827; e 2.° *Résolution générale des équations déterminées*, parte prima, opera postuma pubblicata da Navier. Sappiamo esser questa l' opera della sua prima gioventù; ne andava parlando più spesso a misura che inoltravasi negli anni, ed aveva raccolto delle prove, o piuttosto delle semiprove, che dimostravano l' autenticità delle sue scoperte. Queste prove erano, in mancanza dell' originale medesimo della memoria da lui inviata all' Istituto, una copia che ne possedeva uno dei suoi amici di Auxerre, Roux, dotto professore di matematiche, un certificato nel quale Roux asseriva che tale copia trovavasi nelle sue mani fino dal 1794, ed un attestato di un antico alunno della scuola politecnica, Dinet, il quale riconosceva di aver ritrovato nei programmi del corso che allora faceva Fourier le tracce di questo metodo. Il nostro sentimento è che Fourier possedesse in realtà il fondo di questo metodo nel 1794, metodo che del resto potè ed anco dovè perfezionare in seguito. A questi due scritti possiamo aggiungere: 3.° Una *Memoria sulla statica*, contenente la dimostrazione del principio delle velocità virtuali e la teoria dei momenti, inserita nel tomo secondo del *Journal de l' École polytechnique*. IV Due scritti assai pregevoli inseriti nella grand'opera la *Description de l' Egypte*, pubblicata per ordine di Napoleone, cioè: 1.° *Préface historique générale*, ove si ammira uno stile elegante e cognizioni vastissime; e 2.° *Recherches sur les sciences et le gouvernement de l' Egypte*, che altro non è che

un saggio di un lavoro di maggiore importanza che Fourier si proponeva di scrivere sullo stesso argomento. È da notarsi però che le sue idee intorno all' astronomia degli Egiziani non consonavano con quelle de' suoi colleghi della commissione di Egitto, nè sono state ricevute dalla generalità dei dotti. Anzi Biot, nelle sue *Recherches sur plusieurs points de l'astronomie égyptienne*, ha combattuto senza riguardo le opinioni e i calcoli di Fourier. V Cinque *Elogi* da lui pronunziati all' Accademia delle Scienze nella sua qualità di segretario perpetuo; cioè quelli di Herschell, di Delambre, di Breguet, di Charles e di Laplace; quello di Herschell è sopra gli altri notabilissimo; VI Diversi opuscoli di minor conto, come: 1.° *Sur la théorie analytique des assurances*, negli *Annales de chimie et de physique*, X, 177, ove perfeziona varj punti del calcolo delle probabilità; 2.° *Rapport sur les établissements appelés tontines*, Parigi, 1821, in-4; 3.° Parecchi *Rapporti* sui progressi delle scienze matematiche dal 1822 al 1829, inseriti nelle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze; 4.° Gli articoli Rallier, Viète e Wallis della *Biografia universale*; 5.° *Recherches statistiques sur la ville de Paris*, composte sotto gli auspicj del prefetto conte di Chabrol, e coi documenti somministratigli da quell' amministratore.

FOURNIER (Giorgio), nato a Caen nel 1595, prese giovane ancora l' abito dei gesuiti, e fu inviato a Tournai, ove professò le umane lettere per cinque anni, e e le matematiche per altri sette anni. I suoi progressi in questa scienza furono tali, che i suoi superiori lo destinarono fin d'allora a fare viaggi di lungo corso. Fu ricevuto nella marina reale in qualità di cappellano, ed ebbe così l'occasione di visitare i punti più importanti delle coste dell'Asia. Profittò altresì del soggiorno sul mare onde perfezionare le sue cognizioni in idrografia. Ritornato dai suoi viaggi, si ritirò a la Flèche, dove morì ai 13 Aprile 1652, in età solamente di 51 anni. Le principali sue opere sono: I *Hydrographie, contenant la théorie et la pratique de toutes les parties de la navigation*, Parigi, 1643, in-fol.; e ivi, 1667, in-fol., nuova edizione coll' aggiunta di una *Instruction aux pilotes qui navigent autour de l'Ecosse*. È questa la più importante delle opere dell' autore, e, malgrado la sua prolissità, fu per lungo tempo consoltata siccome una delle più compiute su tale materia; II *Euclidis sex priores elementorum geometricorum libri demonstrati*, ivi, 1644, in-12. III *Traité des fortifications, ou Architecture militaire*, ivi, 1649, in-12. Il padre Fournier ha pure lasciato in manoscritto differenti trattati di matematiche che si conservavano nella biblioteca dei gesuiti di la Flèche.

FRACASTORO (Girolamo), celebre filosofo, medico e poeta italiano, nato nel 1483 a Verona, e morto a' dì 8 Agosto 1553. Noi però non dobbiamo qui annoverarlo che come dotto astronomo e matematico, sebbene non abbia lasciato in tali scienze opere adeguate alle sue cognizioni. Egli non ha pubblicato infatti che un piccolo libro intitolato: *Homocentricorum, sive de stellis liber unus*, Venezia, 1535, in-4. Tale scritto, dedicato al pontefice Paolo III, ha per oggetto di spiegare il sistema planetario per mezzo di circoli o movimenti omocentrici, sostituiti agli eccentrici e agli epicicli. Fracastoro credeva di sparger così una nuova luce su tutta l'astronomia: ma il suo metodo non poteva riuscire, perchè era sprovveduto di osservazioni, mentre per l' esattezza di esse non erano ancora stati inventati gli strumenti necessarj: aveva però intraveduto il telescopio, immaginando di porre l' una sull' altra due lenti da occhiali per osservare il corso degli astri.

FRANCESCHINIS (della Valle), nato a Udine nel 1756, studiò prima nella città nativa, e quindi a Monza nel collegio dei barnabiti, dei quali giovane ancora vestì l'abito. Le ottime disposizioni che dimostrò e le alte speranze che di sè fece

concepire, indussero i suoi superiori ed inviarlo a Roma, ove sotto il p. Jacquier si diede con tutto l'impegno allo studio delle matematiche. Poichè perfezionato si fu in queste scienze e nelle teologiche discipline, i suoi confratelli lo destinarono all'insegnamento in Bologna. Ivi professò dapprima la filosofia, e varj anni dopo le matematiche, per le quali sentiva una vera passione. Pubblicò allora una memoria *sulla tensione delle funi*, in cui dimostrava l'erroneità di una nuova teoria proposta dal Frisi, memoria che fu applaudita dal celebre Giordano Riccati; e non molto dopo diede alla luce altre tre dissertazioni, l'una delle quali aggiravasi sulla tanto agitata questione *dei logaritmi dei numeri negativi*, l'altra *sopra la spinta degli archi e delle volte*, e la terza *sulla teoria delle parallele*. Fu poscia chiamato a professare metafisica a Roma nell'archiginnasio della Sapienza, e sotto il governo francese fu fatto professore di matematica applicata nell'università di Padova, cattedra nella quale venne confermato allorchè nel 1814 la Lombardia e le Provincie Venete ritornarono sotto il dominio dell'Austria. Negli ultimi anni della sua vita, il Franceschinis, che era membro e segretario dell'Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova, si ritirò nel cenobio dai barnabiti di Monza, ove morì nel 1840. Chi desiderasse maggiori notizie sui lavori e sulla vita di questo dotto potrà ricorrere all'articolo biografico che di lui ha scritto Antonio Meneghelli nel tom. VIII della *Biografia degli Italiani illustri* pubblicata a Venezia da De-Tipaldo, e dal quale abbiamo estratto i pochi cenni che qui ne diamo.

FRANCESCONI (Daniele), nato a Belvedere di Cordignano, nella provincia di Treviso nel 1761, fu da' suoi genitori mandato a fare gli studi nel seminario di Padova, donde poi passò all'università della stessa città; e dopo essersi addottorato, volle entrare nel sacro ministero, e fu ordinato nel 1785. Fu egli allora ascritto all'Accademia di Padova e vi lesse applaudite memorie sopra soggetti di fisica e di matematica, che non volle però per soverchia modestia che fossero pubblicate, ma di cui può vedersi un estratto nelle *Relazioni accademiche* del Cesarotti. Quantunque nel 1793 nominato fosse pubblico professore di geometria e di fisica nel collegio di S. Marco di Padova, fecesi supplire nelle incumbenze della sua cattedra dall'ab. Avanzini, e sul cadere dell'anno 1794 recossi a Roma per dirigervi l'educazione del giovine Leonardo Pesaro, figlio dell'ambasciatore veneto a quella corte. Non tardò ad esservi conosciuto il merito del Francesconi specialmente per una memoria sulla velocità della luce che nel 1798 lesse all'Istituto Nazionale di quella città, talchè quello stesso Istituto nominollo all'onorevole incarico, che egli non accettò, di membro per portarsi a Parigi insieme col prof. Franchini, a conferire coll'Istituto di Francia per la fissazione definitiva dell'unità dei nuovi pesi e misure. Tornato a Padova nel 1800, lesse in quell'Accademia una bella memoria *sul fenomeno del rimbalzo dei corpi projetti obliquamente ne' fluidi*, nella quale rettifica un'opinione erronea avanzata dal prof. Bidone in una sua memoria sullo stesso argomento stampata nel tom. XX delle *Memorie* dell'Accademia di Torino. La dissertazione del Francesconi leggesi accresciuta di nuove osservazioni nel vol. III delle *Memorie* dell'Ateneo di Treviso. Recitò in seguito parecchie memorie interessanti tanto all'Istituto del Regno Lombardo Veneto in Milano, come all'Accademia di Padova, non solo sopra soggetti di fisica e di geometria, ma pur anco di antiquaria, di filologia e di erudizione, e tra le altre è da notarsi quella in cui rivendica a favore del Galileo una sua scoperta intorno alla teoria della percossa, della quale facevasi merito a Giovanni Bernoulli. Questo dotto, che fino dal 1805 era divenuto bibliotecario della pubblica libreria di Padova, morì a Venezia il 17 Novembre 1835; e chi volesse meglio conoscere le particolarità più minute de' suoi studj

e della sua vita, potrà ricorrere all'elogio che nel tom. III della *Biografia degl'Italiani illustri* pubblicata a Venezia ha inserito Fortunato Federici.

FRANCHINI (Pietro), nato il 24 Aprile 1768 a Partigliano presso Lucca, è uno degl'ingegni che ai nostri tempi hanno fatto maggiore onore all'Italia nelle scienze matematiche. Dopo aver fatti gli studj elementari in Lucca, recossi all'università di Pisa, ove sotto i celebri professori Paoli e Slop progredì talmente nelle matematiche, che in breve si trovò in grado di poter concorrere alla cattedra che di tali scienze era rimasta vacante in Lucca nel 1785 per la morte dell'abate Giusti. Ma non avendola il Franchini potuta ottenere, si recò al seminario di Veroli ad insegnarvi le umane lettere e non molto dopo la filosofia e la matematica. Fu allora che compose la sua *Teoria dell'analisi*, opera che attirò sopra di lui gli sguardi dei più chiari matematici italiani, Pessuti, Canterzani, del Ricco, ec., e gli meritò di essere ascritto subito dopo all'Accademia di Torino. Passò quindi a insegnare a Frosinone, ove entrò nel sacerdozio; e finalmente negli ultimi anni dello scorso secolo si condusse a Roma.

Quivi ebbe la sorte di esser conosciuto dal celebre Monge, il quale lo chiamò nel 24 Marzo 1798 a rappresentare la provincia del Circeo nel consiglio del tribunato, e sei dì dopo lo fece eleggere membro dell'Istituto Nazionale, e professore di matematiche. Potè allora far meglio conoscere i suoi talenti; e la fama in che salì una sua memoria *sui criterj del Condorcet*, pubblicata in quel tempo, fè sì che la repubblica romana lo eleggesse per andare a Parigi a conferire coi dotti francesi intorno al modo di stabilire sopra solide basi il sistema metrico. Non occorrerà il rammentar qui come soddisfacesse il Franchini a tale incarico, ma basterà solo avvertire che seppe guadagnarsi la stima e l'amicizia degl'illustri matematici Lagrange, Monge e Bossut. Ritornato sul principio di questo secolo in Italia, si trattenne pochi mesi a Bassano, e quindi si restituì a Lucca, ove immediatamente fu elevato alla cattedra di matematiche superiori, ufficio che conservò fino alla sua morte, avvenuta in Lucca il 26 Gennajo 1837. In questo ultimo periodo della sua vita dedicossi il Franchini a tutt'uomo agli studj suoi prediletti; e quantunque sotto la repubblica fosse membro del consiglio, al tempo del principato fosse fatto senatore, e sotto il governo ducale facesse parte delle commissioni del catasto, del debito pubblico, del sindacato del sistema metrico, della censura per le misure agrimensorie, e di quella per compilare un piano per la riforma del censimento, fu tale l'indefessa sua assiduità, che senza trascurare le incumbenze della sua cattedra potè arricchire di belle memorie gli *Atti* della Società Italiana, della quale era socio, e quelli dell'Accademia Lucchese, e pubblicare inoltre importanti opere separate, nelle quali se talvolta si ricerca maggior ordine nella disposizione delle materie, e maggiore accuratezza nella dizione, non mancano mai idee profonde e originali.

Le sue opere a stampa sono: I *Teoria dell'analisi da servire d'introduzione al metodo diretto ed inverso dei limiti*, Roma, 1792, 3 vol. in-8; II *Supplemento all'opera predetta*, ivi, 1794; III *Orazione letta nell'apertura degli studj di Frosinone per introduzione alla scuola della lingua greca*, ivi, 1796; IV *Sur la résolution des équations d'un degré quelconque*, memoria inserita nel Tomo IV della raccolta dell'Accademia di Torino; V *Memoria sopra i criterj detti del Condorcet*, Roma, anno VI; VI *Memoria su diversi articoli spettanti all'analisi*, inserita nel Tomo XI delle *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze*, Modena, 1804; VII *Trattato di aritmetica, preceduto da un'orazione sui pregj delle matematiche*, Lucca, 1804; VIII *Memoria ove si presentano varj metodi tendenti a perfezionare l'analisi algebrica*, nel tomo XII delle *Memorie* della Società Italiana predetta, 1805; IX *Memoria trigonometrica*, ec., Lucca, 1808; X *Orazione funebre in*

lode del maresciallo Lannes duca di Montebello; XI *Saggi d'algebra trascendente e di meccanica*, memoria inserita nel tomo XVI della raccolta della Società Italiana, Verona, 1813; XII *Seguito ai saggi di meccanica e di algebra trascendente*, tom. XVII della Soc. Ital.; XIII *La scienza del calcolo*, Livorno, 1816-17-18-20, 4 vol. in-8; XIV *Elementi di algebra ad uso del R. Liceo di Lucca*, Lucca, 1819; XV *Saggio di una elementare teorica de' poligoni rettilinei corredata di qualche indagine sui poliedri.* Questo scritto fa parte dei notati elementi e del tomo I degli *Atti* della R. Accademia Lucchese, Lucca, 1821; XVI *Saggio sulla storia delle matematiche corredata di scelte notizie biografiche ad uso della gioventù*, Lucca, 1821; XVII *Memoria sopra diversi argomenti spettanti alla scienza del calcolo algebrico*, tom. II degli *Atti* dell'Accademia Lucchese, Lucca, 1823; XVIII *Supplemento al saggio sulla storia delle matematiche ed alla parte algebrica della scienza del calcolo*, Lucca, 1824; XIX *La scienza del calcolo sublime*, Lucca, 1826, 3 vol. in-4. Il *Calcolo integrale*, cominciando dal cap. V, fa parte del tom. IV degli *Atti* dell'Accademia Lucchese, Lucca, 1828; XX *La storia dell'algebra e de' suoi principali scrittori fino al secolo XIX, rettificata, illustrata ed estesa col mezzo degli originali documenti onde serva di supplemento al saggio sulla storia delle matematiche*, Lucca, 1827; XXI *Memoria per servire alla rettificazione, all'illustrazione e al campimento della storia dell'algebra e dei suoi principali scrittori fino al secolo XIX*, nel tom. III degli *Atti* dell'Accademia Lucchese, Lucca, 1827; XXII *Saggio di alcune ricerche analitiche*, nel tom. V degli *Atti* di detta Accademia, Lucca, 1829; XXIII *Dissertazione sulla storia matematica dell'antica nazione indiana*, nel tom. VI di detti *Atti*; XXIV *Memoria sulla decomposizione delle frazionarie e razionali funzioni di x con semplici e spediti mezzi*, nel tom. suddetto; XXV *I principj analitici pel moto equabile e pel moto vario ridotti a miglior forma*, nel tom. suddetto; XXVI *Ricerche analitiche dirette a correggere e perfezionare la soluzione de' generali problemi costituenti la pratica del calcolo logaritmico e trigonometrico*, nel tomo suddetto; XXVII *Saggi analitici*, nel tom. VII degli *Atti* di detta Accademia, Lucca, 1831; XXVIII *Saggio di un nuovo trattato algebrico delle curve di primo ordine, preceduto da una più semplice e rigorosa risoluzione dei trigoni rettilinei*, nel tom. VIII degli stessi *Atti*, Lucca, 1835.

FRANÇOIS (Giovanni), gesuita, nato nel 1582 a St-Claude nella Franca-Contea, vestì l'abito del suo ordine all'età di ventitrè anni. Professò la filosofia e le matematiche in diversi collegi, e fu infine nominato rettore degli studj. Negli ultimi anni della sua vita si ritirò nella casa del suo ordine, a Rennes, e vi morì il 20 Gennajo 1668. Aveva avuto per discepolo l'illustre Cartesio; e questo gran filosofo conservò in tutta la sua vita il più tenero attaccamento pel suo antico maestro. Si hanno di lui le seguenti opere: I *La science de la géographie*, Rennes, 1652, in-8; II *La science des eaux, qui explique leur formation, communication, mouvements et meslanges, ec.*, ivi, 1653, in-4. Lo stile n'è poco accurato, ma vi si rinvengono dei fatti curiosi e appoggiati a teorie allora nuove. III *L'art des fontaines, c'est-à-dire de trouver, eprouver, assembler, mesurer, distribuer et conduire les sources dans les lieux publics et particuliers; d'en rendre la conduite perpétuelle, ec.*, ivi, 1665, in-4; è questa una parte dell'opera precedente, che l'autore fece stampare separatamente con alcune aggiunte. IV *L'arithmétique, ou l'art de compter toutes sortes de nombres avec la plume et les jetons*, ivi, 1653, 1661; Parigi, 1655, 1659, in-4. V *L'art et la manière de mesurer toutes sortes de surfaces tant de loin que de près.* Quest'opera fa seguito alla sua aritmetica, e vi si trova

ordinariamente riunita; VI *Les Élements des sciences et des arts mathématiques, pour servir d'introduction à la cosmographie et à la géographie*, Rennes, 1655, in-4; VII *La Chronologie*, divisa in quattro parti, ivi, 1655, in-4. Vi tratta della divisione del tempo e dei differenti strumenti che servono a misurarlo; dei quadranti solari, meridiani, orologi, ec. VIII *Traité des influences célestes*, ivi, 1660, in-4. Vi combatte i principii dell'astrologia giudiziaria, scienza che aveva allora non pochi partigiani. IX *La jauge au pied du roi*, Parigi, 1690, in-12.

FRANKON, scolastico o teologale di Liegi, fioriva nel 1066. Era filosofo, matematico, astronomo e musico ragguardevolissimo, sebbene il suo gusto per le scienze non gl'impedisse di divenire ai sommo istrutto nelle Sacre Carte. Lasciò: I *Un libro sulla quadratura del circolo*: fu in tal lavoro ajutato da Falchalin, dotto monaco di S. Lorenzo di Liegi, e dedicò l'opera ad Ermanno, arcivescovo di Colonia; II *Trattato del computo ecclesiastico per trovare il giorno della Pasqua*; III *Trattato intorno ai giorni dei Quattro Tempi* (unitamente al medesimo Falchalin); IV Altri scritti *sulla sfera*, *sulla musica e sul canto fermo*.

FRAUNHOFER (Giuseppe), celebre ottico bavarese, nato nel 1787, a Straubing, da poveri genitori, divenne orfano all'età di undici anni. Fu posto come garzone in un'officina, ove il suo padrone considerava come un furto i minuti consacrati allo studio. Ad onta degli ostacoli che al suo desiderio d'imparare frapponevano i calcoli avari del suo principale, Fraunhofer giunse ad istruirsi senza maestri. Apprese a leggere, a scrivere, e molto s'inoltrò nello studio delle matematiche. In fine, conosciutesi le felici disposizioni del giovinetto, varie persone di distinzione, e fra le altre il re Massimiliano-Giuseppe, lo incoraggirono e gli somministrarono dei soccorsi. A venti anni fu ricevuto nel celebre stabilimento di strumenti di matematiche e di ottica creato da Reichenbach e Utzschneider. Procedè allora di successo in successo, per la sua abilità tanto nell'eseguire che nel dirigere e soprattutto nell'inventare si pose alla testa degli ottici i più illustri della Germania, crebbe infinitamente la fama e la fortuna dello stabilimento, e finì con divenirne il proprietario.

Ciò che assegna a Fraunhofer un posto distinto tra i suoi confratelli si è, che esso possedeva a fondo la esatta teoria di ciò che operava, che come matematico, come fisico, come astronomo, aveva estesissime cognizioni, che in fine ha fatto non poche scoperte ed ha ampliato i confini della scienza. L'Accademia di Monaco, l'Istituto astronomico di Edimburgo, l'Università di Erlangen, e parecchie altre dotte società lo annoveravano tra i suoi membri. La prima lo nominò nel 1822 conservatore del suo gabinetto di fisica. Il re di Baviera gli conferì l'ordine del merito civile, e dal re di Danimarca ricevette la decorazione dell'ordine di Danebrog. Finalmente pose il colmo alla sua gloria, terminando il bellissimo telescopio dell'università di Dorpat, al quale già l'astronomia è debitrice d'importanti verità, e che senza dubbio è destinato a rivelarne molte altre ancora. Fraunhofer morì ancor giovane nel 1826. Si hanno di lui diverse memorie inserite nelle *Astronomische Nachrichten* di Schumacher, e tra le altre le seguenti: I *Teorie degli aloni*, *dei parelj e di tutti i fenomeni analoghi*, *coll'appoggio di varie spiegazioni*; II *Nuova modificazione della luce*; III *Descrizione del gran telescopio diottrico di Dorpat*; IV *Determinazione della forza refrattiva e dispersiva delle differenti specie di vetri*. Le ultime due sono le più interessanti, e se ne trovano degli estratti nella *Bibliothèque universelle de Genève*, sezione delle scienze ed arti, tomo XXX. La descrizione del telescopio si trova nei n.i 74, 75 e 76 delle *Astronomische Nachrichten*. L'objettivo del telescopio è di vetro. Tutti quelli che hanno qualche leggera cognizione di fisica e di astronomia sanno quanto gli specchi metallici siano inferiori, per

le osservazioni astronomiche, e quelli di vetro: il metallo assorbisce una parte della luce incidente e non ne riflette che il resto; il vetro al contrario trasmette quasi interamente la luce incidente, e corregge inoltre l'aberrazione dei raggi prodotta dalla sfericità: di qui il vantaggio immenso dei cannocchiali diottrici di ordinarie dimensioni sui giganteschi telescopi catottrici della generazione che ci ha preceduto. Le dimensioni dell'objettivo di Dorpat sono di cent'otto linee di apertura, e di centosettantadue pollici di distanza focale. La lente è composta di due lastre, l'una di flint-glass e l'altra di crown-glass: la combinazione di queste due specie di vetri corregge non solo l'aberrazione di refrangibilità, ma anco l'aberrazione di sfericità mediante il diverso potere refrattivo. La quarta delle memorie da noi indicate contiene la descrizione delle sue ricerche, e i resultati delle sue esperienze sopra un soggetto della più alta importanza per la costruzione degli objettivi, soggetto appena avvertito dai suoi predecessori, cioè la determinazione dei poteri, refrattivo e dispersivo, delle sostanze che possono entrare in questa costruzione.

FRAZIONI (*Arit. e Alg.*). Specie particolare di *numeri*, che ordinariamente si considerano come le *parti* di un'unità determinata. Per esempio, prendendo per unità delle misure di peso l'antica libbra, peso di marco, la *metà* di questa libbra, il suo *terzo*, il suo *quarto*, ec., sono *frazioni della libbra*. Abbiamo veduto altrove (Algebra, n.° 12) l'origine di questi numeri, che nascono dal ramo inverso del secondo modo elementare della costruzione dei numeri; abbiamo egualmente veduto la maniera di esprimerli e le proprietà fondamentali che ad essi derivano dalla loro costruzione; qui dunque ci rimane soltanto da esporre alcune considerazioni particolari che sono loro proprie.

1. Siccome le frazioni non cangiano valore quando si moltiplicano o si dividono nel tempo stesso i loro due termini per lo stesso numero (Algebra, n.° 13, 3°), da ciò ne avviene che una frazione può essere espressa in infinite maniere differenti; così, per esempio, ognuna delle frazioni

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{14},\ \text{ec.}$$

esprime una sola e medesima quantità. L'espressione più semplice di una frazione è quella nella quale i numeri che formano il suo numeratore e il suo denominatore sono i più piccoli possibili; tale è $\frac{1}{2}$ nella serie di sopra riportata.

Ora, essendo data una frazione qualunque, il trovare l'espressione sua la più semplice costituisce il problema di *ridurre una frazione alla sua più semplice espressione*.

Indichiamo con $\frac{M}{N}$ una frazione qualunque suscettibile di riduzione, e con $\frac{a}{b}$ l'espressione più semplice di questa frazione; si avrà

$$\frac{M}{N}=\frac{a}{b},$$

donde si trarrà

$$Mb=Na,$$

eguaglianza che ci somministrerà le due seguenti relazioni

$$\frac{Na}{b}=M,\quad \frac{N}{b}=\frac{M}{a}.$$

La prima ci fa conoscere che N deve essere esattamente divisibile per b. Infatti, il quoziente di Na per b dovendo essere un numero intero M, ed a non essendo divisibile per b, perchè $\frac{a}{b}$ è una frazione ridotta alla sua più semplice espressione, bisogna necessariamente che N sia esattamente divisibile per b, affinchè lo sia anco il prodotto Na. La seconda relazione c'insegna che M deve esser pure divisibile esattamente per a, perchè il quoziente di M diviso per a deve essere eguale a quello di N diviso per b, che, dietro quanto abbiamo veduto, è un numero intero. Ciò posto, indichiamo questo quoziente con Q, e si avrà

$$N=bQ,\quad M=aQ,\quad e\quad \frac{M}{N}=\frac{a\,.\,Q}{b\,.\,Q}.$$

Così, per ridurre la frazione $\frac{M}{N}$ alla forma $\frac{a}{b}$, bisogna determinare il fattore Q comune a' suoi due termini, poichè dividendo ognuno di questi termini per questo fattore, si avrà evidentemente

$$\frac{M:Q}{N:Q}=\frac{a}{b}.$$

Ma questo fattore Q essendo necessariamente composto di tutti i fattori primi che si trovano simultaneamente in M e in N, il problema si riduce dunque in ultima analisi alla ricerca di questi fattori.

Abbiasi, per esempio, la frazione $\frac{135}{315}$, che si tratti di ridurre alla sua più semplice espressione. Esaminando i due numeri 135 e 315, si vede primieramenta che essi sono entrambi divisibili per 5 (*Vedi* FATTORE). Così, siccome questo fattore primo 5 non deve entrare nei termini della frazione ridotta, dividendo successivamente 135 e 315 per 5, si avrà per prima riduzione

$$\frac{135}{315}=\frac{27}{63}.$$

Esaminando nuovamente i numeri 27 e 63, si trova facilmente che sono ambedue divisibili per 9 (*Vedi* FATTORE), ed eseguendo la divisione si ottiene per seconda riduzione

$$\frac{27}{63}=\frac{3}{7},\ o\ \frac{135}{315}=\frac{3}{7}.$$

I numeri 3 e 7 essendo primi non hanno più fattori comuni, e se ne conclude che $\frac{3}{7}$ è la più semplice espressione della frazione proposta $\frac{135}{315}$.

Torniamo adesso ad osservare le diverse particolarità dell'operazione. Dalle decomposizioni precedenti risulta che 135 è formato dal prodotto dei tre fattori 3.5.9, e che 315 è formato dal prodotto dei tre fattori 7.5.9, vale a dire che questi numeri hanno per fattori comuni 5 e 9, e che sono per conseguenza divisibili l'uno e l'altro per 5 e per 9, ossia per 45 prodotto di 5 per 9. Si ha dunque

$$\frac{135}{315}=\frac{3\times45}{7\times45},$$

e se avessimo potuto trovare con un metodo spedito il numero 45, vale a dire il *massimo fattore comune* di 135 e di 315, avremmo ottenuto immediatamente la frazione ridotta $\frac{3}{7}$, dividendo 135 e 315 per questo massimo fattore comune. Così il metodo diretto, e fortunatamente il più facile, di ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, consiste nel cercare il massimo fattore comune, o, il che è lo stesso, il *massimo comun divisore* dei suoi due termini. Eseguendo quindi le divisioni, la frazione si trova ridotta.

L'operazione della ricerca del massimo comun divisore di due numeri è stata già esposta alla parola Comun divisore.

2. Quando una frazione irriducibile, vale a dire ridotta alla sua più semplice espressione, è espressa da numeri molto grandi, riesce spesso utile l'avere altre frazioni espresse da numeri minori, e il cui valore differisca da quello della proposta il meno possibile; si ottengono così delle approssimazioni sufficienti per gli usi ordinarj. Questo problema, considerato nella massima sua generalità, si risolve completamente mediante la trasformazione della frazione in *frazione continua*. *Vedi* Continuo.

Alla parola Circolo, n.° 41, abbiamo dato un esempio di queste riduzioni, di cui Huygens è stato il primo a fare uso nella costruzione del suo planetario.

Frazioni decimali (*Vedi* Decimali). Per le operazioni elementari che possono eseguirsi sulle frazioni tanto ordinarie che decimali si vedano le parole: Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione, Divisione, Estrazione delle radici, ed Elevazione alla potenza. Si veda pure Periodico.

Frazioni razionali. Si dà questo nome in algebra a qualunque funzione frazionaria della forma

$$\frac{A_1x^m+A_2x^n+A_3x^p+\text{ ec.}}{B_1x^{m'}+B_2x^{n'}+B_3x^{p'}+\text{ ec.}},$$

che non contenga che esponenti interi.

Il problema di decomporre tali frazioni in altre i cui denominatori siano più semplici, e che s'indicano col nome di *frazioni parziali*, si presenta spesso nel calcolo integrale. Non possiamo entrar qui nei dettagli che esso richiederebbe; si veda il *Traité élémentaire du calcul différentiel* di Lacroix, pag. 243 e segg. dell'edizione di Parigi, 1828. Leibnitz è il primo che abbia considerato simili decomposizioni, divenute poscia l'oggetto delle ricerche di Cotes, di Moivre, d'Eulero, di Simpson e di Lagrange. Eulero ha trattato particolarmente questa materia colla solita sua superiorità nel secondo capitolo della sua bell'opera: *Introductio in Analysin Infinitorum.*

FRECCIA (*Geom.*). In latino *sagitta*. Da alcuni autori è così chiamato il *senoverso* di un arco. Questo nome gli fu dato perchè rassomiglia ad una freccia

appoggiata sulla corda di un arco. Indicando con x il seno, il seno verso o freccia sarà espresso da $1-\sqrt{1-x^2}$.

Qualche volta in geometria si dice *freccia* ciò che comunemente intendesi per *ascissa*; ma questa denominazione è poco in uso.

FRECCIA (*Astron.*). Costellazione boreale situata sopra l' Aquila, e che comprende diciotto stelle nel catalogo di Flamsteed, tra le quali tre sono di quarta grandezza. Essa viene dagli autori indicata coi diversi nomi di *Sagitta Herculea*, *Telum*, *Jaculum*, *Canna*, *Arundo*, *Calamus*, *Virga*, *Missile*, *Vectis*, *Fossorium*, *Missor*, *Daemon*, *Temo meridianus*. Alcuni poeti dicono che sia la freccia di Amore, altri vogliono che sia quella con cui Ercole ferì Giunone e Plutone, e vi è chi pretende che sia quella che uccise l' avvoltojo che divorava Prometeo. Questa costellazione è diversa dalla Freccia di Antinoo, che unita all' arco forma una costellazione in Evelio.

FREGE (Cristiano), scrittore tedesco, nato a Zwichau il 15 Settembre 1759, fu successivamente pastore a Laas presso Oschatz nel 1788, a Striegnitz presso Lommatzsch nel 1800, a Zwichau nel 1805, divenne pastore emerito nel 1833, e morì il 23 Dicembre 1834. Ha pubblicato parecchi libri elementari, dei quali citeremo: I *Libro elementare di astronomia per le scuole popolari*, Zeitz, 1813; II *Libro elementare di geografia matematica per le scuole*, Zeitz, 1814. Si ha pure di lui un libro curioso intitolato: *La stella miracolosa della nascita del Salvatore*, Zeitz, 1812, ristampato nel 1818 col diverso titolo di *Cometa del 1759*. Frege, come facilmente può indovinarsi confrontando i due titoli dati successivamente all' opera, pretende che la cometa del 1759 sia quella stella miracolosa che guidò i re magi; ei la segue di secolo in secolo, cercando sempre di stabilire qualche analogia tra le osservazioni fatte dagli astronomi del secolo decimottavo e quelle delle altre epoche. Questo libro fece qualche romore, ma non persuase gli astronomi, sebbene Frege qualificasse il suo paradosso di *grande scoperta astronomica*.

FRENICLE DE BESSY, aritmetico francese del secolo decimosettimo, ed uno dei primi membri dell' Accademia delle Scienze di Parigi, deve la celebrità che ha acquistata piuttosto agli elogi dell' illustre Fermat e del dotto padre Mersenne, che al merito reale e all' utilità dei suoi lavori. Ciò non ostante bisogna riconoscere coi suoi contemporanei che aveva un' abilità superiore e tutta particolare nella scienza dei numeri, poichè è certo che colla sola sua aritmetica era in grado di risolvere problemi numerici che inutilmente aveano occupato le meditazioni di matematici sommi come Fermat, Cartesio, Roberval, Wallis. In quel tempo i geometri francesi e inglesi solevano farsi scambievoli disfide sopra quesiti numerici, e Frenicle col suo metodo aritmetico vinceva senza difficoltà i suoi rivali. Fermat, in una delle sue lettere, si esprimeva nei seguenti termini rapporto a lui: » Vi dichiaro ingenuamente che ammiro l' ingegno di Frenicle, che, » senz' algebra, si avanza tanto nella cognizione dei numeri; e ciò che a me » pare più maraviglioso è la speditezza delle sue operazioni ». Lo stesso Fermat in altra circostanza stimato avendo quasi insuperabile il nodo di una difficoltà, scriveva ad un amico: » Nulla vi ha che più difficile sia in tutta la matematica: » e, da Frenicle e forse da Cartesio in fuori, dubito che niuno ne conosca il se» greto. » E l' illustre geometra, al quale Fermat non assegnava che la seconda sede, Cartesio appunto, in una lettera diretta al padre Mersenne diceva, parlando di lui: » L' aritmatica sua deve essere eccellente, perchè conduce ad una » cosa, in cui l' analisi dura molta fatica a riuscire ». Tale metodo aritmetico fu per lungo tempo assai bramato dai geometri, e specialmente da Fermat che più di ogni altro sentiva il vantaggio che può dare all' ingegno una sola veduta

nuova in matematica. Quel gran geometra scrisse più volte al padre Mersenne perchè tentasse tutti i mezzi presso Frenicle per trargli di bocca il segreto, obbligandosi a riconoscere pubblicamente esso abile aritmetico per autore di sì prezioso metodo, a promettendo di risarcirlo col metterlo a parte di alcun' altra nuova invenzione. Frenicle, sempre impenetrabile, non rispondeva che col silenzio a tutte le proposizioni di tal fatta, e sembrava che nato fosse soltanto per essere il tormento dei geometri. Il suo rifiuto riusciva loro tanto più crudele, in quanto che gli esponeva all' umiliazione di vedersi vinti da un avversario, che il più delle volte non aveva sopra di essi che il vantaggio di un semplice metodo aritmetico. Finalmente il segreto tanto desiderato si trovò, alla morte dell' autore, tra le sue carte. Esso non consiste in certo modo che nell'andare a tentone, ed ha preso il nome di *Metodo di esclusione*, perchè realmente non giunge al risultato cercato che escludendo i numeri che non hanno le proprietà richieste. Leibnitz parla di un metodo pressochè simile, ideato da Pell, geometra inglese, e che presentava conseguenze notabili. Del resto, daechè l'analisi indeterminata pei lavori di Eulero, di Lagrange, di Gauss, di Legendre e di altri si è perfezionata, tale metodo ingegnoso non è divenuto che un oggetto di curiosità. Frenicle ne rese l' applicazione più facile con proposizioni ausiliarie, di cui quelle di più rilievo, trovate dapprima per induzione, vennero in seguito dimostrate da Lagrange e da Eulero.

Frenicle ha composto ancora un *Traité des triangles rectangles en nombres*, di cui la prima edizione uscì alla luce nel 1676, in-12, e la seconda nel 1677, in seguito ai problemi di architettura di Blondel. In questo trattato si trovano notate parecchie curiose proposizioni sulle qualità costitutive dei triangoli: per esempio, Frenicle vi dimostra che non vi è nessun triangolo rettangolo in numeri interi, la di cui area sia un quadrato o un doppio quadrato. A tale trattato ne precede un altro sopra le combinazioni: ma dove Frenicle fece ancora prova di molta sagacità è nel suo *Traité des carrés magiques*. Vengono così chiamati dei quadrati composti di una certa quantità di numeri disposti in modo che tutti quelli che stanno in una medesima linea parallela ad uno dei lati, o che si trovano sopra una diagonale, formino sempre la medesima somma. L'invenzione dei quadrati magici risale al secolo XIV, in cui gli empirici, confusi coi dotti, approfittavano dell' ignoranza dei popoli onde comporre talismani, dietro a virtù segrete che si attribuivano ai numeri. Frenicle nell'opera sua insegna a costruire i prefati quadrati, e supera in tale arte tutti i suoi predecessori. Alcuni matematici cercando come formare si potessero quadrati magici coi 16 primi numeri della nostra scala aritmetica, non avevano potuto trovare al più che 16 disposizioni differenti. Frenicle dimostrò che potevano farsene 880, ed ebbe la pazienza di calcolarle tutte. E non ancora pago di ciò, aggiunse al problema una nuova difficoltà, introducendo l' altra condizione, che tolte le bande estrame che stanno intorno al quadrato, quello che rimane sia pure un quadrato magico; e i quadrati che soddisfanno a tal nuova condizione sono stati detti per ammirazione da alcuni matematici, *quadrati magicamente magici*. Non debbesi però giudicare delle matematiche da tali vani quesiti, che a fronte dell'analisi de' nostri grandi geometri sono la stessa cosa che gli acrostici e le rime obbligate rispetto alla bella poesia.

Le opere di Frenicle di sopra citate vennero riunite da Lahire nel tomo V delle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze. Rincresce però che in tale raccolta non trovisi il *Trattato dei numeri primi* di Frenicle, opera inedita, la quale alla sua morte passò nelle mani dell' abate Picard, del pari che un *Trattato dei numeri poligoni* dello stesso autore. Picard gli conservò lungo tempo nell' Osservatorio con gli altri scritti di cui abbiamo fatto menzione, e li consegnò a

Lahire, quando questi ottenne un ordine dal re di fare stampare a spese del governo gli scritti più originali degli accademici. Freniele fu uno di quelli che più si occuparono della causa dell'attrazione, quando il sistema di Newton era ancor nuovo: considerava tale fenomeno come provveniente da un istinto particolare a ciascuna particella materiale, il quale faceva sì che essa cercasse di riunirsi al corpo dal quale era stata separata. Frenicle, che era nato a Parigi nei primi anni del secolo decimosettimo, venne ammesso nell'Accademia delle Scienze nel 1666 e morì nel 1675. Condorcet lesse il suo elogio.

FREZIER (Amadeo Francesco), ingegnere, nato a Chamberì nel 1682. Destinato era al foro, ma la sua avversione per tale professione fece che non rondiscendesse al voto dei suoi genitori. Entrò nella fanteria francese nel 1700, ed approfittò dei progressi che aveva fatto nella scienze per ottenere un impiego nel corpo degli ingegneri nel 1707. In esso trovossi nel vero suo centro, e potè in breve dar prova de'suoi talenti. Ricevè dal governo parecchi incarichi importanti, e a tutti soddisfece con rara abilità: fu fatto nel 1719 ingegnere superiore a san Domingo, quindi passò ad altri impieghi, e per ultimo divenne direttore delle fortificazioni di Bretagna nel 1740. Chiese ed ottenne nel 1764 di ritirarsi, e morì a Brest ai 26 Ottobre 1773, in età di 92 anni. Le opere principali di Frezier sono: I *La théorie et pratique de la coupe des pierres et des bois, ou Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*, Strasburgo, 1737-39, 3 vol. in-8, con 114 stampe: opera moltissimo stimata, più erudita e più comoda di di quella di La Rue. Tale edizione, stampata mentre l'autore era assente, è piena di errori tipografici: l'*Errata* del tomo II è di quasi cinque pagine. La ristampa di Parigi del 1769 è preferibile. II *Éléments de stéréotomie à l'usage de l'architecture pour la coupe des pierres*, Parigi, 1759, 1760, in-8: è un compendio dell'opera precedente, in cui l'autore tolse quanto è relativo alla sola pratica.

FRISI (Paolo), uno dei più chiari ingegni italiani dello scorso secolo, nacque a Milano il 13 Aprile 1728, ed ivi morì il 22 Novembre 1784. Entrato in età di 15 anni nella congregazione de'chierici di S. Paolo detti barnabiti, applicossi da sè solo, senza maestri e col solo soccorso di alcuni libri, alla geometria, nella quale fece rapidi e sorprendenti progressi. Tale scienza però era tenuta in nessun conto dai barnabiti, che, poco apprezzando le felici disposizioni del giovine Frisi, lo mandarono a Pavia a studiare la teologia. Ma ormai la sua vocazione era fissata: le matematiche dovevano formare la principale occupazione delle sue veglie, ed ei non dovette che alla pieghevolezza del suo ingegno e ad una squisita attitudine e facilità a riuscire in ogni sorta di studi, se distinguere si face nelle discipline teologiche e filosofiche. In breve fu inviato a insegnare la filosofia a Lodi, e non aveva ancora ventidue anni, quando addomesticato già coi principj di Newton tolse a scrivere quella famosa dissertazione *Sulla figura della terra*, per cui venne subito considerato come uno dei più abili matematici dal suo tempo. Egli però non aveva allora mezzi per stamparla, e i barnabiti non erano disposti a giovarli in siffatta cosa: il conte Donato Silva, avuta contezza della circostanza, fece l'edizione a sue spese. I superiori del Frisi, attoniti della considerazione e della fama in che egli tosto salì, non gli opposero più ostacolo nessuno ne'suoi studj; anzi nacque tra i suoi confratelli tanto dasio della medesima gloria, che la loro casa di Milano divenne in seguito un semenzaio di matematici.

Da Lodi passò il Frisi ad insegnare la filosofia a Casale, quindi a Novara, e finalmente a Milano nel gran collegio de' barnabiti detto di S. Alessandro. Intanto l'Accademia delle Scienze di Parigi, che aveva dovuto apprezzare la dissertazione del Frisi, lo elesse suo socio corrispondente nel 1753, e molte altre

dotte società si disponevano ad onorarlo nello stesso modo, allorchè vide la sua dissertazione attaccata dallo scritto di un gesuita, il quale la stimava meramente ipotetica, in niuna guisa concludente, e rimproverava all'autore che facesse degenerare l'antica gloria dell'Italia dotta coll'ammissione dei sistemi inglesi e francesi, e che fosse invasato dalla mania di sostenere le idee inglesi. Il Frisi replicò vittoriosamente dicendo e provando come tale avversario non era abbastanza geometra per comprenderlo e meno ancora per criticarlo.

Frattanto era entrato in relazione coi dotti più ragguardevoli italiani e stranieri, riceveva spesse visite, e frequentava le migliori società: da ciò tolsero motivo i suoi nemici per accusarlo di non condurre una vita strettamente conforme alle regole monastiche; ed egli prevedendo che potesse esser questo un pretesto per promuovergli delle persecuzioni e toglierli la sua libertà, cercò di procacciarsi una cattedra sotto un principe straniero, ed ottenne infatti nel 1756 da Pietro Leopoldo granduca di Toscana il grado e lo stipendio di professore nell'università di Pisa. Ei lo fu per otto anni, durante i quali cominciò a formarsi una piccola fortuna cogli onorarj dell'impiego, di cui il primo semestre pagato in anticipazione era il primo denaro che toccava; uni ad esso i premj che riportati aveva in varie Accademie, cioè, nel 1756, in quelle di Berlino e di Pietroburgo, e, nel 1758, in quella di Parigi. Era socio di quella di Pietroburgo e della Società Reale di Londra dal 1756 in poi. Lo divenne nel 1758 dell'Accademia di Berlino. L'Istituto di Bologna lo annoverava da alcuni anni tra i suoi membri: nel 1766 venne aggregato all'Accademia di Stockholm, e nel 1770 a quelle Copenaghen e di Berna. L'arciduca Giuseppe, poscia imperatore, gli mandò nel 1759 una collana con medaglia d'oro; il re di Prussia e quello di Danimarca gli fecero doni del medesimo genere. Il papa Clemente XIII generosamente rimunerò i suoi consigli ed i lavori fatti nella commissione che in tempo del suo viaggio a Napoli e a Roma, nel 1760, data gli aveva di esaminare sui luoghi i motivi di una viva contesa che esisteva tra i Ferraresi e i Bolognesi, relativamente al corso di alcuni fiumi e torrenti. Il senato di Venezia si mostrò grato in egual maniera per l'utilità di che il Frisi riuscì ai commissarj incaricati di riparare ai guasti della Brenta. L'imperatrice Maria Teresa in fine gli assegnò un'annua pensione di cento zecchini.

Nel 1764, fu richiamato in patria, essendogli stata conferita la cattedra di matematiche nelle *Scuole palatine* con onorarj eguali a quelli che aveva a Pisa. Grandissima era divenuta la sua reputazione, o da tutte le parti veniva consultato nelle difficoltà che frequentemente insorgevano intorno ai canali di navigazione, circa i mezzi di prevenire i danni provenienti dallo straripamento dei fiumi, e sopra altri oggetti relativi all'idraulica. La sua infaticabile attività sapeva riparare ai moltiplici incarichi che gli venivano affidati, disimpegnava con assiduità le incombenze della sua cattedra, e trovare sapeva il tempo per comporre opere profonde e importanti memorie che nuovo lustro accrescevano al suo nome. Due anni dopo avere assunto l'insegnamento delle *Scuole palatine*, volle visitare la Francia e l'Inghilterra, ove fu accolto dai dotti con grandissimo onore. Il ministro di Portogallo alla corte di Parigi fece quanto potè per indurlo a passare a Lisbona, onde secondare le mire del marchese di Pombal, che stava occupandosi del ristabilimento degli studj; ma il Frisi non volle rinunziare alla patria. Nel 1768 fece un viaggio a Vienna, ove i cortigiani, gli uomini di stato, e principalmente il principe di Kaunitz lo colmarono di contrassegni di stima, e lo consultarono sopra affari della più alta importanza.

Tornato a Milano, abitò ancora per alcun tempo, ma senza essere assoggettato a niuna regola monastica, nel collegio barnabita di S. Alessandro: ma determinatosi per alcune disposizioni della pubblica amministrazione ad alloggiare altrove,

andò a dimorare in seno dalla sua famiglia; e il papa Pio VI gli permise di vestire l'abito di prete secolare, togliendolo affatto dal dominio dei monaci. Appassionato per la gloria dell'Italia, pose costantemente ogni studio per attirare su di essa gli sguardi dell'Europa, inviando ai dotti stranieri le opere più ragguardevoli che di mano in mano vi si andavano pubblicando: nè sarà inotile di ricordar qui che il primo esemplare del celebre trattato *Dei delitti e delle pene* di Beccaria entrato in Francia fu quello che il Frisi mandò a d'Alembert. Fece conoscere ai suoi compatriotti i para-fulmini, e procurò che uno ne fosse collocato sugli archivi del governo. Nel 1778 volle vedere la Svizzera, ed ivi concepì l'idea del trattato *Dei fiumi sotterranei*, cui compose al suo ritorno, e pubblicò con altre dissertazioni col titolo di *Opuscoli filosofici*. Finalmente, dopo essere vissuto fino a 48 anni senza provare alcuna malattia, sentì i primi dolori di una fistola emorroidale, per cui otto anni dopo si rese necessaria una crudele operazione, in conseguenza della quale morì nel momento in cui l'Accademia delle Scienze di Parigi stava per annoverarlo fra gli otto suoi socj stranieri, e quella di Harlem accordato gli aveva il premio meritato per la sua memoria sopra le ineguaglianze dei satelliti di Giove. Il conte Verri scrisse il suo elogio col titolo di *Memorie appartenenti alla vita e agli studj del sig. don Paolo Frisi*, Milano, 1787, in-4, e ne dedicò l'edizione a Condorcet.

Le opere principali di Paolo Frisi sono le seguenti: I *Disquisitio mathematica in caussam physicam figurae et magnitudinis telluris nostrae*, Milano, 1751; egli dimostra in essa in modo nuovo e più stringente ancora di quello di Newton, che la terra è una sferoide schiacciata verso i poli; II *Estratto del capo quarto del quinto volume della storia letteraria d'Italia, con varie osservazioni*, Milano, 1753; è una risposta alle objezioni fatte in essa opera contro alcune proposizioni della dissertazione precedente; III *De motu diurno terrae dissertatio, quae a regia berolinensi scientiarum academia praemium anno 1755, tum rursus anno 1756 propositum obtinuit*, Pisa, 1758; IV *Dissertationes selectae Jo. Alberti Euleri, Pauli Frisii et Laurentii Besaud, quae ad imperialem petropolitanam academiam anno 1755 missae sunt, cum electricitatis caussa et theoria praemio proposito quaereretur*, Lucca, 1757; V *Nova electricitatis theoria*, Milano, 1755; VI *De atmosphaera coelestium corporum*; nel tom. I delle *Dissertationes variae*, Lucca, 1760; VII *De inaequalitatibus motus planetorum omnium*, nel tom. II della stessa raccolta, ivi, 1761; VIII *Piano de' lavori da farsi per liberare e assicurare dalle acque le provincie di Bologna, di Ferrara e di Ravenno, con varie annotazioni e riflessioni*, ivi, 1761; IX *Del modo di regolare i fiumi e i torrenti principalmente del Bolognese e della Romagna, libri tre*; quattro edizioni, cioè: in Lucca nel 1762 e nel 1768, la terza con aggiunte e col trattato de' canali navigabili in Firenze nel 1770, e la quarta in Parma nella raccolta degli scrittori *delle acque*. Sulla terza edizione venne eseguita una traduzione francese pubblicata a Parigi nel 1774. X *Lettre du P. Frisi à M. d'Alembert*, Parigi, 1767; XI *De gravitate universali libri tres*, Milano, 1768. D'Alembert e Bezout nel presentare un ragguaglio di tale opera all'Accademia delle Scienze di Parigi, dissero: » che essa conteneva idee nuove, e che vi erano degli oggetti trattati in modo affatto nuovo. » L'autore parla in essa accidentalmente di parecchi punti astronomici, correggendo ancora alcune inesattezze di Newton, la qual cosa fece dire a Bernoulli che essa opera era » una delle più profonde e più utili che vi fossero intorno all'astronomia. » (*Raccolta per gli astronomi*, tom. II, pag. 205), e a Bailly » che era la sola in cui fosse il sistema del mondo stato rischiarato in tutte le » sue parti » (*Histoire de l'astronomie moderne*, tom. III, pag. 208). XII *Danielis Melandri et Pauli Frisii alterius ad alterum de theoria lunae com-*

mentarii, Parma, 1769; XIII *Cosmographiae physicae et mathematicae*, ec. Milano, 1774-75, 2 vol. in-4: quest' opera è stimata il capo-lavoro di Frisi; XIV *Dell' architettura statica e idraulica*, Milano, 1777; XV *Opuscoli filosofici*, Milano, 1781; si tratta in essi delle influenze metereologiche della luna, dei conduttori elettrici, dell'azione dell' olio sull' acqua, del calore superficiale e centrale della terra e de' fiumi sotterranei; XVI *Pauli Frisii operum*, tom. I, *Algebram et geometriam analyticam continens*, Milano, 1782; e tom. II, *Mechanicam universam et mechanicae applicationem ad aquarum fluentium theoriam*, ivi, 1783. Il tom. III, che tratta della cosmografia, fu pubblicato dopo la morte del Frisi. XVII *Lettera di risposta a Daniele Melander sul passaggio di Venere sotto il sole*; XVIII Gli elogi di Galileo Galilei, di Bonaventura Cavalieri, d'Isacco Newton e di d'Alembert. XIX Parecchie memorie inserite negli Atti delle Accademie di Bologna e di Siena. Il Frisi lasciò pure non poche opere manoscritte, tra le quali noteremo: 1.° *Elementa algebrae cartesianae introductionis loco ad analysim clarissimi Bougainvillii conscripta*; 2.° *Istituzioni meccaniche, ossia introduzione al primo libro della gravità universale de' corpi*; 3.° *Istituzioni d' idrodinamica, ossia introduzione al trattato dei fiumi e de' torrenti, e all'opera del Guglielmini sulla natura de' fiumi*; 4.° *Institutiones hydraulicae*, con un piccolo trattato sul modo di livellare; 5.° e finalmente un gran numero di dissertazioni sopra diverse materie, come sull' ineguaglianze dei satelliti di Giove, sulla pretesa influenza della luna, sulla navigazione di parecchi canali e riviere, sul modo di riparare i guasti dei fiumi, sull' osservatorio di Brera, ec.

FROBES (Giovanni Niccola), professore di metafisica nell' università di Helmstadt, e dotto matematico tedesco, nato nel 1701 a Golsmar, e morto nel 1756. Delle molte sue opere non citeremo che le seguenti, siccome quelle che trattano di argomenti analoghi alla natura di questo Dizionario: I *Nova et antiqua luminis atque aurorae borealis spectacula*, Helmstadt, 1739, in-4: nella prefazione annunzia un trattato compiuto sulle *aurore boreali*, che però non ha veduto la luce; II *Mathematicorum helmstadensium memoriae*, ivi 1745-47, 2 parti in-4; saggio importante di una raccolta che non venne continuata; III *Bibliographia selenographorum, exegetica et critica*, ivi, 1748, 6 parti, in-4; è il catalogo di tutti gli autori che hanno scritto intorno alla luna. Frobes nella sua prefazione dimostra la necessità di una bibliografia fisica e matematica; IV *Historica et dogmatica ad mathesin introductio, qua succincta matheseos historia cum coeteris ejus praecognitis continetur*, ivi, 1750, in-4, di 190 pagine: altro saggio che non ebbe continuazione; V *Recensus heliographorum*, ivi, 1753, in 4, di 32 pagine: è un catalogo diffusissimo degli autori che trattarono del sole e delle sue macchie; VI *Encyclopaediae mathematicae memorialis*, ivi, 1743-46, 6 parti, in-8; VII *Rudimenta biographiae mathematicae*, ivi, 1751-54-55, 3 parti, in-4, di 108 pagine. La prima parte tratta dei matematici che precedettero Talete di Mileto; la seconda di Talete e de' suoi contemporanei; l' ultima de' matematici della Magna-Grecia, che precederono Euclide.

FROELICH (David), dotto matematico ungherese, ha pubblicato un' opera intitolata: *Hemerologium in computum ecclesiasticum, sive Calendarium perpetuum*, Barthfeld, 1644, in-4.

FROIDMOND o FROMONT (Liberto), in latino *Fromundus*, dottore in teologia, e valente matematico, nato nel 1587, in Hackoer sulla Mosa tra Liegi e Maestricht, e morto nel 1653, ha lasciato parecchie opere, e tra le altre le appresso: I *Dissertatio de cometa anni* 1618; II *Meteorologicorum libri VI*.

FROMOND (Giovanni Claudio), fisico e matematico, nato a Cremona il 4 Febbrajo 1703, entrò in età di quindici anni nell' ordine dei camaldolensi, e vi si fece in breve distinguere per prontezza d' ingegno e per assiduità straordinaria

allo studio. Mandato dai suoi superiori all' università di Pisa, si applicò alle matematiche per consiglio e sotto la direzione del padre Grandi, e tali furono i progressi che fece in queste scienze, che essendo stato obbligato il Grandi ad assentarsi per alcun tempo dalla cattedra, fu in grado il Fromond di supplirlo nelle lezioni. Non molto dopo gli fu conferita la cattedra di logica nella stessa università, ed in fine passò a quella di filosofia. Il Fromond, che era membro di molte Accademie d' Italia, e socio corrispondente di quella delle Scienze di Parigi, morì a Pisa il 29 Aprile 1765. L' abate Bianchi, professore di morale in Cremona, pubblicò un *Elogio storico del P. D. Giovanni Claudio Fromond, pubblico professore nell' università di Pisa*, Cremona, 1781, in-4. Gli scritti suoi principali sono: I *Due lettere sopra l' ottico del P. Castel*: tali lettere, scritte in difesa di Newton, inserite furono senza nome di autore dal Lami nelle *Novelle letterarie di Firenze*, nel 1744; II *Trattato dello fluidità dei corpi*, Livorno, 1754; III *Examen in praecipua mechanicae principia*, Pisa, 1758; IV *De ratione philosophica, quo instrumento mechanico generatim potentiarum actionibus corroborandis vel enervandis*, ec. Pisa, 1759.

FRULLANI (Giuliano), nato nel 1795 a Livorno ove suo padre, Leonardo, era auditore, fu condotto ancor giovane a Firenze quando suo padre fu fatto presidente della Consulta. Dotato dalla natura delle più rare disposizioni allo studio, ebbe a primo maestro nelle scienze matematiche il prof. Pieraccinoli, che era stato ospite in casa Frullani. Terminati gli studj elementari, si recò all' università di Pisa, ove sotto i professori Paoli e Gerbi fece rapidi progressi; ed allorchè il governo francese instituì in quella città una scuola normale sulle stesse basi di quella di Parigi, il Frullani vi fu ammesso, e in età di diciassette anni divenne ripetitore di matematiche. Nel 1815, al ritorno del granduca Ferdinando III, occupò nell' università di Pisa la cattedra di matematiche lasciata vacante dal Paoli, che era stato chiamato alla soprintendenza degli studj in Toscana; e nell' anno seguente, fu nominato membro della Società Italiana dei quaranta per le profonde sue *Ricerche* sulle serie e sull' integrazione delle equazioni di differenti gradi. Incaricato dal governo di varie importanti incombenze, seppe sì bene adempirle e corrispose tanto alla fiducia che in lui erasi avuta, che meritò in fine di essere nominato direttore generale della conservazione del catasto e dell' ufizio dei ponti e strade. Dovette allora rinunziare all' insegnamento per venire ad abitare a Firenze nella qual città morì a dì 25 Maggio 1834. Oltre alcuni manoscritti sul catasto, ha lasciato cinque *Memorie* sopra argomenti di matematiche nella *Raccolta* della Società Italiana nei tomi XVIII, XIX e XX. Il Rosini, professore nell' università di Pisa ha pubblicato il suo *Elogio*, Pisa, 1835, in-8.

FRUSTO (*Geom.*). Parola derivante dal latino, della quale si sono serviti alcuni autori per indicare ciò che noi esprimiamo col vocabolo *tronco*: così hanno essi chiamato *frusto di cono*, *di piramide*, ec. ciò che si dice comunemente *tronco di cono*, *di piramide*, ec.

FULIGATTI (Giulio), gesuita italiano, nato a Cesena nel 1549 e morto nel 1633. È autore di un trattato *Degli horiuoli a sole*, Ferrara, 1616, in-4.

FULTON (Roberto), celebre meccanico moderno, nato in America nella contea di Lancastre, che fa parte dello stato di Pensilvania. Apparteneva ad una famiglia povera che non potè dare alla sua educazione tutta quella perfezione che l' intelligenza sua viva e precoce avrebbe richiesto. Apprese dapprima a Filadelfia l' arte del giojelliere; venne quindi a Londra, ove si diede alla pittura; e finalmente si recò a Parigi, ove potè fare degli studj conformi ai talenti dei quali avealo la natura dotato per la meccanica. Non ci proponiamo in questa notizia biografica nè di seguirlo nelle vicissitudini della sua vita, nè di dare una minuta esposizione dei suoi lavori come meccanico; noi abbiamo pensato che

Fulton appartenesse alla storia della scienza, se non come inventore, almeno come il primo e il più felice propagatore della navigazione a vapore. È da notarsi che il primo *Steam-boat*, o battello a vapore, è stato costrutto sotto la direzione di Fulton a Parigi, e provato sulla Senna. Nessuno conobbe allora l'importanza e l'utilità di questa potente invenzione, che deve immortalare il nome di Fulton. Pure la condizione di questa Francia, che va sì superba de' suoi lumi e della sua civiltà, è stata sempre quella di non apprezzare le produzioni dell'ingegno che quando gli applausi del mondo intero sono venuti a farle conoscere che essa aveva disprezzato una gloria cui gli offriva uno de' suoi figli o qualche credulo straniero, che sulla fiducia della sua civiltà ospitale e illuminata, erasi presentato a farleone omaggio. La scoperta di Fulton fu accolta nella sua patria con una specie di entusiasmo, e non ha poco contribuito a farvi nascere quella inaudita prosperità che i vecchi stati d'Europa, toltane l'industriosa Inghilterra, invidiano indarno alla confederazione americana. Attribuendo a Fulton l'invenzione dei battelli a vapori, non ignoriamo che si è preteso di disputargliene la gloria, e che i Francesi hanno potuto con giustizia reclamarne il primo pensiero. Ma quale importanza l'amor proprio nazionale può egli mettere nel reclamare la priorità di un'invenzione, che nessun francese ha potuto trovare il modo di ridurre in pratica in Francia, e che è stata sdegnata quando uno straniero è venuto nel seno stesso dalla capitale a dimostrarne la potenza e i vantaggi...? D'altronde, anche oggigiorno che i battelli a vapore solcano i mari in tutti i sensi, e che questo mezzo prodigioso di navigazione ha stabilito relazioni sì frequenti e sì vantaggiose tra i punti opposti dei più vasti imperi, non si contano i bastimenti francesi costruiti in questo sistema? Gli apologisti malavveduti della Francia farebbero molto meglio per la sua dignità e per la sua gloria se, invece di reclamare a di lei favore il vantaggio delle date e dei nomi di uomini, le dicessero che, chiamata dalla Provvidenza a grandi destini, essa distrugge da sè stessa il suo glorioso avvenire non seguendo che da luogi le nazioni illuminate nella carriera del progresso e delle scoperte. Fulton morì a Nuova-York il 24 Febbrajo 1815. La sua spoglia mortale fu seguita dalle dotte società e da tutto il popolo di quella città che portò il lutto per trenta giorni. Oltre la grande invenzione dei battelli a vapore, devesi a Fulton un mulino per segare e pulire i marmi, un nuovo sistema di canali di navigazione, una macchina per far corde, un battello per navigare sotto acqua, ed una macchina, ch'ei chiama *torpedo*, per far saltare in aria un vascello qualunque. Le notizie più dettagliate su questo meccanico e sopra i suoi lavori si leggono nell'articolo che lo riguarda nella *Biografia universale*.

FUNCK (Giovanni Gaspare), nato ad Ulma nel 1680, divise il suo tempo tra lo studio della teologia e quello delle scienze esatte, nelle quali divenne sì profondo che gli fu conferita la cattedra di matematica nel collegio della città nativa. Si hanno di lui i seguenti scritti: I *De coloribus coeli; accedit oratio inauguralis de Deo, mathematicorum principe*, Ulma, 1716, in-8; Il Un numero grande di dissertazioni accademiche sopra diversi soggetti di fisica e di astronomia: *De quodam phoenomeno antliae pneumaticae*; *De incolis planetarum*; *De horologiis*. Morì a' 2 Febbrajo 1729.

FUNCK (Giorgio), astronomo tedesco, è autore di un'opera intitolata: *De galactia seu circulo lacteo*, Rostock, 1686, in-4.

FUNICOLARE (*Mecc.*). Si chiama *macchina funicolare* un sistema di corde per mezzo delle quali più potenze e più resistenze si fanno scambievolmente equilibrio. Questa macchina si considera come la più semplice di tutte le macchine elementari.

Si trovano la leggi dell'equilibrio in questa macchina riducendo da una parte

tutte le potenze ad una sola mediante il principio della *composizione delle forze* (*Vedi* FORZA), e dall' altra tutte le resistenze parimente ad una sola, in forza del principio medesimo. Si giunge così a non considerar più che due potenze uniche, le quali debbono essere eguali e direttamente opposte, perchè possano farsi equilibrio. Si veda la **Meccanica** di Poisson e la **Statica** di Poinsot.

FUNZIONE (*Alg.*). Si chiama in generale *funzione di una o di più quantità variabili*, qualunque espressione algebrica composta, in un modo qualunque, di queste medesime variabili e di quantità costanti. Per esempio x, y, ec., indicando quantità variabili, e a, b, c, ec. quantità costanti, le espressioni

$$ax,\quad ax^2+b,\quad \sqrt{ax+b+c^2},$$

$$(ax+b)^2+cx,\quad \frac{a}{b}\cdot x^m+cx^m,\ \text{ec.}$$

sono tutte *funzioni* di x; e

$$ax+y,\quad \sqrt{x^2+y^2},\quad \sqrt{ax-y^2+by},\ \text{ec.}$$

funzioni di x e di y, ec.

1. Si dividono comunemente le funzioni in *algebriche* e *trascendenti*. Le prime si formano con le operazioni elementari dell' algebra; le seconde contengono inoltre delle quantità trascendenti, vale a dire delle *quantità esponenziali*, dei *seni*, dei *logaritmi*, delle *differenziali*, ec. Così l' espressione

$$\frac{a+bx^m-c\sqrt[n]{(2x+x^2)}}{a^2x-3bx^2},$$

è una *funzione algebrica* di x, e l' espressioni a^x+b, $ax^mdx+bdx$, sen $x+ax$, a Log. $x+bx$ sono *funzioni trascendenti* di x.

2. Le funzioni algebriche si suddividono in *funzioni razionali* e in *funzioni irrazionali*. Le funzioni razionali son quelle le quali non contengono che potenze intere della variabile; le funzioni irrazionali son quelle in cui la variabile è affetta dal segno radicale. Per esempio, le espressioni $a+x$, $\frac{a^2+x^2}{a-x}$, ax^3-bx^4, ec., sono funzioni razionali; e $\sqrt{x}$, $a+\sqrt{(a^2-x^2)}$, $\sqrt{(a+bx-cx^2)}$, ec., sono funzioni irrazionali.

3. Le funzioni razionali si suddividono ancora in *funzioni intere* e in *funzioni frazionarie*. Si chiamano *funzioni intere* quelle le quali non contengono che potenze intere e positive della variabile e nelle quali questa variabile non si trova mescolata con alcun denominatore. Le funzioni frazionarie sono quelle nelle quali ha luogo il contrario; così la formula

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ \text{ec.},$$

rappresenterà una funzione qualunque *intera*, e la formula

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ \text{ec.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\ \text{ec.}},$$

una funzione qualunque *frazionaria*, qualunque siano d' altra parte le costanti

a, b, c, α, β, γ, ec., positive o negative, intere o frazionarie, razionali o irrazionali, e ancora trascendenti.

4. Osservando che il valore di una funzione qualonque della variabile x dipende dal valore che si attribuisce a questa variabile, si può considerare la funzione essa stessa come una quantità variabile. Per esempio la funzione $ax+b$ diviene successivamente

$$a+b,\quad 2a+b,\quad 3a+b,\ 4a+b,\quad \text{ec.},$$

facendo $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, ec. Così indicando generalmente con y, questa quantità variabile $ax+b$, avremo l'equazione

$$y=ax+b,$$

nella quale y, o la funzione di x, si dirà una *variabile dipendente*, nel mentre che x è la *variabile indipendente*.

5. Allorquando si rappresenta con y una funzione qualunque di x, siccome niente impedisce di considerare questa quantità y come una variabile indipendente, e che, qualunque sia il valore che si voglia attribuirgli, ne risulta necessariamente un valore determinato per x, si può dunque sempre, reciprocamente, considerare x come una funzione di y. Per esempio, y essendo come sopra la funzione $ax+b$, se si risolve rapporto ad x, l'equazione

$$y=ax+b,$$

si trova

$$x=\frac{y-b}{a}$$

e l'espressione $\frac{y-b}{a}$, o x, si chiama allora *funzione reciproca* di y.

6. Se è sempre facile ottenere il valore di una funzione intera corrispondente ad un valore determinato della variabile, non lo è egualmente quando la funzione è irrazionale o trascendente; e nel maggior numero dei casi siamo forzati di ricorrere a processi di trasformazione che non possiamo esporre in questo punto. (*Vedi* l'Introduzione all' analisi degli infinitamente piccoli di Eulero). Ma il gran mezzo, conosciuto dai geometri, per valutare qualunque specie di funzioni, è quello di ottenere per mezzo delle serie una nuova generazione delle quantità che esse rappresentano, il che si chiama sviluppare una funzione in serie; questo problema è al giorno d' oggi risoluto completamente con i processi del calcolo differenziale, e dobbiamo rinviare agli articoli di questo Dizionario che ne trattano (*Vedi* Differenziale, e Serie), facendo però osservare che esistono ancora altri algoritmi capaci di dare una soluzione esatta, e alcune volte più soddisfacente della questione di quella che si ottiene per mezzo delle Serie. *Vedi* Tecnia.

Teoria delle Funzioni analitiche. Ottenere tutti i risultamenti del calcolo differenziale senza aver ricorso ad alcuna quantità infinitamente piccola o evanescente, determinare i veri principii di questo calcolo, tale è il doppio problema del quale il nostro celebre Lagrange ha creduto di dare la soluzione nelle sue opere sopra la *Teoria* e il *calcolo delle funzioni analitiche*. (Vedi *Teoria delle funzioni analitiche*, e *Lezioni sul calcolo delle funzioni*).

Abbiamo digià in diversi articoli di questo Dizionario avuta l'occasione di opporci contro l'estranea pretensione dei moderni geometri nel volere bandire dalla

scienza l' idea dell' *infinito* senza la quale essa non esisterebbe, e in questo punto potremmo contentarci di dichiarare, appoggiandoci sopra i principii esposti alla parola Differenziale, che, considerata sotto il rapporto metafisico, la Teoria del Lagrange è un vero controsenso filosofico; ma gli eminenti servigi che questo gran matematico ha reso alla scienza, la natura medesima degli errori nei quali esso è caduto, e soprattutto la polemica singolare di cui questi errori sono stati l' oggetto tra l' Istituto di Francia e l' autore della *Filosofia delle matematiche*, ci obbligano ad entrare in alcune particolarità, capaci a rischiarare questa importante questione.

Il punto di partenza del Lagrange è, che la teoria dello sviluppo delle funzioni in serie contiene i principii metafisici del calcolo differenziale, e i suoi mezzi sono di dimostrare che le quantità dette *differenziali*, non sono in realtà che una specie particolare di algoritmo delle funzioni, o come esso le chiama, delle *funzioni derivate* di una funzione primitiva. Sia, dice egli, fx una funzione qualunque di una variabile x, se si suppone che invece di x si metta in questa funzione $x+i$, i essendo una quantità qualunque indeterminata, essa diventerà $f(x+i)$ e si potrà svilupparla in una serie di questa forma

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\text{ ec.} \ldots\ldots (a),$$

nella quale le quantità p, q, r, ec., coefficienti delle potenze di i sono nuove funzioni di x, derivate dalla funzione primitiva e indipendente dall' indeterminata i.

Quanto ancora per la possibilità della forma dello sviluppo (a), il Lagrange suppone, per dimostrarla, che nessun termine di questo sviluppo possa contenere delle potenze frazionarie di i perchè, visto la pluralità delle radici, la serie avrebbe più valori, il che sarebbe assurdo. Fondato sopra questa ragione che esamineremo in seguito, pone per secondo principio della sua teoria l' espressione

$$f(x+i)=fx+i\,\mathrm{P} \ldots . (b),$$

nella quale P è una funzione di x e di i, la quale non può diventare infinita quando i è eguale a zero, poichè in quest' ultimo caso, quest' espressione deve ridursi all' identità

$$fx=fx.$$

Ma P essendo una nuova funzione di x e di i, si può ancora separarne ciò che è indipendente da i e che per conseguenza non svanisce quando i diventa nullo. Sia dunque p ciò che diviene P quando si fa $i=0$, p sarà una funzione di x senza i e si avrà ancora

$$\mathrm{P}=p+i\,\mathrm{Q},$$

iQ essendo la parte di P che diventa nulla quando $i=0$, e Q una nuova funzione di x e di i. Proseguendo il medesimo ragionamento potremo formare la serie di eguaglianze

$$\begin{aligned} f(x+i)&=fx+i\mathrm{P},\\ \mathrm{P}&=p+i\mathrm{Q},\\ \mathrm{Q}&=q+i\mathrm{R},\\ \mathrm{R}&=r+i\mathrm{S},\\ \text{ec.}&=\text{ec.}\end{aligned}$$

ciò che darà sostituendo successivamente,

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\text{ec.},$$

vale a dire una serie della forma in questione (*a*).

Premesso ciò, il Lagrange dimostra che ciascuna delle funzioni p, q, r, s, ec. si deriva da quella che la precede per mezzo di un processo unico di derivazione, dimodochè p essendo la derivata di fx, q è la derivata di p, r la derivata di q, ec. Egli chiama allora p prima derivata o *funzione prima*, q seconda derivata o *funzione seconda*, r terza derivata o *funzione terza*, ec., e indicando queste derivate con la notazione $f'x, f''x, f'''x$, ec., giunge allo sviluppo finale

$$f(x+i)=fx+f'x\cdot i+f''x\cdot\frac{i^2}{1\cdot 2}+f'''x\cdot\frac{i^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ec.}$$

e conclude che queste funzioni derivate sono la vera significazione dei coefficienti differenziali del teorema del Taylor

$$f(x+i)=fx+\frac{dfx}{dx}\cdot i+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{1\cdot 2}+\frac{d^3fx}{d^3x}\cdot\frac{i^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ec.}$$

Non è necessario di seguire il Lagrange nelle conseguenze ulteriori dei suoi principii, ne nelle numerose applicazioni che ne fa; qui il metafisico sparisce per dar luogo al geometra; tutto ciò che la scienza e il genio possono offrire di risorse, si trova impiegato da esso con quella superiorità incontestabile che lo ha situato nel primo posto, e che dà un alto grado di utilità allo studio della sua *Teoria delle funzioni analitiche*, malgrado la falsa direzione di quest' opera. Tutta questa pretesa teoria riposa evidentemente sopra i due principii (*a*) e (*b*), e basta esaminare la validità di questi principii per formarsi un' idea della teoria in se stessa.

Per poter porre come principio la forma (*a*) dello sviluppo delle funzioni in serie, bisognerebbe cominciare dal dimostrare che qualunque funzione $f(x+i)$ è, in se stessa, *identica* con lo sviluppo $fx+pi+qi^2+$ ec., o che essa è semplicemente *equivalente* a questo sviluppo, e determinare la condizione superiore di questa identità o di questa equivalenza; ma il Lagrange si contenta di stabilire che non possono esservi in questo sviluppo (*a*) delle potenze frazionarie di i, il che lo conduce al suo secondo principio (*b*) con l'aiuto del quale pretende in seguito dimostrare questa forma (*a*) giustamente in questione; ora, senza far rilevare in questo punto il circolo logico che resulta dalla dipendenza scambievole delle due espressioni (*a*) e (*b*), è di fatto che la dimostrazione del Lagrange sopra le potenze frazionarie di i è non solamente insufficiente; ma di più essa è interamente falsa, poichè nulla impedisce di fare entrare queste potenze frazionarie nello sviluppo della funzione $f(x+i)$, e in questo caso i valori differenti dei radicali si compensano tanto nella generazione medesima della serie, quanto nelle quantità che essa dà, in modo che ne risulta sempre il medesimo valore per la funzione $f(x+i)$. (*Vedi* Serie). La forma (*a*) della serie non è dunque per niente dimostrata; e la teoria del Lagrange riposa conseguentemente sopra una base ipotetica: i suoi due principii (*a*) e (*b*) non essendo finquì verificati che a posteriori.

Ma quando ancora questi principii fossero rigorosamente stabiliti, alcuno di essi non è capace di dare una significazione indipendente e assoluta alle funzioni derivate $f'x, f''x$, ec., sopra le quali riposano, dopo il Lagrange, la metafisica e la possibilità del calculo differenziale, infatti, queste funzioni non hanno

altro significato che di essere i coefficienti dei termini della serie e la loro posizione in questa serie non è realmente, che il dato del problema che possiamo proporci sopra la ricerca della loro natura. Ora, la *natura* di una quantità consiste nella riunione delle operazioni elementari o sistematiche con l'aiuto delle quali essa è formata, poichè è evidentemente la riunione di queste operazioni che costituisce la *significazione* di questa quantità, significazione che è *assoluta* quando le operazioni sono *primitive* (addizione, moltiplicazione, potenza, e loro inverse), e solamente *relativa*, quando le operazioni sono *derivate* (logaritmi, seni, ec.) (*Vedi* MATEMATICHE). Per esempio, se indichiamo con a la diagonale di un quadrato il cui lato è b, l'espressione

$$\frac{b}{\text{sen}\,45^\circ}$$

sarà la *significazione relativa* della quantità a, perchè in quest' espressione entra la funzione *seno*, la quale non è niente affatto primitiva, nel mentre che l'espressione equivalente

$$b\sqrt{2},$$

sarà la *significazione assoluta* di questa medesima quantità, quella che fa conoscere la *natura* irrazionale della diagonale. (*Vedi* CIRCOLO, per un altro esempio preso sul famoso numero π). Le funzioni derivate del Lagrange $f'x$, $f''x$, ec., non sono in realtà che un nome dato a certi processi che bisogna eseguire per ottenere le equazioni che dal valore di queste funzioni dipendono, ed esse non hanno ancora in *se medesime* alcuna specie di significazione; ben lungi dunque dal potere spiegare la natura delle quantità differenziali $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, ec. esse non potrebbero essere concepite che con l'aiuto di queste quantità, ed è solamente perchè si ha

$$f'x=\frac{dfx}{dx},\quad f''x=\frac{d^2fx}{dx^2},\quad f'''x=\frac{d^3fx}{dx^3},\ \text{ec.},$$

che queste funzioni derivate ricevono una significazione che le rende capaci ad essere impiegate nella scienza. (Vedi *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, del signor H. Wronski, Paris, 1812) (*)

FUNZIONI ELLITTICHE. *Vedi* TRASCENDENTI.

FUNZIONI ESPONENZIALI (*Alg.*). Si chiamano *quantità esponenziali* quelle potenze che hanno l'esponente variabile, e siccome le quantità per mezzo di qualunque operazione algebrica non possono ricevere che esponenti costanti, le quantità esponenziali, si annoverano fra le funzioni trascendenti, e ne sono le più semplici.

Varie sono le specie delle quantità esponenziali, come a^x, y^x, a^{a^x}, y^{a^x}, y^{z^x}, ec.; secondochè è variabile il solo esponente, o anche la quantità elevata, o l'esponente medesimo è una quantità esponenziale.

Senza entrare in altre particolarità sopra queste funzioni, le quali si ritrovano

(*) Atteso i limiti che si sono prescritti nella compilazione di questo Dizionario, come pure atteso l'impossibilità che hanno incontrato nell' acquistare le opere del signor Wronski, i Traduttori hanno creduto di non entrare in veruna polemica sopra quest' articolo, e di rinviare i cortesi lettori per rischiarare la questione alle Memorie fra l' Istituto di Francia e l' autore della *Filosofia delle Matematiche*.

con facilità in tutti i corsi elementari, esporremo il problema il più importante, cioè quello di sviluppare in serie per le potenze della variabile x la funzione $y=a^x$.

Supponiamo che a^x; sia rappresentato dalla serie

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\text{ ec}\ldots\ldots,$$

A_0, A_1, A_2, ec., sono coefficienti indipendenti da x, e le cifre inferiori 0, 1, 2, ec. indicano gl'esponenti delle potenze di x che moltiplicano la lettera alla quale essi sono attaccati; così A_m sarà il coefficiente di x^m.

Si domanderà forse quale considerazione ha determinato la scelta della serie, e perchè essa proceda seguendo le potenze ascendenti di x: con facilità si risponderà a queste questioni. Infatti la funzione a^x diviene eguale all'unità quando si fa $x=0$, e se la forma delle serie si fosse supposta

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\text{ ec.},$$

si vede che nella medesima circostanza di $x=0$, tutti i termini di queste serie sarebbero diventati infiniti; essa non avrebbe dunque potuto rappresentare la funzione proposta. In generale, se la forma della serie non convenisse allo sviluppo cercato, il calcolo condurrebbe a relazioni contraddittorie tra i coefficienti. Segue da ciò, che per poter contare sopra i risultamenti del metodo dei *coefficienti indeterminati* che s'impiegano in questo caso, bisogna assicurarsi che non s'incontreranno simili relazioni, per quanto lungi si spinga il calcolo; ora questo è quello a cui non si saprebbe rispondere, nel caso in cui la serie sia infinita, che quando si può assegnare la legge che seguono i suoi termini.

Premesso ciò, se x diventa $x+u$, la funzione a^x si cangerà in a^{x+u}; ma poichè i coefficienti A_0, A_1, A_2, ec. sono indipendenti da qualunque valore particolare di x, bisogna che si abbia egualmente

$$a^x=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3\cdot x^3+\text{ ec.},$$

$$a^u=A_0+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+\text{ ec.},$$

finalmente

$$a^{x+u}=A_0+A_1(x+u)+A_2(x+u)^2+A_3(x+u)^3+\text{ ec.};$$

e a motivo di $a^x\times a^u=a^{x+u}$, bisogna che il prodotto delle due prime serie sia eguale all'ultima. Per ordinare i differenti prodotti parziali, basterà lo scalare di un posto a misura che si cangerà di moltiplicatore nella seconda serie, e di situare in una medesima colonna tutti i termini risultanti da una medesima potenza di $(x+u)$ nella terza serie; si avrà mediante ciò

$$\left.\begin{array}{r}A_0A_0+A_0A_1x+A_0A_2x^2+A_0A_3x^3+A_0A_4x^4+\text{ ec}\\+A_1A_0u+A_1A_1ux+A_1A_2ux^2+A_1A_3ux^3+\text{ ec.}\\+A_2A_0u^2+A_2A_1u^2x+A_2A_2u^2x^2+\text{ ec.}\\+A_3A_0u^3+A_3A_1u^3x+\text{ ec.}\\+A_4A_0u^4+\text{ ec.}\end{array}\right\}=$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1x + A_2\,x^2 + \;\; A_3\,x^3 + \;\; A_4\,x^4 + \text{ec.} \\ \quad + A_1u + 2A_2ux + 3A_3ux^2 + 4A_4ux^3 + \text{ec.} \\ \qquad + A_2u^2 + 3A_3u^2x + 6A_4u^2x^2 + \text{ec.} \\ \qquad\quad + A_3u^3 + 4A_4u^3x + \text{ec.} \\ \qquad\qquad + A_4ux^4 + \text{ec.} \end{array}\right.$$

Quest' equazione dovendo aver luogo qualunque siano u ed x, ne segue necessariamente, che queste quantità non debbono entrare nella determinazione dei coefficienti, e che per conseguenza ciascono dei termini del primo membro deve distruggersi con quello che gli corrisponde nell' altro membro, si avrà perciò

$$A_0A_0 = A_0, \quad \text{il che dà} \quad A_0 = 1,$$

valore che si metterà da per tutto invece di A_0 e che dispenserà di scrivere questa lettera nei termini ove essa s' incontra. Resulterà da quest' omissione, che la prima linea del primo membro sarà identica con la prima del secondo membro; e per conseguenza cercheremo nella seconda le equazioni che danno i coefficienti, ed avremo

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ A_1A_1 = 2A_2 \\ A_1A_2 = 3A_3 \\ A_1A_3 = 4A_4 \\ \text{ec.} \end{array}\right\} \text{donde si ricava} \left\{\begin{array}{l} A_1 = \frac{A_1}{1} \\ A_2 = \frac{A^2_1}{1\,.\,2} \\ A_3 = \frac{A^3_1}{1\,.\,2\,.\,3} \\ A_4 = \frac{A^4_1}{1.2.3.4} \\ \text{ec.} \end{array}\right.$$

e in generale

$$A_1A_{m-1} = mA_m, \qquad A_m = \frac{A_1{}^m}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots m}.$$

I coefficienti essendo tutti determinati per mezzo di queste equazioni, all' eccezione del secondo, A_1, ne segue che se la forma che abbiamo supposta allo sviluppo di a^x è legittima, la terza linea del primo membro e le seguenti debbono diventare identiche da se medesime con quelle che gli corrispondono nel secondo membro.

Per verificare questa condizione prenderemo, nel primo membro, un termine qualunque u^mx^n; il suo coefficiente sarà evidentemente A_mA_n, ovvero

$$\frac{A_1{}^m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m} \times \frac{A_1{}^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} = \frac{A_1{}^{m+n}}{1\,.\,2\ldots m \times 1\,.\,2\ldots n}.$$

Il medesimo termine u^mx^n facendo parte della potenza $m+n$ di $x+u$, nel secondo membro, ha per coefficiente

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots\ldots(m+1)A_{m+n}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots n};$$

ma

$$A_{m+n} = \frac{A_1^{m+n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots (m+n)};$$

sostituendo questo valore e mandando via i fattori comuni al numeratore e al denominatore, cioè: tutti i numeri da $m+n$ fino ad $m+1$ inclusivamente, si ha per risultamento

$$\frac{A_1^{m+n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m},$$

vale a dire il medesimo di quello trovato di sopra. L'identità è dunque dimostrata, e possiamo concludere che

$$a^x = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A_1^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

Rimane ancora da determinare A_1: per eseguir ciò faremo $x = \frac{1}{A_1}$ ed avremo

$$a^{\frac{1}{A_1}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ec.}$$

serie, la cui convergenza diventa continuamente più rapida, poichè il rapporto dei termini consecutivi diminuisce continuamente. Spingendola fino al decimo termine, essa dà 2,7182818, e indicando con e il suo valore esatto, al quale possiamo approssimarci tanto quanto vorremo, verrà

$$a^{\frac{1}{A_1}} = e.$$

Prendendo il logaritmo da ciascun membro di quest'equazione si otterrà

$$\frac{1}{A_1} la = le, \quad \text{donde} \quad A_1 = \frac{la}{le};$$

e con questo valore di A_1, si troverà

$$a^x = 1 + \frac{la}{le}\frac{x}{1} + \left(\frac{la}{le}\right)^2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{la}{le}\right)^3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

Questo sviluppo si rende più semplice quando si prendono i logaritmi nel sistema la cui base è il numero e, poichè allora $le = 1$, e indicando con la caratteristica l' questa specie di logaritmi, viene

$$a^x = 1 + (l'a)\frac{x}{1} + (l'a)^2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + (l'a)^3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

Finalmente se si suppone $a = e$, si ha semplicemente

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

Le diverse serie riferite di sopra finiscono sempre per divenire convergenti, qualunque valore si dia ad x, poichè nella serie

$$1+\frac{A_1x}{1}+\frac{A_1^2x^2}{1.2}+\frac{A_1^3x^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

che le comprende tutte, due termini consecutivi essendo della forma

$$\frac{A_1^nx^n}{1.2\ldots n}+\frac{A_1^{n+1}x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

il loro rapporto sarà $\frac{A_1x}{n+1}$; ora prolungando la serie, si deve necessariamente incontrare un termine nel quale il numero $n+1$ supererà la quantità A_1x; e a cominciare da questo termine, la serie diventerà sempre più convergente.

Ecco una proprietà da osservarsi nello sviluppo di a^x. Poichè $(a^x)^m=a^{mx}$, ne segue che

$$\left(1+\frac{A_1x}{1}+\frac{A_1^2x^2}{1.2}+\frac{A_1^3x^3}{1.2.3}+\text{ec.}\right)^m$$

$$=1+\frac{mA_1x}{1}+\frac{m^2A_1^2x^2}{1.2}+\frac{m^3A_1^3x^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

e si ottiene così con la più gran facilità lo sviluppo di una potenza qualunque della serie che esprime a^x, sviluppo che sarebbe lunghissimo a calcolarsi per mezzo delle formule che abbiamo date alla parola (BINOMIO).

FUNZIONI GENERATRICI. L'insigne geometra Laplace nell'anno 1779 giunse a dedurre da una medesima sorgente, cioè, dalla considerazione di ciò che egli chiamò *Funzioni generatrici*, le formule d'interpolazione, alcune serie generali per l'integrazione delle funzioni di una sola variabile, e l'integrazione dell'equazioni del primo grado a coefficienti costanti. Sotto questo punto di vista esse presentano un complesso altrettanto semplice, quanto luminoso e costituiscono una nuova specie di calcolo che illustri matematici hanno creduto utile il coltivare. Noi ci contenteremo in questo punto di dare una succinta idea delle funzioni generatrici ad una sola variabile, e di quelle a due variabili, giovandoci per questo, di quello ne ha detto il celebre La-Croix nel suo Calcolo Differenziale e Integrale in grande vol. III. 2.ª Edizione, non potendo darne un'estesa Teoria come si sarebbe desiderato, atteso i limiti che ci siamo prefissi nella compilazione di questo Dizionario.

FUNZIONI GENERATRICI DI UNA SOLA VARIABILE.

1. Una serie qualunque essendo rappresentata con

$$u=y_0+y_1t+y_2t^2+y_3t^3\ldots\ldots+y_xt^x+y_{x+1}t^{x+1}+\text{ec.},$$

il secondo membro è lo sviluppo del primo, seguendo le potenze della variabile t; u è la funzione generatrice di questo secondo membro; ma poichè esso è contenuto implicitamente nel suo termine generale y_xt^x, diremo che u è la *funzione generatrice* di y_x che sarà il *coefficiente* di t^x nello sviluppo della funzione u, e da ciò nasce un *calcolo diretto*, quando si vuole determinare i coefficienti

per mezzo delle funzioni generatrici, e un *calcolo inverso*, quando vogliamo risalire dai coefficienti alle funzioni generatrici.

La prima questione avrà per scopo di dedurre dal coefficiente y_x, relativo alla funzione generatrice u, quello di alcune altre funzioni legate a questa in un modo molto semplice.

1.° È evidente che il coefficiente di t^x dev' essere eguale a y_{x-1} in ut, a y_{x-2} in ut^2, e in generale a y_{x-m} in ut^m:

2.° Il medesimo coefficiente di t^x dev' essere eguale a y_{x+1} nello sviluppo di $\frac{u}{t}$, a y_{x+2} in quello di $\frac{u}{t^2}$, e in generale a y_{x+n} in quello di $\frac{u}{t^n}$.

Mediante ciò, il coefficiente di t^x in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, ovvero $\frac{u}{t}-u$, è evidentemente eguale a $y_{x+1}-y_x$, ovvero a Δy_x; quindi a motivo di

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=u\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right),$$

si avrà pel coefficiente di t^x nello sviluppo di quest'ultima funzione, $\Delta y_{x+1}-\Delta y_x$, ovvero $\Delta^2 y_x$, ec.

Continuando così, si riconoscerà con facilità che il coefficiente di t^x, in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ è eguale a $\Delta^n y_x$.

Segue da ciò che $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ è la funzione generatrice di $\Delta^n y_x$, e che $ut^m\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ è quella di $\Delta^n y_{x-m}$.

3.° Passiamo alla funzione più generale

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right),$$

nella quale a, a', a'', ... $a^{(n)}$, rappresentano delle costanti; il coefficiente di t^x nello sviluppo di questa funzione, che possiamo mettere sotto la forma

$$au+\frac{a'u}{t}+\frac{a''u}{t^2}\ldots\ldots\frac{a^{(n)}u}{t^n},$$

sarà per quanto abbiamo detto sopra,

$$ay_x+a'y_{x+1}+a''y_{x+2}\ldots\ldots a^{(n)}y_{x+n}.$$

Siccome quest' ultima espressione spesso ritorna, il signor Laplace l' indica con ∇y_x; e in conseguenza, la funzione generatrice di ∇y_x è

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right).$$

Esso compone quindi, con ∇y_x, l' espressione

$$a\nabla y_x+a'\nabla y_{x+1}+a''\nabla y_{x+2}\ldots\ldots+a^{(n)}\nabla y_{x+n},$$

che esso indica con $\nabla^2 y_x$, o la cui funzione generatrice è

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^2.$$

Seguendo questa notazione, esso forma una serie di espressioni $\Delta^3 y_x \ldots \Delta^p y_x$, le cui funzioni generatrici sono respettivamente

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\frac{a'''}{t^3}\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^3,$$

. . . .

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\frac{a'''}{t^3}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p.$$

4.° Questi risultamenti combinati con i precedenti, fanno vedere che la funzione generatrice dell'espressione $\Delta^q \nabla^p y_{x-m}$, è

$$ut^m\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p\left(\frac{1}{t}-1\right)^q;$$

ed egualmente, che quella di $\Delta^q \nabla^p y_{x+m}$, è

$$\frac{u}{t^m}\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}+\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p\left(\frac{1}{t}-1\right)^q.$$

3. Segue da ciò che nulla vi è di più facile per ottenere il coefficiente di t^x nello sviluppo us^p, se s indica una funzione qualunque di $\frac{1}{t}$; basta perciò sviluppare s^p secondo le potenze di $\frac{1}{t}$, e rappresentando un termine qualunque di questo sviluppo con $\frac{K}{t^m}$, il termine affetto da t^x nel prodotto $\frac{Ku}{t^m}$, avrà per coefficiente quello di t^{x+m} in u, moltiplicato per K, ovvero Ky_{x+m}, il che equivale a cangiare la potenza m di $\frac{1}{t}$ in y_{x+m}. Si vede con ciò che scrivendo in s^p, y_x invece di $\frac{1}{t}$, e sviluppando quindi seguendo le potenze di y_x, non vi sarà che da cangiare $(y_x)^0$ in y_x, $(y_x)^1$ in $y_{x+1}, \ldots (y_x)^m$ in y_{x+m}, per avere lo sviluppo del termine generale di us^p.

Si abbia per esempio, $s=\frac{1}{t}-1$; si avrà $s^p=\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$; sostituendo y_x a $\frac{1}{t}$, quindi sviluppando, e facendo il cambiamento indicato, verrà

$$y_{x+p}-\frac{p}{1}y_{x+p-1}+\frac{p(p-1)}{1\,.\,2}y_{x+p-2}$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}y_{x+p-3}-\text{ec.}$$

per il termine generale dello sviluppo di $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$, vale a dire l'espressione di $\Delta^p y_x$ (numero precedente), il che si accorda con quella trovata (*Vedi* DIFFERENZIALE n.° 27).

In un modo analogo si formerà lo sviluppo di $\nabla^p y_x$, prendendo

$$s = a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \frac{a'''}{t^3} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}.$$

4. S'introdurranno le differenze y_x invece dei valori successivi di questa funzione, se si sviluppa s^p secondo le potenze $\frac{1}{t}-1$, in modo che un termine qualunque $K\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$ di questo sviluppo dia $Ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$; $K\Delta^m y_x$, sarà il coefficiente di t^x in quest'ultimo; e poichè bisogna sostituire $\Delta^m y_x$ a $\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$, è evidente che è sufficiente cominciare dal cangiare $\frac{1}{t}-1$ in Δy_x, ovvero $\frac{1}{t}$ in $1+\Delta y_x$, quindi sviluppare il resultamento seguendo le potenze di Δy_x, e quindi scrivere $\Delta^0 y_x$, o y_x, invece di $(\Delta y_x)^0$; Δy_x invece di $(\Delta y_x)^1$, e in generale, $\Delta^m y_x$ invece di $(\Delta y_x)^m$.

Se si prende, per esempio, $s=\frac{1}{t}$, che si scriva $s=1+\frac{1}{t}-1$, e che si si sviluppi $\left\{1+\left(\frac{1}{t}-1\right)\right\}^p$ seguendo le potenze di $\frac{1}{t}-1$; facendo i cambiamenti indicati di sopra, si otterrà

$$y_x + \frac{p}{1}\Delta y_x + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 y_x$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x + \text{ec.},$$

per l'espressione del termine generale di $\frac{u}{t^p}$, e per conseguenza di y_{x+p} (n. 2), il che si accorda con ciò che abbiamo trovato (*Vedi* DIFFERENZA, n.° 26)

5. Lo sviluppo di Σy_x si ottiene colla medesima facilità, osservando che se esso ha z per funzione generatrice, il coefficiente di y_x, che equivale a $\Delta^p \Sigma^p y_x$, avrà per funzione generatrice $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$ (n.° 2), e che per conseguenza si potrà stabilire

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^p = u,$$

con la restrizione però di non prendere nello sviluppo del primo membro che i termini in cui l'esponente di t non è negativo, poichè non se ne suppongono

dei simili nel secondo; ma allora lo sviluppo di z essendo della forma

$$A+Bt+Ct^2+\ldots\ldots+Nt^{p-1}+Pt^p+\text{ec.},$$

quello di $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$ diventerebbe la serie

$$\frac{A'}{t^p}+\frac{B'}{t^{p-1}}+\frac{C'}{t^{p-2}}+\ldots+\frac{N'}{t}+P'+\text{ec.},$$

i di cui p primi termini non potrebbero entrare in u, quando ci si limita agli indici positivi di y. Se dunque vogliamo rendere completamente esatta l'equazione stabilita di sopra, bisognerà scrivere

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)=u+\frac{A}{t^p}+\frac{A'_1}{t^{p-1}}+\ldots+\frac{A'_{p-1}}{t}+\text{ec.}$$

ed allora A, A'_1, A'_2 .... A'_{p-1}, saranno le p costanti arbitrarie che entrano nell'integrale $\Sigma^p y_x$, (*Vedi* INTEGRALE)

Dedurremo da ciò, astrazione fatta da queste costanti,

$$z=u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-p};$$

e non si tratterà più che di passare dalle funzioni generatici al coefficiente, per mezzo dei precetti dati nei numeri precedenti.

Questo risultamento rende evidente l'analogia degli integrali con le potenze negative, che osserveremo inseguito (*Vedi* INTEGRALE); poichè esso prova che si può cangiando solamente il segno dall'esponente p, passare dalla funzione generatrice di $\Delta^p y_x$ eguale ad $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$, a quella di $\Sigma^p y_x$, eguale ad $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-p}$, e reciprocamente

FUNZIONI GENERATRICI A DUE VARIABILI.

6. Sia u una funzione di due variabil t e t', il cui sviluppo abbia la forma

$$\begin{array}{l} y_{0,0}+y_{1,0}t+y_{2,0}t^2+y_{3,0}t^3+\ldots\ldots+y_{n,0}t^n+\text{ec.} \\ +y_{0,1}t'+y_{1,1}tt'+y_{2,1}t^2t'+\ldots+y_{n-1,1}t^{n-1}t'+\text{ec.} \\ +y_{0,2}t'^2+y_{1,2}tt'^2+\ldots+y_{n-2,2}t^{n-2}t'^2+\text{ec.} \\ +y_{0,3}t'^3+\ldots+y_{n-3,3}t^{n-3}t'^3+\text{ec.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +y_{0,n}t'^n+\text{ec.} \end{array}$$

$y_{x,x'}$ indicando il coefficiente di $t^x t'^{x'}$, avrà u per funzione generatrice. Se si rappresenta con $\Delta_x y_{x,x'}$ la differenza della funzione $y_{x,x'}$, presa solamente rapporto alla variabile x, la funzione generatrice di questa differenza sarà $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$;

quella di $\Delta_{x'}y_{x,x'}$ sarà egualmente $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)$. Da ciò è facile concludere che la funzione generatrice di $\Delta_x\Delta_{x'}y_{x,x'}$, ovvero di $\overset{1+1}{\Delta_{x,x'}}y_{x,x'}$ è $u\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t'}-1\right)$, e che in generale quella di $\overset{n+n'}{\Delta_{x,x'}}y_{x,x'}$ sarà $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{n'}$.

Nel caso attuale, l' espressione $\nabla y_{x,x'}$, sarà il simbolo di una quantità della forma

$$\begin{aligned} Ay_{x,x'}+B\,y_{x+1,x'}&+C\,y_{x+2,x'}+\text{ec.}\\ +B'y_{x,x'+1}&+C'y_{x+1,x'+1}+\text{ec.}\\ &+C''y_{x,x'+2}+\text{ec.}\end{aligned}$$

l' espressione $\nabla^2 y_{x,x'}$, quella di una quantità composta in $\Delta y_{x,x'}$, come la precedente lo è in $y_{x,x'}$, e così di seguito; la funzione generatrice dell' espressione generale $\nabla^m y_{x,x'}$ sarà evidentemente della forma

$$u\left\{\begin{array}{l} A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\\ \quad+\frac{B'}{t'}+\frac{C'}{tt'}+\text{ec.}\\ \qquad\quad+\frac{C''}{t'^2}+\text{ec.}\\ \qquad\qquad+\text{ec.}\end{array}\right\}^m.$$

Dimodochè

$$ut^rt'^{r'}\left(\frac{1}{t}-1\right)^n\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{n'}\left\{\begin{array}{l} A+\frac{B}{t}+\text{ec.}\\ \quad+\frac{B'}{t'}+\text{ec.}\\ \qquad+\text{ec.}\end{array}\right\}^m,$$

sarà la funzione generatrice di $\overset{n+n'}{\Delta_{x,x'}}\nabla^m y_{x-r,x'-r'}$.

Premesso ciò, quando s indicherà una funzione delle quantità $\frac{1}{t}$ e $\frac{1}{t'}$, e che il suo sviluppo, seguendo le potenze di queste quantità, avrà un termine generale della forma $\frac{K}{t^pt'^{p'}}$, il coefficiente di $t^xt'^{x'}$ in $\frac{Ku}{t^pt'^{p'}}$, sarà $Ky_{x+p,x'+p'}$; e ne segue che il coefficiente di $t^xt'^{x'}$ in us^m, sarà $\nabla^m y_{x,x'}$, se s ha la forma conveniente. Si vede con ciò che $\Delta^m y_{x,x'}$ si otterrà scrivendo in s^m, y_x invece di $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ invece di $\frac{1}{t'}$, e sviluppandone il risultamento seguendo le potenze di y_x e di $y_{x'}$, poi cangiando i prodotti $K(y_x)^r(y_{x'})^{r'}$ in $Ky_{x+r,\,x'+r'}$;

ben inteso che un termine tutto costante K, equivalente a $K(y_x)^o(y_{x'})^o$, deve essere sostituito con $Ky_{x,x'}$.

Per introdurre nel calcolo le differenze di $y_{x,x'}$, bisogna sviluppare s^m seguendo le potenze delle quantità $\frac{1}{t}-1$, $\frac{1}{t'}-1$; un termine qualunque del risultamento essendo indicato da $K\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$ e moltiplicato per u, sarà $Ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$, e darà luogo ad uno sviluppo nel quale il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ sarà espresso con $K\Delta^{r+r'}_{x,x'}y_{x,x'}$. Segue da ciò che la quantità $\nabla^m y_{x,x'}$ si formerà in questo caso, sostituendo $\Delta_x y_{x,x'}$ invece di $\frac{1}{t}-1$, e $\Delta_{x'} y_{x,x'}$ invece di $\frac{1}{t'}-1$ in s, e sviluppando allora s^m seguendo le potenze di $\Delta_x y_{x,x'}$, $\Delta_{x'} y_{x,x'}$, poi trasportando alla caratteristica Δ gli esponenti di queste potenze, e mettendo così $\Delta^{r+r'}_{x,x'}$, invece di $(\Delta_x y_{x,x'})^r(\Delta_{x'} y_{x,x'})^{r'}$.

Se s'indica con $\Sigma^{r+r'}_{x,x'}y_{x,x'}$ l'integrale del coefficiente $y_{x,x'}$, preso un numero r di volte rapporto ad x solo, e un numero r' di volte rapporto ad x' solo, e che si rappresenti con z la funzione generatrice di quest'integrale, quella della sua differenza $y_{x,x'}$ sarà, per quello che abbiamo veduto,

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'},$$

e si avrà per conseguenza

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}=u,$$

donde

$$z=\frac{u}{\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}};$$

conoscendo così la funzione generatrice di $\Sigma^{r+r'}_{x,x'}y_{x,x'}$, si avrà quest'integrale passando dalle funzioni generatrici ai coefficienti. Osserveremo che a motivo delle quantità arbitrarie che essa deve comportare, bisogna scrivere

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}=u+\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t^3}+\ldots+\frac{q}{t^r}$$

$$+\frac{a'}{t'}+\frac{b'}{t'^2}+\frac{c'}{t'^3}+\ldots+\frac{q'}{t'^{r'}},$$

$a, b, c, \ldots q$, essendo delle funzioni arbitrarie di t', ed $a', b', c', \ldots q'$ delle funzioni arbitrarie di t; donde si conclude

$$z = \frac{n t^r t'^{r'} + a t^{r-1} t'^{r'} + b t^{r-2} t'^{r'} \ldots + q t'^{r'} + a' t^r t'^{r'-1} \ldots + q' t^r}{(1-t)^r (1-t')^{r'}} .$$

7. Dopo aver fatto conoscere come la considerazione delle funzioni generatrici conduce alle formole fondamentali del calcolo alle differenze, sarebbe stato necessario entrare in alcune particolarità sopra le applicazioni delle medesime; ma dietro la protesta fatta al principio di quest' articolo, che i limiti che ci eravamo prefissi c' impedivano di dare un esteso articolo sopra questo ramo importante di calcolo, siamo costretti a rinviare nuovamente all' insigne geometra La Croix, *Traité complet de calcul différentiel et de calcul intégral*, 3 vol. in 4, Paris, 1810-19, e particolarmente al volume III dalle carte 322 alle carte 373 inclusive, ove i cortesi lettori troveranno non solo questi pochi elementi, ma bensì un completo trattato elementare delle Funzioni Generatrici, ad una e due variabili, come pure le applicazioni delle medesime *all' interpolazione, alla Trasformazione delle serie, agli sviluppi delle differenze, delle differenziali, degli integrali, ec., ec.*, e ove inoltre, e particolarmente ai ni. 1115 e 1130, troveranno le dimostrazioni delle formule da noi date nel Calcolo delle Differenze n.i 45 e 65. Quelli poi che desiderassero di più approfondire questa materia potranno consultare Laplace, *Traité complet de calcul des probabilités*, 2.ª édiz., 1 vol. in-4, Paris, 1825, come pure, il marchese Rangoni *Memorie sulle Funzioni generatrici* inserite nel tomo XIX degli Atti della Società Italiana delle Scienze, residente in Modena, ec., ec.

Funzioni Simmetriche (*Alg.*). Si dà questo nome, in algebra, a qualunque funzione di più quantità nella quale queste quantità entrano di una maniera talmente identica, che si può cangiare il loro ordine o permutarle l' una nel posto dell' altra senza cangiare il valore della funzione. Per esempio, avendo le quattro quantità a, b, c, d indipendenti tra loro, la loro somma $a+b+c+d$, la somma delle loro potenze $a^n+b^n+c^n+d^n$, quella dei loro prodotti due a due $ab+ac+ad+bc+bd+cd$, ec. ec., sono *funzioni simmetriche* di queste quattro quantità.

Tutte le funzioni simmetriche delle medesime quantità hanno tra loro delle relazioni determinate che permettono di esprimerle le une per mezzo delle altre; ciò conduce a diversi teoremi importantissimi per la teoria dell' equazioni. Daremo la deduzione di quello di questi teoremi che si può considerare come il fondamento della teoria delle funzioni simmetriche.

1. Siano m quantità a, b, c, d, e ec.; indichiamo da una parte con A_1 la loro somma, con A_2 la somma dei loro prodotti *due a due*, con A_3 quella dei loro prodotti *tre a tre*, ec., e in generale con A_μ quella dei loro prodotti μ a μ. indichiamo dall' altra parte con S_1 la somma di queste medesime quantità, con S_2 la somma delle loro seconde potenze, con S_3, quella delle loro terze potenze, ec., e in generale con S_μ quella delle loro potenze del grado μ.

Premesso ciò, x essendo una quantità variabile qualunque, ec., formiamo il prodotto dei μ fattori $(1+ax)$, $(1+bx)$, $(1+cx)$, ec., avremo evidentemente (*Vedi* Moltiplicazione)

$$(1+ax) \cdot (1+bx) \cdot (1+cx) \cdot (1+dx) \ldots\ldots \text{ec.} =$$

$$= 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec.} \ldots\ldots + A_\mu x^\mu .$$

Così, indicando per abbreviare il secondo membro di quest'eguaglianza con X e prendendo i logaritmi naturali,

$$LX = L(1+ax)+L(1+bx)+L(1+cx)+ \text{ ec.}$$

Ora, si ha generalmente, (*Vedi* Logaritmi)

$$L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \text{ ec.}$$

e, per conseguenza,

$$L(1+ax) = ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^3x^3 - \frac{1}{4}a^4x^4 + \text{ ec.}$$

$$L(1+bx) = bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + \frac{1}{3}b^3x^3 - \frac{1}{4}b^4x^4 + \text{ ec.}$$

$$L(1+cx) = cx - \frac{1}{2}c^2x^2 + \frac{1}{3}c^3x^3 - \frac{1}{4}c^4x^4 + \text{ ec.}$$

$$L(1+dx) = dx - \frac{1}{2}d^2x^2 + \frac{1}{3}d^3x^3 - \frac{1}{4}d^4x^4 + \text{ ec.}$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

La somma di questi logaritmi sarà perciò eguale a

$$S_1 \,.\, x - \frac{1}{2}S_2 \,.\, x^2 + \frac{1}{3}S_3 \,.\, x^3 - \frac{1}{4}S_4 \,.\, x^4 + \frac{1}{5}S_5 \,.\, x^5 - \text{ ec.}$$

e si avrà generalmente.

$$LX = S_1 \,.\, x - \frac{1}{2}S_2 \,.\, x^2 + \frac{1}{3}S_3 \,.\, x^3 - \frac{1}{4}S_4 \,.\, x^4 + \frac{1}{5}S_5 \,.\, x^5 - \text{ ec.}$$

eguaglianza che diviene, differenziando i suoi due membri e dividendo per dx

$$\frac{dX}{X \,.\, dx} = S_1 - S_2 \,.\, x + S_3 \,.\, x^2 - S_4 \,.\, x^3 + S_5 \,.\, x^4 - \text{ ec.}$$

Ma abbiamo dall'altra parte, rimettendo nel posto di X il polimonio che esso rappresenta e effettuando la differenziazione,

$$\frac{dX}{dx} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \text{ ec.}$$

Ne resulta dunque definitivamente

$$\frac{A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + \text{ ec.}}{1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \text{ ec.}} =$$

$$= S_1 - S_2 \,.\, x + S_3 \,.\, x^2 - S_4 \,.\, x^3 + S_5 \,.\, x^4 - \text{ ec.}$$

Moltiplicando il secondo membro pel denominatore del primo ed eguagliando quindi i coefficienti delle medesime potenze di x, si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = A_1 \\ S_2 = A_1 \, . \, S_1 - 2A_2 \\ S_3 = A_1 \, . \, S_2 - A_2 \, . \, S_1 + 3A_3 \\ S_4 = A_1 \, . \, S_3 - A_2 \, . \, S_2 + A_3 \, . \, S_1 - 4A_4 \\ \text{ec.} = \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Queste importanti espressioni sono state date per la prima volta, senza dimostrazione, dal Newton nella sua *Aritmetica universale*.

Se nel polinomio X invece di x, si sostituisce $\frac{1}{x}$, e se eguagliamo il risultamento a *zero*, avremo l' equazione

$$x^{\mu} + A_1 x^{\mu-1} + A_2 x^{\mu-2} + \text{ec.} \ldots + A_{\mu} = 0,$$

le cui radici saranno $-a$, $-b$, $-c$, ec. Così l'espressioni (a) somministrano i mezzi di ottenere successivamente la somma delle radici, quella dei loro quadrati, quella dei loro cubi, ec., di un' equazione i cui coefficienti sono conosciuti.

Tutte le altre funzioni simmetriche che si possono formare con le μ quantità a, b, c, d, ec., si esprimono senza difficoltà con l' aiuto delle somme delle potenze S_1, S_2, S_3, ec., donde resulta il teorema *che qualunque funzione simmetrica razionale e intera delle radici di un' equazione può, senza che si conoscano queste radici, esser valutata per mezzo dei coefficienti dell' equazione.*

Prendendo invece delle quantità a, b, c, d, ec., la serie dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec, fino ad $m-1$, ed esprimendo allora generalmente $S\mu$ con $M(m)_{\mu}$ e A_{μ} con $(m1\mu)$, dedurremo dall' espressioni (a), le relazioni

$$\begin{array}{l} (m1 1) = M(m)_1 \\ 2(m1 2) = M(m)_1 \, . \, (m1 1) - M(m)_2 \\ 3(m1 3) = M(m)_1 \, . \, (m1 2) - M(m)_2 \, . \, (m1 1) + M(m)_3 \\ \quad \text{ec.} = \text{ec.} \end{array}$$

delle quali abbiamo fatto uso altrove. (*Vedi* FACOLTA' n.° 18).

Ci rimane da provare che tutte le funzioni simmetriche delle basi a, b, c, d, ec., possono esprimersi con le somme delle potenze S_1, S_2, S_3, ec.

2. Cominciamo dal rammentare che si dà in generale il nome di funzione simmetrica alla somma dei prodotti differenti tra loro e compresi sotto la forma

$$a^p b^q c^r d^s, \text{ ec.}$$

che resultano tanto dalla combinazione delle basi a, b, c, d, ec., quanto dalla permutazione degli esponenti p, q, r, ec. Per fissare le idee, consideriamo solamente tre basi a, b, c; la funzione simmetrica a termini di una sola base e, per conseguenza, di un solo esponente p, sarà

$$a^p + b^p + c^p;$$

la funzione simmetrica a termini di due basi e di due esponenti p, q, sarà

$$a^p b^q + a^p c^q + b^p c^q$$
$$+ a^q b^p + a^q c^p + b^q c^p;$$

e finalmente la funzione simmetrica a termini di tre basi, sarà

$$a^p b^q c^r + a^q b^p c^r + a^r b^p c^q$$
$$+ a^p b^r c^q + a^q b^r c^p + a^r b^q c^p.$$

In generale, un numero qualunque di basi e di esponenti essendo dato, si formerà la funzione simmetrica corrispondente cominciando dal combinare le basi tra loro per formare dei gruppi di tanti fattori quanti esponenti vi sono, poi si darà a ciascuno di questi gruppi primitivi degli esponenti, permutandogli tra essi in tutte le maniere possibili; con questo metodo, ciascun gruppo primitivo di combinazione somministrerà altrettanti termini differenti della funzione, quante permutazioni ammettono gli esponenti. Proponiamoci, per esempio, di costruire una funzione simmetrica con le quattro basi a, b, c, d e i due esponenti p, q; le combinazioni due a due, che danno prodotti differenti per le quattro lettere a, b, c, d, sono

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

dando a ciascuno di questi gruppi primitivi delle permutazioni p, q e q, p dei due esponenti p e q, avremo per la funzione simmetrica domandata

$$a^p b^q + a^p c^q + a^p d^q + b^p c^q + b^p d^q + c^p d^q$$
$$+ a^q b^p + a^q c^p + a^q d^p + b^q c^p + b^q d^p + c^q d^p.$$

Se si domandasse la funzione simmetrica delle quattro medesime basi a, b, c, d, e di tre esponenti p, q, r bisognerebbe formare tutte le combinazioni 3 a 3 senza permutazioni delle lettere a, b, c, d, il che darebbe i quattro gruppi primitivi

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Le permutazioni degli esponenti essendo nel numero di sei, cioè:

$$pqr,\quad prq$$
$$qpr,\quad qrp$$
$$rpq,\quad rqp,$$

il primo gruppo somministrerebbe i sei termini

$$a^p b^q c^r + a^p b^r c^q + a^q b^p c^r$$
$$+ a^q b^r c^p + a^r b^p c^q + a^r b^q c^p;$$

e siccome ciascuno degli altri gruppi darebbe egualmente sei termini distinti, la funzione cercata si troverebbe composta di ventiquattro termini.

3. I diversi termini che compongono una funzione simmetrica avendo tutti la medesima forma, possiamo rappresentare queste funzioni per mezzo di uno qualunque dei loro termini, dandogli una caratteristica particolare. Se adottiamo, per esempio, la caratteristica $\int$, $\int a^p$ indicherà tutte le funzioni simmetriche

i cui termini non comprendono che una sola base; $\int a^p b^q$, quelle i cui termini comprendono due basi; $\int a^p b^q c^r$, le funzioni a termini di tre basi, e così di seguito. Ciascuno dei termini potendo considerarsi indifferentemente come il termine generale, le quantità $\int a^p b^q$, $\int b^p c^q$, $\int a^p c^q$, ec., rappresenteranno delle funzioni identiche, ma noi ci regoleremo sempre sull'ordine alfabetico, tanto per le basi quanto per gli esponenti; quest'ordine essendo il più proprio per determinare immediatamente la composizione della funzione.

4. Premesso ciò, indichiamo con m il numero totale delle basi a, b, c, d, ec., e con n il numero di queste basi contenute in ciascun termine di una funzione simmetrica, ovvero, ciò che significa la medesima cosa, il numero degli esponenti p, q, r, s, ec., m lettere ammettendo un numero di combinazioni n ad n rappresentato da (*Vedi* COMBINAZIONI),

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4.5\ldots\ldots n}$$

e ciascun gruppo di combinazione somministrando, per la permutazione degli n esponenti un numero di prodotti differenti, rappresentato da (*Vedi* PERMUTAZIONE)

$$1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots n,$$

ne risulta che il numero dei termini di una funzione simmetrica a termini di n basi è eguale a

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1),$$

il numero delle basi essendo m, e tutti gli esponenti essendo d'altra parte ineguali.

5. È più semplice indicare le funzioni simmetriche dal numero degli esponenti, poichè questi esponenti determinano la costruzione dei loro termini; nel seguito chiameremo perciò, *funzione simmetrica ad* n *esponenti* la funzione composta con termini di n fattori, affetti ciascuno da un esponente differente.

6. Quando più esponenti sono eguali, il numero totale dei termini di una funzione simmetrica non è il medesimo che nel caso di tutti gli esponenti ineguali. Per esempio, la funzione simmetrica a due esponenti ineguali, p e q, delle tre basi a, b, c, che generalmente è

$$\int a^p b^q = a^p b^q + a^p c^q + b^p c^q$$
$$+ a^q b^p + a^q c^p + b^q c^p,$$

differisce essenzialmente dalla funzione simmetrica a due esponenti eguali

$$\int a^p b^p = a^p b^p + a^p c^p + b^p c^p,$$

perchè dalla definizione medesima delle funzioni simmetriche (2), queste funzioni non si compongono che dei soli prodotti differenti che possiamo formare con la combinazione delle basi e la permutazione degli esponenti.

7. È sempre facile trovare il numero dei termini di una funzione simmetrica a più esponenti eguali, cominciando dal supporre tutti questi esponenti ineguali, quindi dividendo il numero dei termini che dà questa supposizione pel numero delle permutazioni che ammetterebbero gli esponenti eguali se essi fossero ineguali. Osserviamo, infatti, che nel caso particolare di tre esponenti ineguali, p, q, r, la funzione simmetrica, qualunque sia il numero delle basi, si compone di termini primitivi della forma

$$a^p b^q c^r,$$

di cui ciascuno produce altri cinque termini

$$a^p b^r c^q,$$
$$a^q b^p c^r,$$
$$a^q b^r c^p,$$
$$a^r b^p c^q,$$
$$a^r b^q c^p,$$

per la permutazione degli esponenti. Ora, se due di questi esponenti diventano eguali, q ed r, per esempio, le permutazioni differenti si riducono a

$$p, q, q; \quad q, p, q; \quad q, q, p,$$

e ciascun gruppo primitivo di basi abc non dà più di tre termini distinti

$$a^p b^q c^q,$$
$$a^q b^p c^q,$$
$$a^q b^q c^p;$$

il numero totale dei termini è dunque allora la *metà* di quello che era nel primo caso. Egualmente, se i tre esponenti p, q, r, diventassero eguali, i sei termini resultando da ciascun gruppo primitivo di basi abc diventerebbero similmente eguali; dimodochè, in quest' ultimo caso, il numero dei termini della funzione simmetrica non sarebbe che il *sesto* del numero dei termini che essa aveva quando tutti gli esponenti erano ineguali. Si vede facilmente che l'eguaglianza di un numero qualunque di esponenti fa sparire dalla funzione per ciascun gruppo distinto di basi, altrettanti termini, quanti, questi esponenti ammettevano tra loro permutazioni, e, per conseguenza, che il numero dei termini della funzione ridotta è eguale al numero dei termini della funzione primitiva, diviso pel numero delle permutazioni degli esponenti eguali.

In generale, se la funzione simmetrica di m basi a, b, c, d, ec., ha μ esponenti eguali a p, ν eguali a q, ξ eguali ad r, ec., il numero totale degli esponenti essendo sempre n, il numero dei suoi termini sarà

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\mu\times1.2.3\ldots\ldots\nu\times1.2.3\ldots\ldots\xi\times\text{ec.}}.$$

Si abbia, per esempio, da determinare il numero dei termini della funzione simmetrica rappresentata dal termine generale

$$\int a^3 b^2 c^2 de,$$

e nella quale il numero totale delle basi è 6, facendo $m=6$, $n=5$, $p=3$, $q=2$, $r=1$; avremo $\mu=1$, $\nu=2$, $\xi=2$, e per conseguenza,

$$\frac{6.5.4.3.2}{1.1.2.1.2}=180,$$

sarà il numero dei termini domandato. Se tutti gli esponenti fossero eguali, vale a dire se il termine generale fosse

$$\int a^p b^p c^p d^p e^p,$$

qualunque sia p, differente da o, il numero dei termini della funzione si ridurrebbe a

$$\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}=6.$$

8. Ciò che precede fa conoscere ciò che diviene una funzione simmetrica qualunque quando s' introduce nei suoi esponenti delle relazioni di eguaglianza. Se si fa, per esempio $p=q$, nella funzione

$$\left.\begin{array}{l} a^pb^q+a^pc^q+a^pd^q+b^pc^q+b^pd^q+c^pd^q \\ +a^qb^p+a^qc^p+a^qd^p+b^qc^p+b^qd^p+c^qd^p \end{array}\right\} \ldots\ldots (b).$$

essa prende la forma

$$\begin{array}{l} a^pb^p+a^pc^p+a^pd^p+b^pc^p+b^pd^p+c^pd^p \\ +a^pb^p+a^pc^p+a^pd^p+b^pc^p+b^pd^p+c^pd^p, \end{array}$$

la quale contiene, *due* funzioni simmetriche eguali tra loro, e di cui il termine generale e a^pb^q; è dunque evidente in questo caso che l'ipotesi di $p=q$ riduce la funzione $\int a^pb^q$ a $2\int a^pb^p$. Ora indichiamo con P il termine generale di una funzione simmetrica qualunque, con P' ciò che diviene questo termine generale quando si rendono eguali tra loro alcuni dei suoi esponenti ineguali, e rappresentiamo con M e M' i numeri respettivi dei termini delle due funzioni simmetriche $\int P$, $\int P'$; M essendo necessariamente un multiplo di M', facciamo di più $M=M'Q$ Osserviamo ora che l' ipotesi che trasforma il termine generale P in P' lascia sussistere tutti i termini della funzione $\int P$, che cessa solamente di essere simmetrica, perchè il numero dei suoi termini differenti si trova ridotto nel rapporto di Q ad 1, ovvero, ciò che equivale al medesimo, perchè ciascun termine differente si trova ripetuto Q volte; ma la somma dei termini differenti è esattamente la funzione simmetrica $\int P'$; dunque l'ipotesi che trasforma il termine generale P in P' riduce la funzione simmetrica $\int P$ a $Q\int P'$.

Così, per trovare ciò che diviene una funzione simmetrica $\int P$, quando più e-

sponenti si fanno eguali, basta cercare il fattore Q eguale al numero dei termini di $\int P$ diviso pel numero dei termini di SP'.

Proponiamoci, per esempio, di determinare ciò che diviene la funzione simmetrica

$$\int a^p b^p c^q d^r e \ldots\ldots (c),$$

quando si fa $q=p$. Il numero dei termini di questa funzione è, m indicando come sopra il numero totale delle basi,

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2}.$$

L'ipotesi $q=p$ dà al termine generale la forma $a^p b^p c^p d^r e$, il che conduce alla funziona simmetrica

$$\int a^p b^p c^p d^r e,$$

di cui il numero dei termini è

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Così

$$Q=\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2}=3.$$

La funzione simmetrica proposta si riduce dunque a $3\int a^p b^p c^p d^r e$ pel valore di p dato a q.

Se nella medesima funzione simmetrica (c) si facesse $p=q=r$, il che darebbe al termine generale la forma $a^p b^p c^p d^p e$, si avrebbe pel numero dei termini di $\int a^p b^p c^p d^p e$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

vale a dire che la funzione (c) diventerebbe in questo caso

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2}\int a^p b^p c^p d^p e.$$

Finalmente, nella supposizione di $p=q=r=1$, la funzione (c) si riduce a

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2}\int abcde.$$

9. L'eguaglianza a zero di uno o di più esponenti di una funzione simmetrica riducendo all'unità tutti i fattori affetti da questi esponenti, introduce ancora dei termini eguali nella funzione, che conseguentemente cessa di essere simme-

trica, benchè conservi il medesimo numero di termini. Se si fa, per esempio, $q=0$ nella funzione simmetrica (b) del n.° 8, essa diviene

$$a^p+a^p+a^p+b^p+b^p+c^p$$
$$+b^p+c^p+d^p+c^p+d^p+c^p,$$

ovvero

$$3\left[a^p+b^p+c^p+d^p\right].$$

Un metodo simile al precedente ci fa trovare in tutti i casi ciò che diviene una funzione simmetrica per la mancanza di alcuni dei suoi esponenti. Indichiamo sempre con P il termine generale di una funzione proposta, e con M il numero dei suoi termini: sia P'' ciò che diviene P per la mancanza di un numero qualunque dei suoi esponenti; sia M′ il numero dei termini della funzione simmetrica $\int P''$, e sia finalmente $M=M'R$. La funzione non simmetrica il cui termine generale è P'' essendo composta, come $\int P$, di M termini fra i quali M′ solamente sono differenti tra loro, ciascuno di questi deve evidentemente trovarsi ripetuto R volte, cioè, la funzione simmetrica $\int P$ si riduce a $R\int P''$ pel valore o dato ai coefficienti.

Supponiamo, per esempio, che si faccia $p=0$ e $q=0$ nella funzione simmetrica

$$\int a^p b^p c^q d^r e^s f,$$

il cui numero totale delle basi è 12. Questa supposizione riduce il termine generale della funzione alla forma $d^r e^s f$; ovvero, per conservare l'ordine alfabetico, alla forma $a^r b^s c$, e la funzione essa stessa si riduce a

$$R\int a^r b^s c.$$

Si tratta di trovare il valore di R. Il numero dei termini della funzione proposta è, pel (n.° 8),

$$\frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2};$$

quello della funzione $\int a^r b^s c$ è

$$12 \,.\, 11 \,.\, 10.$$

Così

$$R=\frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 12 \,.\, 11 \,.\, 10}=252.$$

La funzione proposta diviene dunque $252\int a^r b^s c$, nella supposizione di $p=0$, $q=0$.

Si abbia ancora la funzione $\int a^p bcdef$, nella quale l' esponente p diviene o, e che per conseguenza, si riduce, a

$$R \int abcde.$$

Supponendo il numero totale delle basi $= m$, il numero dei termini delle funzione proposta è

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-5);$$

quello dei termini della funzione simmetrica $\int abcde$ è,

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-4);$$

donde

$$R = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)} = m-5,$$

la funzione si riduce dunque a $(m-5)\int abcde$.

Se tutti gli esponenti sparissero nel medesimo tempo, la funzione si ridurrebbe al numero medesimo dei suoi termini, poichè ciascuno di questi termini diventerebbe una semplice unità. Così, nel caso di $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$, ec., il numero delle basi essendo sempre m, si avrebbe

$$\int a^p = m,$$

$$\int a^p b^q = m(m-1),$$

$$\int a^p b^q c^r = m(m-1)(m-2),$$

ec. = ec.

10. Le funzioni simmetriche le più semplici sono quelle che hanno tutti i loro esponenti eguali all' unità, siccome esse sono allora le somme dei prodotti delle basi combinate 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, ec., si può sempre considerarle come interamente conosciute. Infatti essendo date m basi a, b, c, d, e, ec, se si forma il prodotto degli m binomi

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots (x-m),$$

del quale rappresenteremo lo sviluppo con

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} + \text{ec.} \ldots + (-1)^m A_m,$$

avremo per la teoria della moltiplicazione

$$\int a = A_1,$$

$$\int ab = A_2,$$

$$\int abc = A_3,$$

$$\int abcd = A_4,$$

ec. = ec.

Si possano perciò considerare come interamente conosciute le funzioni ad un solo esponente $\int a^m$, poichè esse sono identiche con le somme delle potenze che abbiamo generalmente indicate con $\int_m$, e delle quali abbiamo riportato le espressioni in A_1, A_2, A_3; ec., al principio di quest'articolo; del rimanente, daremo una deduzione assai elementare di queste espressioni.

11. La funzione $\int a^m$ rappresentando la somma

$$a^m + b^m + c^m + d^m + e^m + \text{ec.},$$

e la funzione $\int a$, la somma

$$a + b + c + d + e + \text{ec.},$$

è evidente, il numero delle basi essendo il medesimo nelle due funzioni, che il prodotto di queste due funzioni comprenderà, da una parte, la somma di tutte le potenze della forma a^{m+1}, e dall'altra, la somma dei prodotti di due fattori della forma $a^m b$, vale a dire che si ha

$$\int a \times \int a^m = \int a^{m+1} + \int a^m b.$$

Il prodotto della funzione $\int a^m$ per la funzione $\int ab$, che rappresenta la somma dei prodotti due a due delle basi

$$ab + ac + ad + bc + bd + \text{ec.},$$

comprenderà similmente, da una parte, la somma di tutti i prodotti della forma $a^{m+1}b$, e dall'altra, la somma di tutti i prodotti della forma $a^m bc$; donde

$$\int ab \times \int a^m = \int a^{m+1} b + \int a^m bc.$$

Il prodotto della funzione $\int a^m$ per la funzione $\int abc$, che rappresenta la somma dei prodotti tre a tre

$$abc + abd + abe + bcd + \text{ec.},$$

dà ancora evidentemente luogo alla relazione

$$\int abc \times \int a^m = \int a^{m+1} bc + \int a^m bcd,$$

e così di seguito. Possiamo dunque stabilire, come resultanti immediatamente dalla costruzione medesima delle funzioni simmetriche, la serie di eguaglianze

$$\left.\begin{aligned}
&\int a \;\;\;\;\;\; . \int a^m = \int a^{m+1} \;\;\; + \int a^m b \ldots\ldots \\
&\int ab \;\;\;\; . \int a^m = \int a^{m+1} b \;\; + \int a^m bc \ldots\ldots \\
&\int abc \;\; . \int a^m = \int a^{m+1} bc + \int a^m bcd \ldots\ldots \\
&\int abcd . \int a^m = \int a^{m+1} bcd + \int a^m bcde \ldots\ldots \\
&\text{ec.} = \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (d).$$

Queste relazioni essendo indipendenti dal valore dell' esponente m, non abbiamo che da sostituire successivamente m con $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec., per dedurne le nuove relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\int a^m = \int a . \int a^{m-1} - \int a^{m-1} b \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\int a^m = \int a . \int a^{m-1} - \int ab . \int a^{m-2} + \int a^{m-2} bc \ldots\ldots \\
&\int a^m = \int a . \int a^{m-1} - \int ab . \int a^{m-2} + \int abc \;\; \int a^{m-3} \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \int a^{m-3} bcd \ldots\ldots \\
&\int a^m = \int a . \int a^{m-1} - \int ab . \int a^{m-2} + \int abc . \int a^{m-3} \\
&\qquad\qquad\qquad - \int abcd . \int a^{m-4} + \int a^{m-4} bcde \ldots\ldots \\
&\text{ec.} = \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots (e).$$

Se facciamo $m = 1$ nella prima di queste eguaglianze, $m = 2$ nella seconda, $m = 3$ nella terza, e così di seguito, e se osserviamo (n.° 9) che le funzioni simmetriche

$$\int a^{m-1}, \int a^{m-1} b, \int a^{m-2} bc, \int a^{m-3} bcd, \int a^{m-4} bcde, \cdot$$

si riducono respettivamente per questi valori a

$$\mu, \;\; (\mu-1)\int a, \;\; (\mu-2)\int ab, \;\; (\mu-3)\int abc,$$

$$(\mu-4)\int abcd.$$

μ indicando il numero totale delle basi, giungeremo all' espressioni

$$\left.\begin{aligned}
&\int a = \int a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int a^2 = \int a \,.\, \int a - 2\int ab \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int a^3 = \int a \,.\, \int a^2 - \int ab \,.\, \int a + 3\int abc \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int a^4 = \int a \,.\, \int a^3 - \int ab \,.\, \int a^2 + \int abc \,.\, \int a - 4\int abcd \ldots\ldots\\
&\int a^5 = \int a \,.\, \int a^4 - \int ab \,.\, \int a^3 + \int abc \,.\, \int a^2 - \int abcd \,.\, \int a\\
&\qquad\qquad + 5\int abcde \ldots\ldots\ldots\\
&\text{ec.} = \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots (f),$$

le quali, con un semplice cangiamento di notazione, ci danno le espressioni del Newton

$$\begin{aligned}
&S_1 = A_1,\\
&S_2 = A_1S_1 - 2A_2,\\
&S_3 = A_1S_2 - A_2S_1 + 3A_3,\\
&S_4 = A_1S_3 - A_2S_2 + A_3S_1 - 4A_4,\\
&S_5 = A_1S_4 - A_2S_3 + A_3S_2 - A_4S_1 + 5A_5\\
&\text{ec.} = \text{ec.}
\end{aligned}$$

12. Per procedere ora alla valutazione delle funzioni simmetriche $\int a^pb^q$, $\int a^pb^qc^r$, ec., col mezzo delle somme delle potenze $\int a^m$, ovvero S_m, esaminiamo la natura dei prodotti che resultano dalla moltiplicazione di queste somme di potenze le une per le altre. Prima di tutto è evidente che il prodotto delle due somme

$$\begin{aligned}
&a^p + b^p + c^p + d^p + e^p + \text{ ec.} \ldots\ldots\\
&a^q + b^q + c^q + d^q + e^q + \text{ ec.} \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

nelle quali il numero delle basi è il medesimo, deve contenere 1.° tutti i prodotti due a due della forma a^pb^q, che compongono la funzione simmetrica $\int a^pb^q$; 2.° tutti i prodotti ad una sola base della forma a^{p+q}, che compongono la somma delle potenze $\int a^{p+q}$ ovvero S_{p+q}: possiamo perciò stabilire senz' altra dimostrazione

$$\int a^p \times \int a^q = \int a^{p+q} + \int a^pb^q \ldots\ldots (g).$$

Donde

$$\int a^p b^q = \int a^p \cdot \int a^q - \int a^{p+q}$$
$$= S_p \cdot S_q - S_{p+q} \ldots\ldots (h)$$

Nel caso degli esponenti eguali $p=q$, siccome la funzione $\int a^p b^q$ si riduce (n.° 7) a $2\int a^p b^p$, si ha

$$2\int a^p b^p = (S_p)^2 - S_{2p} \ldots\ldots (i).$$

13. Il prodotto delle tre somme delle potenze $\int a^p$, $\int a^q$, $\int a^r$ deve contenere, per quello che precede, il prodotto di $\int a^{p+q}$ per $\int a^r$, più il prodotto di $\int a^p b^q$ per $\int a^r$; ora il prodotto di $\int a^{p+q}$ per $\int a^r$; è in virtù dell'espressione (g)

$$\int a^{p+q} \times \int a^r = \int a^{p+q+r} + \int a^{p+q} b^r.$$

Quanto al prodotto di $\int a^p b^q$ per $\int a^r$, siccome esso non può contenere che prodotti parziali delle forme

$$a^{p+r} b^q,\quad a^p b^{q+r},\quad a^p b^q c^r,$$

e che ciascuno di questi prodotti non si può trovare che una sola volta, si ha evidentemente

$$\int a^p b^q \times \int a^r = \int a^{p+r} b^q + \int a^p b^{q+r} + \int a^p b^q c^r.$$

Dunque, riunendo i suoi risultamenti

$$\int a^p \times \int a^q \times \int a^r = \int a^{p+q+r} + \int a^{p+q} b^r +$$
$$+ \int a^{p+r} b^q + \int a^{q+r} b^p + \int a^p b^q c^r \ldots\ldots (k);$$

donde si deduce

$$\int a^p b^q c^r = \int a^p . \int a^q . \int a^r . - \int a^{p+q} b^r - \int a^{p+r} b^q -$$
$$- \int a^{q+r} b^p - \int a^{p+q+r}.$$

Ma, dalla relazione (h),

$$\int a^{p+q}b^r = \int a^{p+q} \cdot \int a^r - \int a^{p+q+r},$$

$$\int a^{p+r}b^q = \int a^{p+r} \cdot \int a^q - \int a^{p+q+r},$$

$$\int a^{q+r}b^p = \int a^{q+r} \cdot \int a^p - \int a^{p+q+r}.$$

Così, si ha definitamente

$$\int a^p b^q c^r = \int a^p \cdot \int a^q \cdot \int a^r - \int a^{p+q} \cdot \int a^r -$$

$$- \int a^{p+r} \cdot \int a^q - \int a^{q+r} \cdot \int a^p + 2\int a^{p+q+r} \ldots\ldots (l);$$

ovvero, ancora

$$\int a^p b^q c^r = S_p \cdot S_q \cdot S_r - S_{p+q} \cdot S_r - S_{p+r} \cdot S_q -$$

$$- S_{q+r} \cdot S_p + 2S_{p+q+r} \ldots (m).$$

Nel caso di $p = q = r$ quest' espressione si riduce a

$$\int a^p b^p c^p = \frac{1}{6}\left[(S_q)^3 - 3S_{2p} \cdot S_p + 2S_{3p} \right] \ldots\ldots (n),$$

e nel caso solamente di $q = r$, essa diviene

$$\int a^p b^q c^q = \frac{1}{2}\left[S_p(S_q)^2 - 2S_{p+q} \cdot S_q - S_{2q} \cdot S_p + 2S_{p+2q} \right] \ldots\ldots (o).$$

14. Simili condizioni ci farebbero trovare per prodotto delle quattro somme delle potenze $\int a^p$, $\int a^q$, $\int a^r$, $\int a^s$, l' espressione

$$\int a^{p+q}b^r c^s + \int a^{p+r}b^q c^s + \int a^{p+s}b^q c^r$$

$$+ \int a^{q+r}b^p c^s + \int a^{q+s}b^p c^r + \int a^{r+s}b^p c^q$$

$$+ \int a^{p+q}b^{r+s} + \int a^{p+r}b^{q+s} + \int a^{p+s}b^{q+r}$$

$$+ \int a^{p+q+r}b^s + \int a^{p+q+s}b^r + \int a^{p+r+s}b^q$$

$$+ \int a^{q+r+s}b^p + \int a^{p+q+r+s} + \int a^p b^q c^r d^s;$$

donde si deduce

$$\int a^p b^q c^r d^s = \int a^p \cdot \int a^q \cdot \int a^r \cdot \int a^s - \int a^{p+q} \cdot \int a^r \cdot \int a^s -$$

$$- \int a^{p+r} \cdot \int a^q \cdot \int a^s - \int a^{p+r} \cdot \int a^q \cdot \int a^s -$$

$$-\int a^{q+r}\,.\int a^{p}\,.\int a^{s}-\int a^{q+s}\,.\int a^{p}\,.\int a^{r}-$$

$$-\int a^{r+s}\,.\int a^{p}\,.\int a^{q}+\int a^{p+q}\,.\int a^{r+s}+$$

$$+\int a^{p+r}\,.\int a^{q+s}+\int a^{p+s}\,.\int a^{q+r}+$$

$$+2\int a^{p+q+r}\,.\int a^{s}+2\int a^{p+q+s}\,.\int a^{r}+$$

$$+2\int a^{p+r+s}\,.\int a^{q}+2\int a^{q+r+s}\,.\int a^{p}-$$

$$-6\int a^{p+q+r+s}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(p).$$

Se si fa $p=q=r=s$, la funzione a quattro esponenti diventerà $24\int a^{p}b^{p}c^{p}d^{p}$, e si avrà

$$\int a^{p}b^{p}c^{p}d^{p}=\frac{1}{24}\left\{\left(\int a^{p}\right)^{4}-6\int a^{2p}.\left(\int a^{p}\right)^{2}+\right.$$

$$\left.+3\left(\int a^{2p}\right)^{2}+8\int a^{3p}.\int a^{p}-6\int a^{4p}\right\},$$

il che equivale a

$$\int a^{p}b^{p}c^{p}d^{p}=\frac{1}{24}\left\{\left(S_{p}\right)^{4}-6S_{2p}.\left(S_{p}\right)^{2}+3\left(S_{2p}\right)^{2}+\right.$$

$$\left.+8S_{3p}\,.\,S_{p}-6S_{4p}\right\}\ldots.(q),$$

impiegando la notazione delle somme delle potenze. I casi di eguaglianza di due o tre esponenti possono dedursi senza difficoltà dall'espressione generale (p).

15. Non ci arresteremo alla valutazione delle funzioni di cinque ovvero di un maggior numero di esponenti, le quali non presentano altra difficoltà che la prolissità delle formule; ciò che precede basta alla applicazioni della quali i seguenti esempi ci daranno un' idea.

Esempio I. *Si domanda la relazione che deve esistere tra i coefficienti dell' equazione del terzo grado perchè la somma di due radici sia eguale a zero.*

Sia l'equazione generale

$$x^{3}-A_{1}x^{2}+A_{2}x-A_{3}=0;$$

rappresentiamo le radici con a, b, c; le somme di queste radici, prese due a due, essendo $a+b$, $a+c$, $b+c$, si tratta di determinare tra A_{1}, A_{2}, A_{3} una relazione tale che si abbia

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0;$$

sviluppando il prodotto, viene

$$a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc,$$

vale a dire

$$\int a^2b+2abc.$$

Paragonando con la formula (h), si ha

$$\int a^2b=S_1 . S_2-S_3.$$

Ma, dalle espressioni generali (a)

$$S_1=A_1,\ S_2=A_1S_1-2A_2,\ S_3=A_1S_2-A_2S_1+3A_3;$$

così

$$S_1 . S_2=\left(A_1\right)^3-2A_1A_2,\ S_3=\left(A_1\right)^3-3A_1A_2+3A_3;$$

e per conseguenza,

$$\int a^2b=A_1A_2-3A_3;$$

osservando che $2abc=2A_3$, viene definitivamente

$$(a+b)(a+c)(b+c)=A_1A_2-A_3.$$

La relazione domandata è dunque

$$A_1A_2-A_3=0,$$

ovvero

$$A_1A_2=A_3.$$

Ne resulta da ciò, che qualunque equazione completa del terzo grado, nella quale il prodotto dei due primi coefficienti è eguale al terzo, ha due radici eguali e di segni contrari, allorquando però essa offre delle variazioni di segni.

Esempio II. *Si domanda qual relazione deve esistere tra i coefficienti di un' equazione del quarto grado*

$$x^4-A_1x^3+A_2x^2-A_3x+A_4=0,$$

perchè il prodotto di due delle sue radici sia eguale al prodotto delle due altre

Indichiamo le quattro radici con a, b, c, d, i loro prodotti, due a due, essendo

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

le sole differenze capaci di essere zero sono

$$ab-cd,\quad ac-bd,\quad ad-bc;$$

donde resulta l' equazione

$$(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc)=0,$$

della quale bisogna esprimere il primo membro in funzione dei coefficienti A_1, A_2, A_3, A_4.

Lo sviluppo dei prodotti prova che questo primo membro è identico con

$$\int a^3bcd-\int a^2b^2c^2,$$

facendo tre coefficienti eguali all'unità e il quarto eguale a 3 nella formula (p), sostituendo 2 invece di p nella formula (n), e sostituendo alle somme delle potenze i loro valori in somme di prodotti, si troverà, fatte tutte le riduzioni

$$\int a^3bcd-\int a^2b^2c^2=\left(A_1\right)^2A_4-\left(A_3\right)^2;$$

il che dà per la relazione domandata

$$\left(A_1\right)^2A_4=\left(A_3\right)^2.$$

Così, ogni equazione completa del quarto grado, nella quale il quadrato del terzo coefficiente è eguale al prodotto del quadrato del primo coefficiente per l'ultimo, ha radici tali che il prodotto di due tra esse è eguale al prodotto delle due altre.

ESEMPIO III. *Si domanda un' equazione le cui radici siano i quadrati delle radici di un' equazione qualunque del terzo grado,*

$$x^3-A_1x^2+A_2x-A_3=0.$$

Indichiamo con a, b, c le radici della proposta; quelle dell' equazione cercata saranno a^2, b^2, c^2; e se rappresentiamo quest' equazione con

$$z^3-A'_1z^2+A'_2z-A'_3=0,$$

il primo coefficiente A'_1 sarà $a^2+b^2+c^2$ ovvero $\int a^2$; il secondo A'_2 sarà la somma dei prodotti due a due di a^2, b^2, c^2 ovvero $\int a^2b^2$; e finalmente il terzo coefficiente A'_3 dovendo essere eguale al prodotto di tutte le radici, sarà $a^2b^2c^2=(A_3)^2$. Avremo perciò le relazioni

$$A'_1=\int a^2,\ A'_2=\int a^2b^2,\ A'_3=\left(A_3\right)^2.$$

Sia, per esempio particolare,

$$x^3-7x+6=0,$$

abbiamo in questo caso

$$A_1=0,\quad A_2=-7,\quad A_3=-6.$$

Sostituendo questi valori nell' espressioni (a), troveremo

$$S_1=0,\quad S_2=14,\quad S_3=-18,\quad S_4=98;$$

il che ci fa conoscere, per mezzo della formula (i),

$$2\int a^2b^2=\left(S_2\right)^2-S_4=98;$$

donque

$$A'_1 = \int a^2 = S_2 = 14,$$

$$A'_2 = \int a^2 b^2 = 49,$$

$$A'_3 = (A_3)^2 = 36.$$

Così l' equazione

$$z^3 - 14z^2 + 49z - 36 = 0$$

ha per radici i quadrati delle radici della proposta. Si formerebbe nella medesima maniera l'equazione a qualunque potenza delle radici di ogni equazione proposta qualunque ne sia il grado.

Esempio IV. *Un' equazione del terzo grado essendo data, si domanda di costruire con i suoi coefficienti, i coefficienti di un' altra equazione, le cui radici siano i quadrati delle differenze delle radici della proposta.*

Siano a, b, c le tre radici dell' equazione;

$$x^3 - A_1 x^2 + A_2 x - A_3 = 0.$$

Sappiamo (*Vedi* Equazione) che l'equazione domandata ai quadrati delle differenze sarà del grado $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$; così, potremo rappresentarla con

$$x^3 - A'_1 x^2 + A'_2 x - A'_3 = 0.$$

Osserviamo che se le somme delle potenze delle radici di quest'ultima fossero conosciute, sarebbe facile dedurne i valori dei coefficienti cercati A'_1, A'_2, A'_3, con l' aiuto delle relazioni generali (a), mentre queste relazioni danno per i valori delle somme dei prodotti in somme delle potenze, le espressioni

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = S_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2A_2 = S_1 A_1 - S_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3A_3 = S_1 A_2 - S_2 A_1 + S_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4A_4 = S_1 A_3 - S_2 A_2 + S_3 A_1 - S_4 \ldots\ldots\ldots \\ 5A_5 = S_1 A_4 - S_2 A_3 + S_3 A_2 - S_4 A_1 + S_5 \ldots \\ \text{ec.} = \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (r).$$

Ora, le radici di quest' equazione dovendo essere i quadrati delle differenze delle radici a, b, c della proposta, sono rappresentate con

$$(a-b)^2, \quad (a-c)^2, \quad (b-c)^2.$$

Così, indicando con S'_1 la loro somma, con S'_2 la somma dei loro quadrati, e con S'_3 quella dei loro cubi, si ha

$$S'_1 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2,$$

$$S'_2 = (a-b)^4 + (a-c)^4 + (b-c)^4,$$

$$S'_3 = (a-b)^6 + (a-c)^6 + (b-c)^6.$$

La questione si riduce perciò a trovare il valore delle quantità S'_1, S'_2, S'_3, in funzioni simmetriche delle basi a, b, c, mentre queste funzioni sono sempre riducibili ai coefficienti dati A_1, A_2, A_3. Una volta le quantità S'_1, S'_2, S'_3 conosciute, le espressioni (r) faranno trovare i coefficienti cercati A'_1, A'_2, A'_3.

Gli sviluppi dei binomi ci provano, che

$$\left.\begin{aligned} S'_1 &= 2\int a^2 - 2\int ab \ldots\ldots \\ S'_2 &= 2\int a^4 - 4\int a^3 b + 6\int a^2 b^2 \ldots\ldots \\ S'_3 &= 2\int a^6 - 6\int a^5 b + 15\int a^4 b^2 - 20\int a^3 b^3 \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (s);$$

e dalle formule (h) ed (i), abbiamo

$$\int a^3 b = S_3 \,.\, S_1 - S_4,$$

$$\int a^2 b^2 = \frac{(S_2)^2 - S_4}{2},$$

$$\int a^5 b = S_5 \,.\, S_1 - S_6,$$

$$\int a^4 b^2 = S_4 \,.\, S_2 - S_6,$$

$$\int a^3 b^3 = \frac{(S_3)^2 - S_6}{2};$$

di più

$$\int a^2 = S_2, \quad \int a^4 = S_4, \quad \int a^6 = S_6, \quad \int ab = A_2.$$

Sostituendo questi valori nell' espressioni (s), esse diventano

$$\left.\begin{aligned} S'_1 &= 2S_2 - 2A_2 \ldots\ldots \\ S'_2 &= 3S_4 - 4S_1 \,.\, S_3 + 3(S_2)^2 \ldots\ldots \\ S'_3 &= 3S_6 - 6S_1 \,.\, S_5 + 15S_2 \,.\, S_4 - 10(S_3)^2 \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (t).$$

I valori di S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, potendo essere considerati come cogniti per mezzo dell' espressioni (a), avremo definitivamente, in virtù dell' espressioni (r),

$$\left.\begin{aligned} A'_1 &= S'_1 \ldots\ldots \\ A'_2 &= \frac{S'_1 A'_1 - S'_2}{2} \ldots\ldots \\ A'_3 &= \frac{S'_1 A'_2 - S'_2 A'_1 + S'_3}{3} \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (u).$$

Prendiamo per esempio di applicazione l'equazione

$$x^3-6x-7=0;$$

avremo paragonando con la formula generale,

$$x^3-A_1x^2+A_2x-A_3=0,$$

$$A_1=0,\quad A_2=-6,\quad A_3=7.$$

Calcolando con questi valori e l'espressioni (a), le sei prime somme delle potenze, osservando che tutte le somme dei prodotti A_4, A_5, A_6, ec., al di sopra di A_3 sono nulli, troveremo

$$S_1=0,\ S_2=12,\ S_3=21,\ S_4=72,\ S_5=210,\ S_6=579.$$

Sostituendo quest' ultimi valori nell' espressioni (t), verrà

$$S'_1=36,\quad S'_2=648,\quad S'_3=10287;$$

e mettendo questi nell'espressioni (u), otterremo definitivamente, per i coefficienti domandati,

$$A'_1=36,\quad A'_2=324,\quad A'_3=-459.$$

L' equazione ai quadrati delle differenze della proposta è perciò

$$x^3-36x^2+324x+459=0.$$

16. Il metodo che abbiamo seguito può facilmente estendersi all'equazioni di tutti i gradi; ma siccome i calcoli diventano impraticabili, per la loro eccessiva lunghezza, fino dal quinto grado, ci contenteremo d' indicare quest' estensione per l' equazioni del quarto grado.

Sia l' equazione generale del quarto grado

$$x^4-A_1x^3+A_2x^2-A_3x+A_4=0.$$

L' equazione ai quadrati delle differenze delle sue radici dovendo essere del grado $\frac{4.3}{2}=6$, le daremo la forma

$$x^6-A'_1x^5+A'_2x^4+A'_3x^3+A'_4x^2-A'_5x+A_6=0.$$

Sviluppando, come l' abbiamo fatto sopra, le somme delle potenze delle radici di quest' equazione, si scuopre facilmente la seguente composizione

$$S'_1=3\int a^2-\ 2\int ab,$$

$$S'_2=3\int a^4-\ 4\int a^3b+\ 6\int a^2b^2,$$

$$S'_3=3\int a^6-\ 6\int a^5b+15\int a^4b^2-20\int a^3b^3,$$

$$S'_4 = 3\int a^8 - 8\int a^7 b + 28\int a^6 b^2 - 56\int a^5 b^3 + $$
$$+ 70\int a^4 b^4,$$

$$S'_5 = 3\int a^{10} - 10\int a^9 b + 45\int a^8 b^2 - 120\int a^7 b^3 + $$
$$+ 210\int a^6 b^4 - 252\int a^5 b^5,$$

$$S'_6 = 3\int a^{12} - 12\int a^{11} b + 66\int a^{10} b^2 - 220\int a^9 b^3 + $$
$$+ 495\int a^8 b^4 - 792\int a^7 b^5 + 924\int a^6 b^6.$$

Le formole (h) ed (i) danno la valutazione di tutte le funzioni simmetriche a due esponenti le quali entrano in queste espressioni; così potremo sempre trovare i valori numerici delle somme delle potenze S'_1, S'_2, ec., e si passerà da queste somme ai coefficienti A'_1, A'_2, ec., per mezzo dell'espressioni (r). I calcoli sono molto meno lunghi quando l'equazione proposta è mancante del secondo termine. Ma, in tutti i casi, è sempre più pronto di risolvere un'equazione del quarto grado con i processi diretti che di formare la sua equazione ai quadrati delle differenze; dimodochè questo metodo, che sembrava dovere annullare tutte le difficoltà della risoluzione dell'equazioni numeriche, non è realmente di verun soccorso nella pratica. (*Vedi* la parola Equazione.).

FUOCO (*Geom. Anal.*). Eulero chiama *fuoco* di una curva un punto che goda di questa proprietà, che la sua distanza da un punto qualunque della curva stessa sia una funzione razionale ed intera dell'ascissa di questo punto. Tale definizione è stata adottata in tutti i trattati di geometria analitica, quantunque sia essa ben lungi dall'esser soddisfacente. Infatti è facile il comprendere che se si riferisse la curva ad altri assi, potrebbe bene accadere che la distanza del fuoco da un punto qualunque della curva non fosse più una funzione razionale di una soltanto delle due coordinate di questo punto, talchè il fuoco allora non esisterebbe più, il che è manifestamente assurdo. Il sig. Bret, professore alla Facoltà delle scienze di Grenoble, ha modificato la definizione di Eulero in un articolo inserito nell'ottavo volume degli *Annales de mathématiques* di Gergonne; ma la sua nuova definizione era rimasta presso a poco ignota, finchè le difficoltà promosse dal sig. Comte intorno alla teoria dei fuochi non sono venute a richiamarla alla memoria dei geometri. Essa è la seguente: *si chiama fuoco di una curva un punto tale che la sua distanza da un punto qualunque di questa curva sia una funzione intera, razionale e del primo grado delle coordinate di questo punto.*

2. Risulta da questa definizione che, *se la curva ha un fuoco, esiste nel suo piano una retta tale che il rapporto delle distanze di ognuno dei punti della curva dal fuoco e da questa retta sia costante.* Infatti, la distanza del fuoco da un punto qualunque (x', y') della curva dovendo essere una funzione intera, razionale e del primo grado delle coordinate di questo punto, sarà data da un'espressione della forma

$$my' + nx' + p:$$

ma, attribuendo alle quantità m, n, p dei valori determinati, l'equazione

$$my+nx+p=0$$

rappresenta una retta, e la distanza del punto (x', y') da questa retta ha per espressione

$$\frac{my'+nx'+p}{\sqrt{(m^2+n^2)}};$$

dunque il rapporto di queste due distanze è la quantità costante

$$\sqrt{(m^2+n^2)}.$$

Questa retta, la cui esistenza è intimamente connessa con quella del fuoco, si chiama *direttrice*, e da ciò che precede si vede che la sua equazione si ottiene eguagliando a zero l'espressione della distanza del fuoco da un punto qualunque (x, y) della curva, e che il rapporto delle distanze di questo punto dal fuoco e dalla direttrice è eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti di x e di y nell'equazione della retta.

3. La reciproca del teorema precedente (n.° 2) è vera, vale a dire che *se una curva gode di questa proprietà che il rapporto delle distanze d'ognuno dei suoi punti da un punto fisso e da una retta fissa sia costante, questo punto sarà un fuoco, e la retta sarà per conseguenza la direttrice corrispondente.*

Infatti sia

$$my+nx+p=0$$

l'equazione della retta di cui si tratta, e siano x', y' le coordinate di un punto qualunque della curva proposta: la distanza di questo punto dalla retta sarà data dalla formula

$$\frac{my'+nx'+p}{\sqrt{(m^2+n^2)}}.$$

Ma, per ipotesi, il rapporto delle distanze del punto (x', y') dal punto fisso e dalla retta fissa deve essere una quantità costante k, dunque la prima di queste distanze avrà per espressione

$$\frac{k(my'+nx'+p)}{\sqrt{(m^2+n^2)}};$$

dunque essa è una funzione intera, razionale e del primo grado delle coordinate di un punto qualunque della curva; dunque il punto fisso è un fuoco.

4. Quali sono però le curve che hanno un fuoco?

Per rispondere a questo quesito basterà trovare la curva, le distanze di ciascun punto della quale da un punto fisso e da una retta fissa conservino sempre un rapporto costante $m:n$; poichè questa è la caratteristica che distingue le curve che hanno un fuoco da quelle che non lo hanno. Sia dunque DD' (*Tav.* CXLI, *fig.* 1) la retta data ed F il punto dato: si abbassi da F sopra DD' la perpendicolare Xx, si divida l'intervallo FA in due parti FO e AO proporzionali a m e a n, e nel punto O si alzi la perpendicolare Yy: finalmente si assumano come assi delle x e delle y le rette ortogonali xOX e yOY. Chiamando ora k la distanza FA, si avrà per costruzione

$$FO=\frac{mk}{m+n}, \qquad AO=\frac{nk}{m+n},$$

quantità che per brevità rappresenteremo con m' e n'. Ciò posto, siano x, y le coordinate di un punto qualunque M del luogo cercato: si avrà

$$FM=\sqrt{y^2+(x-m')^2}\ ,\quad MD=x+n'\ ,$$

donde, in virtù della condizione alla quale sono soggetti tutti i punti della curva, si ha

$$\frac{\sqrt{y^2+(x-m')^2}}{x+n'}=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}\ ,$$

e conseguentemente

$$n^2y^2+(n^2-m^2)x^2-2mnkx=0,$$

equazione della curva cercata. Ora una tale equazione essendo del secondo grado appartiene alle curve del secondo ordine, donde si conclude che *le sole curve del secondo ordine possono godere della proprietà di avere un fuoco.* Esse poi lo hanno tutte, perchè l'equazione di sopra trovata rappresenta un'ellisse, un'iperbola o una parabola, secondochè il rapporto $\frac{m}{n}$ è minore, maggiore, o eguale all'unità.

5. Problema. *Esprimere che una curva del second' ordine, la quale contenga uno o più coefficienti indeterminati, ha 1.° per fuoco un punto dato; 2.° per direttrice una retta data; 3.° che il rapporto delle distanze d'ognuno dei suoi punti dal fuoco e dalla direttrice è una quantità data.*

1.° Siano α e β le coordinate del punto che deve esser un fuoco: l'espressione della distanza di questo punto da un punto qualunque (x, y) della curva sarà della forma $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$, e siccome questa funzione deve essere intera, razionale e del primo grado rapporto a x e y, così sarà equivalente ad un'espressione della forma $my+nx+p$, talmentechè si avrà

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}=my+nx+p\ \ldots\ (1).$$

Ma questa equazione ha luogo tra le coordinate di un punto qualunque della curva che si considera, dunque non è essa in sostanza altro che la sua equazione. Di questa equazione si fa spesso uso nelle ricerche nelle quali si considerano più particolarmente, il fuoco, la direttrice e gli assi, e dicesi *equazione ai fuochi.*

Ciò posto, sia

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ \ldots\ldots\ (2)$$

l'equazione della curva proposta, bisognerà che quando si daranno dei valori convenienti alle indeterminate si possano rendere identiche le equazioni (1) e (2); per conseguenza si svilupperà l'equazione (1), si divideranno tutti i suoi termini per l'ultimo, si farà la stessa operazione sull'equazione (2), ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x e di y nelle due equazioni risultanti, si formeranno le seguenti cinque equazioni di condizione:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{1-m^2}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{A}{F}\ldots\ldots\ldots (a)\\ -\frac{2mn}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{B}{F}\ldots\ldots\ldots (b)\\ \frac{1-n^2}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{C}{F}\ldots\ldots\ldots (c)\\ -\frac{2(\beta+mp)}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{D}{F}\ldots\ldots\ldots (d)\\ -\frac{2(\alpha+np)}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{E}{F}\ldots\ldots\ldots (e)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (3).$$

Si elimineranno m, n, p tra queste cinque equazioni e si otterranno così due equazioni di condizione tra i coefficienti della (2): se dunque il numero di questi coefficienti è maggiore di due, esisterà un'infinità di curve del secondo ordine, che tutte avranno per fuoco il punto dato.

Si noti da tutto ciò che dare un fuoco determinato ad una curva equivale a sottoporre i suoi coefficienti a due condizioni.

2.° Se è data la direttrice, saranno noti i rapporti $\frac{n}{m}$ e $\frac{p}{m}$; perciò, eliminando m, α e β dalle equazioni (3), si otterranno egualmente due equazioni di condizione tra i coefficienti indeterminati dell'equazione (2). La cognizione della direttrice, come quella del fuoco, equivale dunque a quella di due punti ordinarj. Per conseguenza se sarà dato il fuoco e la direttrice, nell'equazione (2) non dovrà esservi più che un solo coefficiente del quale possa disporsi arbitrariamente.

3.° Se il rapporto delle distanze di ciascun punto della curva dal fuoco e dalla direttrice è una quantità data k, si farà

$$m^2+n^2=k^2,$$

ed eliminando m, n, p, α e β tra questa equazione e le cinque equazioni (3), si otterrà un'equazione di condizione tra i coefficienti della (2).

Dalle prime tre delle equazioni (3) si trae

$$B^2-4AC=\frac{4F^2}{(\alpha^2+\beta^2-p^2)^2}(m^2+n^2-1);$$

talchè l'equazione (1) rappresenterà un'ellisse, un'iperbola o una parabola, secondochè si avrà

$$m^2+n^2<1,\quad >1,\quad o\quad =1.$$

6. Troviamo ora il fuoco in ciascuna delle tre curve coniche. L'equazione dell'ellisse riferita ai suoi tre assi principali è

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0\ldots\ldots(4):$$

bisognerà dunque, perchè questa equazione possa essere identica colla (1), che essa non contenga il rettangolo delle variabili, il che esige che m o n sia nullo: sup-

ponendo pertanto m nullo, l'equazione (d) darà pure $\beta=0$, e sostituendo questi valori nelle equazioni (a), (b), (c), si ridurranno esse alle seguenti

$$\frac{1}{\alpha^2-p^2}=-\frac{1}{b^2}\ldots\ldots\ldots(a')$$

$$\frac{1-n^2}{\alpha^2-p^2}=-\frac{1}{a^2}\ldots\ldots\ldots(c')$$

$$\alpha+np=0\ldots\ldots\ldots(e')$$

dalle quali, eliminati secondo le note regole n e p, si avrà finalmente

$$\alpha=\pm\sqrt{(a^2-b^2)}.$$

Da questo resultato si vede che l'ellisse ha due fuochi situati sull'asse maggiore dall'una e dall'altra parte del centro a una distanza eguale a $\sqrt{(a^2-b^2)}$.

La distanza di ciascun fuoco dal centro si chiama *eccentricità*.

Se invece di supporre nullo m avessimo supposto nullo n nell'equazione $mn=0$, dopo una serie di operazioni simili alle precedenti avremmo in fine trovato $\alpha=0$ e $\beta=\pm\sqrt{(b^2-a^2)}$: ma essendo $a>b$, il valore di β sarebbe immaginario, donde si conclude che nell'ellisse non vi sono altri fuochi che quelli determinati di sopra.

Per ottenere ora l'equazione della direttrice corrispondente a ciascun fuoco, basterà sostituire nell'equazione $my+nx+p=0$ i valori trovati per m, n e p, che essendo $m=0$, $n=\pm\frac{\alpha}{a}$, $p=\pm a$, daranno

$$x=\pm\frac{a^2}{\alpha}$$

per l'equazione della direttrice, ove il segno superiore appartiene alla direttrice del fuoco positivo e il segno inferiore a quella del fuoco negativo.

Un calcolo del tutto simile per l'equazione $a^2y^2+b^2x^2+a^2b^2=0$ dell'iperbola ci condurrebbe a trovare pei fuochi e per le direttrici di questa curva

$$\beta=0,\quad \alpha=\pm\sqrt{(a^2+b^2)},\quad x=\pm\frac{a^2}{\alpha}.$$

Per la parabola, la cui equazione riferita al vertice è $y^2=2rx$, la prima delle equazioni (3) diviene

$$\frac{1-m^2}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{1}{0},$$

la quale, perchè possa esser soddisfatta, esige che si abbia $\alpha^2+\beta^2-p=0$, e quindi $m=0$: la quarta delle stesse equazioni (3) dà $\beta=0$, donde $\alpha=p$: la terza dà $n=1$, valore che sostituito nella quinta dà $p=\frac{r}{2}$: donde finalmente si trova che la parabola non ha che un solo fuoco posto sul suo asse alla distanza di $\frac{r}{2}$ dal suo vertice. In quanto alla direttrice, la sua equazione si ottiene sosti-

tuendo i valori $m=0$, $n=1$, $p=\frac{r}{2}$, nell'equazione $my+nx+p=0$, e si trova infatti $x=-\frac{r}{2}$.

I fuochi nella sezioni coniche godono di parecchie belle proprietà, per le quali rimanderemo il lettore ai diversi trattati di geometria analitica che estesamente ne parlano: e in particolare si consulti L'Hôpital, *Traité analytique des sections coniques*, Parigi, 1720, in-4; Lefebure de Fourcy, *Leçons de géométrie analytique*, Parigi, 1838, in-8; Cirodde, *Leçons de géométrie analytique*, Parigi, 1843, in-8, ec.

FUOCO (*Ott.*). In ottica dicesi *fuoco di una lente*, *di uno specchio*, ec. il punto in cui vanno a riunirsi i raggi luminosi dopo essere stati refratti o reflessi da una lente o da uno specchio. Si vedano in questo Dizionario gli articoli CATOTTRICA, LENTE e SPECCHIO, ove si danno le regole opportune per trovare il fuoco in tutti i casi.

FUSO (*Geom.*). Nome che alcuni geometri hanno dato al solido generato da una curva che giri intorno alla sua ordinata: altri hanno chiamato *fuso* il solido che una curva forma girando intorno alla sua tangente al vertice: altri infine hanno così indicato il solido indefinito che descrive una curva d'infinita lunghezza, come la parabola o l'iperbola, girando intorno al suo asse. In ognuno di questi casi, essendo π il rapporto della circonferenza al diametro e indicando con x l'asse di rotazione e con y le ordinate a quest'asse, si avrà per l'elemento del solido $\pi y^2 dx$: donde poi, conosciuto che siasi mediante l'equazione della curva il valore di y dato per x, si avrà l'espressione generale del solido per mezzo di una integrazione. L'elemento della superficie sarà $2\pi y\sqrt{(dy^2+dx^2)}$, che s'integrerà nello stesso modo quando sarà possibile.

Più generalmente s'indica oggi col nome di *fuso* un segmento di superficie sferica disegnato sopra un piano per esser poi incollato sopra una palla nella fabbricazione dei *globi celesti* e *terrestri*.

FUSO (*Astron.*). Nome di una costellazione più comunemente conosciuta sotto il nome di *Chioma di Berenice*.

G

GALASSIA (*Astron.*). Nome che i Greci davano a quella striscia bianca e luminosa che gira tutto il cielo, e che da noi si chiama *Via lattea*.

GABRIELLI (Pietro Maria), nato a Siena il 1°. Aprile 1643, si applicò con successo allo studio dell'astronomia e della botanica. Divenne professore di quest'ultima scienza nella città nativa, vi fondò nel 1696 l'accademia dei *Fisiocritici*, col nome di *Colonia arcadica fisiocritica*, e costrui nella sala in cui tale accademia si adunava una bella meridiana, che nominò *Heliometro fisiocritico*. Questo dotto, morto il 19 Dicembre 1705; ha lasciato un' opera intitolata: *Heliometro fisiocritico*, *ovverò la meridiana sanese dedicata all' illustre signore cavaliere Marcello Biringucci*, Siena, 1703. Attendeva ancora a comporre un *Trattato delle effemeridi*, che la morte gl' impedì di condurre a termine.

GADROIS (Claudio), parigino, morto nel 1678 in età di anni 36. Dedicò all'Accademia delle Scienze un libro intitolato: *Système du monde*, Parigi, 1675, in-12, in cui espone alcune nuove dimostrazioni del moto della terra, e tratta di diversi soggetti di fisica, relativi alla gravità, alla luce, ec.

GALILEI (Galileo). Gli uomini d'ingegno, che sotto differenti punti di vista hanno aperto allo spirito umano nuove vie, non possono esser tra loro posti a confronto; ognuno di essi si presenta alla storia della scienza e all' ammirazione del mondo con un carattere suo proprio, col segno augusto di una missione speciale. Dobbiamo dunque lasciare alle amplificazioni accademiche il lusso sterile dei paralleli impossibili, che tanto spesso a scapito della ragione lo spirito di pedantismo cerca con premura di formare. Cartesio e Galileo ebbero la aventura di non comprendersi reciprocamente, ma questa circostanza non ha potuto stabilire nè opposizione nè analogia tra le dottrine e le produzioni scientifiche di questi due grandi uomini; nè può d' altronde supporsi che sentimenti di gelosia indegni del loro ingegno abbiano in nulla contribuito ad ispirar loro quell'allontanamento, la cui causa deve per sempre restar nascosta nei profondi misteri del cuore umano.

Il 18 Febbrajo 1564 nacque in Pisa l' illustre Galileo da Vincenzo Galilei, nobile fiorentino, e da Giulia Ammannati. I suoi genitori non possedevano che una mediocre fortuna; ma suo padre, versatissimo nelle cognizioni matematiche, non tardò ad apprezzare i talenti del figlio; diede ogni cura alla sua educazione, e di buon'ora gl' inspirò il gusto della scienza ch' egli amava, e di cui è noto come facesse felici applicazioni alla teoria della musica. Maravigliosa fu l'infanzia di Galileo, e come tutti gli uomini di un ingegno superiore, che sembrano avere un certo presentimento del loro avvenire, non considerò per così dire che come un giuoco le cognizioni elementari che gli venivano insegnate, fino al momento in cui la scienza, ch' ei doveva arricchire con iscoperte immortali, offrì un più nobile alimento a' suoi studj. Ma, strana cosa! egli aveva già penetrato le proprietà del pendolo, osservando, si narra, le oscillazioni regolate e periodiche di una lampada sospesa alla volta di una chiesa di Pisa, scoperta ch'ei pubblicò in un' età più avanzata, e non aveva ancora compreso l' importanza delle

matematiche. » Ei non aveva il minimo desiderio d' impararle, dice uno dei » principali suoi biografi, non comprendendo in che i triangoli e i circoli potes» sero servire alla filosofia. » Imperocchè è da aversi presente che quello spirito indipendente e creatore occupavasi allora con passione delle discussioni filosofiche; e in quell'epoca, in cui le dottrine aristoteliche dominavano nelle scuole, in cui la doppia influenza del potere spirituale e del potere temporale veniva in soccorso del loro vecchio dispotismo, Galileo, in età appena di diciotto anni, aveva osato attaccarle in piena università. Ma finalmente diverse circostanze decisero della sua vocazione, ed ei si applicò allo studio delle matematiche con tutto l'ardore di cui era capace. Appena giunto al possesso delle verità che la scienza gli aveva rivelato, il giovine Galileo, preso d'ammirazione e di gioja, lanciossi da maestro nell'arringo nel quale lo chiamava il suo genio. Abbandonò allora la medicina e gli studj letterarj che gli si facevano fare, per darsi interamente a quelle sublimi speculazioni nelle quali la libertà e la novità del suo modo di discutere gli attirarono in poco tempo una reputazione prodigiosa. Tali furono la rapidità e lo splendore de' suoi progressi, che in età appena di venticinque anni, Guido Ubaldi, suo maestro ed amico, ed i Medici suoi protettori, gli fecero conferire la cattedra di matematiche nella università di Pisa.

Non considerando le disgrazie che afflissero i vecchi anni di Galileo, e di cui ci sarà impossibile di non parlare in appresso, noi crediamo di non doverci per ora occupare che della sua vita scientifica, perchè è appunto sotto il rapporto dei suoi nobili lavori che noi dobbiamo specialmente considerarlo in questa rapida notizia biografica.

Colpito dal metodo che aveva impiegato Archimede per determinare le proporzioni di una lega d' oro e d' argento, Galileo volle renderlo di una applicazione più usuale e più comoda, e immaginò uno strumento di cui la bilancia idrostatica non è che un perfezionamento. Poco tempo dopo fece a Pisa, alla presenza di un immenso concorso di spettatori, la sua vittoriosa esperienza sulla caduta dei gravi, in opposizione manifesta coi principj stabiliti da Aristotile. Abbiamo altrove consacrato un articolo storico speciale a questa importante scoperta, e perciò non crediamo di dover qui ritornare sulle particolarità che la riguardano. *Vedi* Accelerazione della caduta dei gravi.

Ritirato, nel 1597, in una città dello stato di Venezia, a motivo delle persecuzioni che attirato aveva a Galileo la dimostrazione della nuova sua teoria, scrisse successivamente per gli scolari che la sua fama continuamente chiamava presso di lui, dei trattati sui diversi rami delle matematiche, trattati però che i progressi della scienza hanno reso in seguito meno importanti. In quell' epoca inventò il termometro, o almeno ne fece dei saggi che dovettero avere poca celebrità se questa invenzione fu attribuita a Drebbel: ma Galileo meritò certamente di esser creduto sulla sua parola (*Vedi* Drebbel). Produsse pure allora un altro strumento al quale diede il nome di *compasso militare*, perchè era principalmente destinato all' uso degl' ingegneri militari: è questo il *compasso di proporzione*, e si è egualmente disputato a Galileo il merito di questa invenzione, che fu attribuita a Byrge; ma è oggigiorno stabilito in modo indubitato che non vi è alcuna analogia tra i due istrumenti. *Vedi* Byrge.

Quantunque fino da quell' epoca il nome di Galileo brillasse già di un grande splendore nell' Europa dotta, non fu realmente che dopo le importanti scoperte astronomiche, fatte nei primi anni del secolo XVII, ch'ei giunse a quell'alto grado di fama che la posterità gli ha conservato. Egli entrò nei lavori di quel ramo della scienza colla sua dissertazione sulla stella che comparve improvvisamente nel 1604 nella costellazione del Serpentario. Dimostrò, contro l' opinione della filosofia peripatetica, che quel corpo celeste, che mandava uno splendore

straordinario, era molto al di là della pretesa regione elementare supposta dagli astronomi di quella scuola, e che era anco molto più lontano nello spazio di tutti gli altri corpi planetarj. Nel 1609, essendosi sparsa a Venezia la voce che un olandese aveva presentato al conte Maurizio di Nassau uno strumento di ottica che avvicinava considerabilmente gli oggetti i più lontani, Galileo, su questa vaga informazione, costruì il primo telescopio, e il primo che potesse servire alle osservazioni astronomiche. Era nel destino di questo grand' uomo di vedersi disputare ad una ad una tutte le sue scoperte, tutte le sue invenzioni, e di soffrire per la causa della verità. L' invenzione del telescopio divenne per lui una sorgente nuova di discussioni e di litigi che gli suscitò il pedantismo o la gelosia degli scienziati del suo tempo. Ma Galileo, nel suo *Nuncius Sidereus*, scritto nel quale annunziò al mondo i resultati di quella bella scoperta, racconta egli stesso con una nobile semplicità i numerosi saggi ai quali si diede per rendere utile alla scienza l' uso del *canocchiale a lunga vista* di cui aveva inteso parlare, e fu d' uopo d' una mala fede ben determinata per accusarlo di arrogarsi un onore che non gli apparteneva. Per confessione stessa di Galileo egli non è dunque, a parlar propriamente, l' inventore del telescopio; ma qual confronto può farsi tra lo strumento incompleto dell' ottico olandese, e quello per mezzo del quale Galileo potè leggere tante pagine importanti del gran libro del cielo? Perchè quegli che in Olanda riunì a caso delle lenti di diseguale curvatura, se fu il vero inventore del telescopio, non lo rivolse subito verso il cielo come Galileo, e non fece così la più bella e la più sublime applicazione di questo strumento?

Comunque sia, ajutato dal telescopio che da sè stesso avea costruito, Galileo fu il primo di tutti che potè esaminare la superficie della luna e descriverne le forme. Per la prima volta gli sguardi di un mortale videro con stupore le alte montagne e le valli profonde che solcano i fianchi di quel pianeta. Poco dopo osservò Venere, di cui le fasi provano ad evidenza la sua forma sferica, e scorse i quattro satelliti di Giove, che nel suo corso accompagnano quell' immenso pianeta; vide la Via lattea, le nebulose, e quelle innumerevoli stelle troppo lontane per essere scorte ad occhio nudo. Maravigliato di quel maestoso e nuovo aspetto del cielo, di cui niuno astronomo prima di lui aveva goduto, Galileo pose a parte del suo entusiasmo e della sua gloria l' Europa dotta comunicandole queste preziose osservazioni, che in breve era per estendere a nuovi oggetti e che dovevano finalmente confermare le teorie di Copernico. Galileo, osservando Saturno, riconobbe che esso si presentava talvolta sotto la forma di un semplice disco, tal altra accompagnato da due appendici che sembravano esser due piccoli pianeti. Ma la forza del suo strumento non era sufficiente per permettergli di determinare la costituzione singolare di quell' immenso corpo celeste e di vedere l'anello dal quale è circondato. Questa fortuna e questa gloria era riserbata ad Huygens. A queste grandi e importanti scoperte di Galileo devesi aggiungere quella delle macchie del sole, dalle quali rilevò la rotazione di quell' astro. Dall' osservazione di quelle che si osservano costantemente nella luna trasse la conseguenza che questo satellite ci presenta sempre presso a poco la stessa faccia; ed onta di una specie di oscillazione periodica che esso prova, ed alla quale Galileo diede il nome di *librazione*. Colla stessa attitudine a scoprire le conseguenze delle cose, colla stessa perspicacia e profondità di giudizio, Galileo consacrò una gran parte della sua vita ad osservare i satelliti di Giove, per fondare una teoria dei loro movimenti che potesse esser poscia applicata alla soluzione del problema delle longitudini.

Un uomo dell' ingegno di Galileo, possedendo tanti fatti nuovi, non poteva lasciare a un altro l' onore immortale di trarre dalle sue scoperte la prova del

vero sistema del mondo. La dimostrazione scientifica della teoria di Copernico divenne l'oggetto costante de' suoi lavori, il soggetto de' suoi scritti e delle conversazioni pubbliche nelle quali intartenevasi colle molte persone che l'alta sua fama attirava a visitarlo. Rigettò, come errori grossolani, le dottrine astronomiche insegnata fino allora, e fece fare alla scienza un progresso immenso, togliendo il sistema di Copernico dallo stato d'ipotesi, in cui forse sarebbe per lungo tempo rimasto senza l'invenzione del telescopio e senza le osservazioni che ne furono la conseguenza.

Copernico era stato esposto in Germania sul teatro allo scherno e alle derisioni del popolo; Galileo fu egualmente esposto al ridicolo de' suoi concittadini, che lo paragonarono ad Astolfo nella luna, come del pari Cartesio fu in seguito l'oggetto delle più vili persecuzioni in Olanda ove erasi refugiato. Tali sono, anco in tempi molto più illuminati, le triste circostanze che accompagnano ordinariamente la produzione della verità. L'esempio di questi tre grandi uomini non sembra provare che vi ha nel mondo un principio di menzogna che lotta costantemente contro l'umana intelligenza, e che cerca di arrestare il suo sviluppo, fintantochè la verità col vivo splendore della sua luce non abbia finalmente dissipato la densa caligine che la inviluppava?

In quell'epoca, Galileo aveva lasciato Venezia per tornare a Firenze. La protezione che per lungo tempo avevagli accordato la famiglia Medici gli avrebbe senza dubbio risparmiato le gravi ingiustizie e gl' infortunj che gli cagionarono il fanatismo delle antiche dottrine e il fanatismo religioso più pericoloso ancora e più potente. I nemici di Galileo, per attaccare le sue opinioni, fecero dapprima proscrivere la dottrina di Copernico, come contraria al testo delle scritture. Galileo fu quindi citato personalmente avanti una commissione di teologi, che gli diede comunicazione della seguente dichiarazione: » Sostenere che il » sole è posto immobile nel centro del mondo, è un' opinione assurda, falsa in » filosofia, e formalmente eretica, come espressamente contraria alla sacra scrit» tura: sostenere che la terra non è posta nel centro dal mondo, che essa non è » immobile, che essa ha un movimento diurno di rotazione, è pure una propo» sizione assurda, falsa in filosofia, e almeno erronea rispetto alla fede. » In conseguenza di che fu proibito a Galileo di propagare in seguito l'opinione che in tal guisa era stata condannata.

Si comprenderà facilmente quale dovette essere il profondo dolore di quell'ingegno sommo, sul quale l'ignoranza gettava il velo rispettato della religione. Invano sottopose egli al Santo Ufizio gli argomenti i più favorevoli alla verità, invano dimostrò che la scrittura aveva dovuto parlare il linguaggio del volgo, e che il suo testo nulla aveva di contrario alla dottrina di Copernico: non si volle ascoltarlo e fu costretto a sottoporsi ad una decisione non meno erronea che illegale, poichè la Chiesa, depositaria di un ordine di verità che nulla hanno di comune colle verità scientifiche, non aveva diritto nessuno di mischiarsi in una questione del dominio esclusivo della scienza.

Il desiderio di far trionfare la giusta causa della verità non permise a Galileo di mantenere la sua promessa, ed è noto come nel suo celebre dialogo sopra i due sistemi del mondo, nel quale mette a fronte un peripatetico con un copernicano, tutto il vantaggio della disputa rimane a quest' ultimo. Malgrado le precauzioni che aveva prese di comparire egli stesso estraneo a questo resultato, e di fare approvare anticipatamente il suo libro dal papa, l'invidia che la sua gloria gli attirava non lo lasciò in riposo; e denunziato all' Inquisizione fu obbligato, in età di sessantanove anni, e afflitto da dolori reumatici, a comparire avanti a quel terribile tribunale. Non si può leggere senza restar commossi il racconto che egli stesso fa in una delle sue lettere del suo tristo viaggio da Firenze

a Roma e delle persecuzioni che dovette soffrire. Dopo numerosi interrogatorj in presenza dei giudici che gli erano stati assegnati, le sue opinioni furono proscritte, ed egli stesso condannato alla prigione per un tempo indefinito; e si ebbe pure l'audacia di dettargli la formula di abjura, ch'ei fu costretto a pronunziare nei seguenti termini: » Io, Galileo, nel settantesimo anno di mia età, costituito » prigione ed in ginocchio avanti alle vostre eminenze, avendo avanti i miei » occhi i Santi Evangeli che tocco colle mie proprie mani, abjuro, maledico e » detesto l'errore e l'eresia del moto della terra ». Fu il 22 Giugno 1630 che tant'uomo degnò umiliarsi in tal modo avanti all'invidia che l'avea perseguitato e all'ignoranza che l'avea condannato. Ma si narra che Galileo, grande ancora, ad onta di queste umiliazione, percotendo vivamente la terra col piede proruppe a mezza voce in tali accenti: *Eppure si muove*. Era questo l'ultimo grido della ragione oppressa.

Abbiamo cercato di compendiare le particolarità dolorose che riguardano questo avvenimento importante nella storia della scienza, ma che sono note a tutti. Affrettiamoci a dire che almeno i diritti sacri dell'umanità non furono più oltre violati nella persona di Galileo, e che nessun documento ci prova che egli abbia dovuto soffrire le crudeltà le quali si pretende che la Inquisizione usasse verso di lui. Gli si diede per prigione il palazzo dell'ambasciatore di Toscana, e alcuni anni dopo ricuperò interamente la sua libertà. L'indignazione che ancor dopo tanti anni non possiamo fare a meno di risentire all'aspetto dei mali dei quali fu oppresso quel vecchio illustre, scoppiò dappertutto fuori d'Italia e nel seno della Chiesa stessa; e in fine l'Inquisizione sola soffrirà nella posterità la vergogna di questo odioso attentato. Al conte di Noailles, ambasciatore di Francia a Roma, confidò Galileo i manoscritti degli ultimi suoi lavori, che furono stampati a Leide dagli Elzeviri: consistono questi in due dialoghi, nei quali creava per così dire una scienza nuova, determinando le leggi della resistenza dei solidi e quelle del moto accelerato dei gravi. Fu pure un francese, il padre Mersenne, che onorava del pari la scienza e la religione, il quale pubblicò il primo la meccanica di Galileo, ove si trova la prima dimostrazione delle leggi dell'equilibrio e quella del principio delle celerità virtuali.

Malgrado il peso degli anni e degl'infortuni che aveano turbato il suo aringo, il gran Galileo osservava ancora col coraggio che aveva nella sua gioventù, e continuava le sue tavole dei satelliti di Giove quando perdè la vista. Così tutte le sventure che torturar possono la vita piombarono su quest'uomo prodigioso, esempio sublime della rassegnazione e della costanza necessaria agli uomini che si consacrano al trionfo della verità. Ei non poteva più vedere il cielo, ma la sua parola calda e brillante lo spiegava ancora ai numerosi suoi discepoli e a tutte le persone che venivano a Firenze a recargli il tributo del loro rispetto e della loro ammirazione. Iddio pose finalmente un termine alle sue sventure chiamandolo a sè; e pel grande, pel sommo Galileo, cominciò l'immortalità il 9 Gennajo 1642, all'età di settantotto anni. Fu questo l'anno stesso in cui venne al mondo Newton. È doloroso il dover qui dire che le opere di Galileo, che formano una bibliografia considerabile, non siano mai state riunite tutte in una raccolta degna di tanto ingegno. Sarebbe questa un'impresa meritevole dell'attenzione dei dotti e della protezione di un governo illuminato.

GALLIMARD (Giovanni Edmo), morto in Parigi, sua patria, nel 1771, in età di 86 anni, si era dato specialmente allo studio delle matematiche. Ha lasciato parecchie opere elementari, delle quali citeremo: I *L'arithmétique démonstrative*; II *L'algèbre, ou l'arithmétique littérale démontrée*, 1740 in-8; III *Géométrie élémentaire d'Euclide*, con supplementi, 1736, 1749, in-12; IV. *La science du calcul numérique, ou arithmétique raisonnée*, 1750, in-12; V. *Les sections co-*

niques, et autres courbes, traitées profondément; 1752, in-8; VI *Méthode théorique et pratique d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie, mise à la portée de tout le monde*, 1758, in-16.

GALLO (Gaio o Gneo Sulpizio), questore in una provincia nell'anno di Roma 576, edile curule nel 581, e console nel 587, merita di essere rammentato nei fasti della scienza per essere stato il primo astronomo di un popolo guerriero in un secolo poco ancora incivilito. Narrasi che, nella seconda guerra di Macedonia, Sulpizio Gallo militando sotto Paolo Emilio calcolasse che la notte precedente al dì della battaglia in cui fu vinto Perseo sarebbe avvenuto un ecclisse di luna, e temendo che un tale improvviso fenomeno non avesse incusso terrore nei soldati gli adunasse e loro predicesse che la luna rimarrebbe ecclissata dalla seconda fino alla quarta ora della notte, precauzione che fu causa della vittoria. Bailly pensa che Gallo potesse avere attinto dai Greci il metodo del quale si servì per predire l'ora e la durata dell'ecclisse: ma considerando che l'osservazione più antica d'Ipparco è dell'anno 162 av. G. C., mentre la predizione di Gallo, la prima di tal genere presso i Romani, è indubitatamente dell'anno 168, epoca in cui le tavole d'Ipparco non erano per anche formate, conviene supporre che questo romano, non che Talete, si fossero serviti di alcun metodo orientale anteriore ad Ipparco, che non ci sia pervenuto. Credesi che scrivesse un trattato sugli ecclissi, e Cicerone loda molto la somma sua perizia nell'astronomia.

GALLUCCI (Giovanni Paolo), astronomo italiano, nato a Salò nel Bresciano, verso la metà del secolo XVI, fu uno dei primi membri dell'accademia fondata a Venezia nel 1593. Aveva inventato uno strumento col quale osservava facilmente i fenomeni del cielo tanto di giorno quanto di notte. I suoi scritti sono: I *De fabrica et usu hemisphaerii uranici tractatus*, Venezia, 1569, in-fol.; II *De Themate erigendo, parte fortunae, divisione zodiaci, dignitatibus planetarum, ec.* stampato con un'opera di Giovanni Hasfurt sulla stessa materia, Venezia, 1584; III *Theatrum mundi et temporis, ubi astrologiae principia cernuntur ad medicinam accomodata, geographica ad navigationem, ec.*, Venezia, 1589, in-4; tradotto in spagnuolo; IV *Della fabrica et uso del nuovo orologio universale, e del nuovo stromento per fare gli orologi solari*, Venezia, 1590, in-4; V *Speculum uranicum*, ivi, 1593, in-fol.; VI *De fabrica et usu novi horologii solaris, lunaris, sideralis et in parva pyxide*, ivi, 1595, in-4: è questa una traduzione con molte aggiunte dell'opera indicata sotto il n.° IV. VII *Modus fabricandi horaria mobilia, permanentia, cum acu magnetica*, ivi, 1596, in-fol.; VIII *Della fabrica et uso di diversi stromenti di astronomia et cosmografia*, ivi, 1597, in-4. Sono dovute pure a Gallucci parecchie traduzioni di diverse opere scientifiche, come del *Trattato delle proporzioni del corpo umano* di Alberto Durero, della *Prospettiva* di Giovanni, vescovo di Cantorbery, ec.

GAMA (Antonio de Leon y), astronomo e geografo nato al Messico, fioriva verso la fine del XVIII secolo. Pubblicò parecchie memorie sopra i satelliti di Giove, sull'almanacco, sulla cronologia degli antichi Messicani e sul clima della Nuova Spagna, ed ebbe molta parte nel lavoro pel quale la longitudine del Messico fu determinata con maggiore esattezza di prima. Il resultato di tale operazione è contenuto in un opuscoletto, scritto da Gama in lingua spagnuola, poco conosciuto in Europa, e pubblicato col titolo di *Descrizione ortografica dell'ecclisse solare del 24 Giugno 1778, dedicata a don Gioachino Velasquez di Leon*, Messico, 1778, in-4. I suoi concittadini, che durante la sua vita lo lasciarono languire in uno stato prossimo alla miseria, lo citano oggi con orgoglio per dimostrare agli Europei che gli accusano d'ignoranza come siano nel Nuovo Mondo coltivate le scienze.

GAMACHES (Stefano di), canonico regolare di Santa Croce de la Bretonnerie, nato nel 1672 a Meulen nell'Isola di Francia, e morto a Parigi nell'1756. Le sue opere scientifiche sono: I *Nouveau système du mouvement*, Parigi, 1721, in-12; Il *Astronomie physique, ou Principes généraux de la nature, appliqués au méconisme astronomique, et comparés aux principes de la philosophie de Newton*, ivi, 1740, in-4. Gamaches, che era membro dell'Accademia delle Scienze di Parigi, aveva calcolato alcune tavole dei pianeti per movimenti anomalistici e passaggi per l'apside, dietro la scorta di Lahire.

GANIMEDE (*Astron.*). Nome che alcuni astronomi hanno dato alla costellazione d'Antinoo ed altri a quella dell'Aquario.

GASSENDI (Pietro). Questo nome appartiene con egual diritto alle scienze, alla filosofia, alle lettere, alle arti. Esso ci rammenta una di quelle menti vaste e ardite che, nella prima metà del secolo XVII, diedero un impulso straordinario a tutte le cognizioni, a tutte le idee che agitavano allora il mondo intellettuale. Pietro Gassend o Gassendi nacque in un villaggio presso a Digne, in Provenza, il 22 Gennajo 1592, di famiglia povera ed oscura. Ricevè i primi elementi dell'istruzione dalla carità del curato del suo villaggio, ed i talenti che manifestò nella sua infanzia furono così prodigiosi, che il buon pastore maravigliato e quasi atterrito da disposizioni tanto primaticce, che avevano piuttosto del miracoloso che dello straordinario, presentò il suo allievo al vescovo di Digne che lo prese sotto la sua protezione. Si narra che fino dell'età di quattro anni ripeteva a memoria i sermoni che aveva sentito pronunziare, e levavasi segretamente di notte per contemplare ed ammirare il cielo.

In età di ventun anno Gassendi ottenne a concorso le cattedre di filosofia e di teologia nella università di Aix, e fu allora che giustificò tutte le speranze che avevano fatto di lui concepire e la sua infanzia maravigliosa e la sua laboriosa adolescenza. Di buon'ora comprese quanto di falso e di erroneo vi era nelle dottrine dispotiche della scuola; ma obbligato ad uniformarsi ai metodi ricevuti e da lungo tempo sanzionati, non cominciò a manifestare la sua opposizione che facendo sostenere delle tesi a favore e contro Aristotile. Alcuni anni dopo, provveduto di un benefizio nella cattedrale di Digne, potè abbandonarsi con maggior libertà alla franca esposizione delle sue idee, e pubblicò le prime due parti del suo libro delle *Exercitationes paradoxicae adversus Aristotelem*; poteva quello considerarsi pel suo tempo come un atto d'incredibile audacia.

Gli studj e le ricerche di Gassendi si estendevano a tutti i rami del sapere, ma l'astronomia era una delle scienze per la quale sentiva maggior trasporto. Galileo colle sue scoperte aveva allora allora cangiato l'aspetto di questa scienza, e Gassendi fu in Francia uno dei più ardenti partigiani della sua dottrina. Insegnò pubblicamente il moto della terra, e molto contribuì ad impedire che la Sorbona parigina pubblicasse una dichiarazione simile a quella dei teologi di Roma. Galileo trovò pure in Gassendi un dotto ed eloquente apologista, quando il padre Casrée attaccò la celebre teoria della accelerazione nella caduta dei gravi. La giustizia vuole che noi facciamo qui osservare in favore dei dotti francesi del secolo decimosettimo, come in generale accogliessero essi con premura quelle grandi e nuove dottrine, e come mentre la teoria di Copernico era in Germania il soggetto delle pubbliche risa, ed il Galileo era perseguitato in Italia per averne dimostrata l'esattezza, la Francia ricevesse con ammirazione l'opera di que' due grandi ingegni. Ambedue trovarono in Francia discepoli che difesero la loro causa col trasporto della convinzione e colla autorità che dà il sapere; sotto questo rapporto il nome di Gassendi sarà sempre caro alla scienza.

A quest'uomo celebre è dovuta ancora una osservazione curiosa del passaggio di Mercurio sul disco del sole. L'illustre Keplero aveva avvertito fino dal 1629

gli astronomi di prepararsi ad osservare questo raro fenomeno il 7 Novembre 1631; egli annunziava pure un passaggio simile di Venere, che avrebbe dovuto avvenire il 6 Dicembre dello stesso anno. Gassendi fu tanto fortunato da godere a Parigi della verificazione della predizione scientifica di Keplero. Nel giorno indicato da quel grande astronomo diresse il suo telescopio verso il sole, e scorse una piccola macchia nera e rotonda già molto avanzata sul disco di quell'astro. L'osservò con attenzione e non dubitò più, dalla rapidità del suo moto, che non fosse Mercurio. Gassendi determinò così le circostanze di questo passaggio: trovò che il centro di Mercurio era sull'orlo del disco solare a ore 10 e minuti 28 di mattina, e che la congiunzione aveva avuto luogo a ore 7 e 58 minuti, nel grado 14° é 36' dello Scorpione. Ei ne concluse il momento dell'immersione a ore 5 e minuti 28 della mattina, e il luogo del nodo prossimo a 14° 52' dello Scorpione. Keplero l'aveva posto a 15° 20' di questo stesso segno. Finalmente Gassendi giudicò 20″ il diametro apparente di Mercurio; ma attese invano il passaggio annunziato di Venere, che non ebbe luogo o che non fu visibile in Europa: è per tal motivo che intitolò lo scritto nel quale rese conto della sua osservazione: *De Mercurio in sole viso, et Venere invisa.*

L'alta reputazione che si è acquistata Gassendi come filosofo ha fatto meno risaltare l'importanza de' suoi lavori come geometra; ma non è per questo che essi non meritino di esser raccolti nella storia della scienza. Sotto il primo di questi rapporti, la carriera di Gassendi fu senza dubbio brillante, e le sue dottrine sarebbero degne di un accurato e minuto esame; ma noi non potremmo qui occuparcene senza uscire dai limiti del nostro piano. Ci contenteremo dunque di dire che Gassendi non ha certamente stabilito in un modo assoluto i suoi principj filosofici su quelli di Epicuro, come è stato più volte ripetuto. La stessa istruzione di quest'uomo celebre l'aveva familiarizzato colla cognizione degli antichi filosofi, e cercò nel confronto di una moltitudine di sistemi delle armi contro l'aristotelismo, l'insufficienza del quale era ormai dimostrata nella sua mente. Non è dunque da stupire se la filosofia *a priori* di Cartesio abbia trovato in lui un avversario. Gassendi è stato in realtà in Francia il vero capo della scuola eclettica. Ei morì a Parigi il 14 Ottobre 1655. Riesce difficile il comprendere l'immensità dei lavori di Gassendi, e l'attitudine straordinaria della quale era dotato per cognizioni tanto diverse, sulle quali ha scritto con una superiorità sorprendente. Ecco l'elenco dei suoi principali scritti matematici: I *Phenomenum rarum Romae observatum*, Amsterdam, ristampato col seguente titolo: *Parhelia seu soles quatuor spurii qui circa verum, Romae die 20 Martii 1629 apparuerunt*, ec., Parigi, 1630, in-4; II *Mercurius in sole visus et Venus invisa*, Parigi, 1631; III *Proportio gnomonis od solstitialem umbram observata Marsiliae*, Parigi, 1636; IV *Epistolae XX de apparente magnitudine solis*, Parigi, 1641; V *De motu impresso a motore translato*, Parigi, 1649; VI *Novem stelloe visae circa Jovem*, ivi, 1643; VII *De proportione qua gravia decidentia accelerontur*, ec. Parigi, 1646; VIII *Institutio astronomica*, Parigi, 1647; IX *Appendix cometae*, Lione, 1658; X *Exercitationes paradoxicae adversus Aristotelem*, Grenoble, 1624; XI *Romanum calendarium compendiose expositum*. Le sue opere vennero tutte riunite per le cure di Montmort e di Sorbière e pubblicate a Lione nel 1658: questa collezione è stata ristampata a Firenze nel 1728 in 6 vol. in-fol. per cura di Averani.

GATBLED o GADBLED (Cristoforo) nato verso il 1734 a Saint-Martin le-Bouillant, dopo aver fatto gli studj ecclesiastici ottenne in Caen un canonicato nella collegiata del Santo Sepolcro, ed ivi fu eletto professore di matematiche e d'idrografia. Contribuì molto a diffondere il gusto delle matematiche nell'università di quella città, e prova del suo merito è l'amicizia di cui l'onorarono d'Alem-

bert, Lavoisier, Vicq d'Azyr, Lagrauge, ec. Fu rapito alla scienza da morte immatura il dì 11 Ottobre 1782, e il pubblico rimase privo delle opere importanti che tenuto aveano occupati i suoi momenti d'ozio: le sole che abbia pubblicate sono: I *Exercice sur la théorie de la navigation*, Caen, 1779, in-4; II *Exposé de quelques-unes des vérités rigoureusement démontrées par les géomètres, et rejetées par l'auteur du* Compeudium de Physique, *imprimé à en 1775, petit in-12, destiné à l'instruction de la jeunesse*, Amsterdam, 1779, in-8 piccolo.

GATTEY (Francesco), nato nel 1753 a Digione, fece in questa città eccellenti studj e rapidi progressi nelle matematiche. Allorchè nel 1795 fu stabilito il nuovo sistema di pesi e misure, Gattey fu, insieme con Lagrange e Coquebert de Montbret, uno dei direttori di quella grande operazione. Tutto intento a queste importanti funzioni, rifiutò tutto ciò che poteva distornelo, e ricusò ripetutamente di presentarsi come candidato per avere un posto nell'Accademia delle Scienze, ove tutti i suoi colleghi ed amici erano entrati al momento della sua creazione. Non contento delle misure che prendeva il governo per render popolare il nuovo sistema ed assicurarne il successo, Gattey procurava dal canto suo di propagarlo, pubblicando degli scritti adattati alla capacità di tutte le classi e delle tavole di confronto di un uso chiaro e facile, inventando e facendo vendere a prezzo bassissimo istrumenti atti ad eseguire meccanicamente e senza penna nè lapis la riduzione delle antiche misure nelle nuove. La prospettiva ancora aveva formato un oggetto speciale de' suoi studj; aveva dedicato non pochi anni della sua vita ad approfondire le regole di quest'arte, a semplicizzare il loro uso e a presentarle sotto forme più intelligibili. Egli era sul punto di pubblicare un profondo trattato su quest'arte, frutto delle lunghe sue meditazioni, quando la morte terminò l'onorevole e laboriosa sua carriera il 7 Dicembre 1819. I suoi scritti stampati sono; I *Tablettes pour convertir les toises, pieds, pouces et lignes en mètres et parties du mètre*; II *Tablettes pour convertir sans calcul, les poids anciens et nouveaux et réciproquement*, 1799; III *Instruction sur l'usage du cadran logarithmique*, 1799, in-8. Leblond aveva immaginato nell'anno III e pubblicato nell'anno VII uno strumento dello stesso genere e sotto stesso nome; ma il quadrante di Gattey è meno complicato e assai superiore per l'esecuzione; IV *Élémens du nouveau système métrique*, 1801, in-8; V *Explication des usages de l'arithmographe, instrument portatif au moyen du quel on obtient en un instant les résultats de toutes sortes de calculs*, 1810, in-8. Questo strumento è la stessa cosa che il quadrante logaritmico perfezionato e reso più portatile. VI *Tables des rapports des anciennes mesures agraires avec les nouvelles, precedées des élémens du nouveau système métrique*, Parigi, 1810, e 1812. È questa la raccolta più completa delle diverse misure agrarie della Francia. VII *Explication du jauge logarithmique*, 1806, in-8; VIII *Usage des aréomètres à capsule*, 1813, in-16.

GAURICO (Luca), nato il 12 Marzo 1476 a Gifoni nel regno di Napoli, si applicò con qualche successo allo studio delle matematiche, delle quali diede dapprima delle lezioni private onde vivere: ma in seguito, stretto forse dalla necessità, abbandonò la professione ingrata e penosa di maestro di scuola per quella al suo tempo più onorevole e specialmente più lucrosa di astrologo. Salì allora in molta fama, e un gran numero di principi e di alti personaggi vollero interrogarlo e conoscere le sue predizioni. Nel 1531 professava le matematiche a Ferrara, e poco dopo essendosi recato a Roma ottenne il vescovado di Civitate: egli però il dimise in capo a quattro anni, e tornato a Roma vi morì il 6 Marzo 1558. Molte delle opere di Gaurico furono raccolte e pubblicate a Basilea, 1575, 3 vol. in-fol. Tra esse è da notarsi un *Elogio dell'astronomia* o piuttosto del-

l' astrologia, poichè l' autore confondeva tali due scienze, una *Descrizione della sfera celeste*, un *Trattato dei movimenti dei cinque pianeti*, delle *Note sulle tavole astronomiche dette alfonsine*, un *Calendario ecclesiastico*, il *Calendario di Giulio Cesare*, ec. Tra quelle poi che non si rinvengono nella citata raccolta rammenteremo la sua *Doctrina sinuum et arcuum*, Basilea, 1567, in-fol. in seguito al ***Primum mobile*** di Erasmo Oswald, e le *Note sopra l' Almagesto* di Tolomeo.

GAUTHEY (Emiliano Maria), nato a Challon-sur-Saone il 3 Dicembre 1732, andò a studiare le matematiche a Versailles, donde passò poi nella scuola dei ponti e strade sotto il celebre Perronet. Ricevuto quindi ingegnere dispiegò profonde cognizioni nella sua professione, e soprattutto nell' arte difficile di tracciare e scavare i canali navigabili. Molti furono i lavori in tal genere da lui eseguiti; ma quello che più di ogni altro ha reso celebre il suo nome è il canale detto del *Centro* da lui incominciato nel 1783 e terminato nel 1791, e che va da Challon a Digione per un corso di non meno di ventitrè leghe. All' epoca della rivoluzione Gauthey fu chiamato a Parigi, ove fu fatto ispettore generale del corpo degl' ingegneri. Si hanno di lui parecchie opere, di cui le principali sono: I *Mémoire sur l'application de la mécanique à la construction des voûtes*, 1772, in-4; II *Mémoire contenant des expériences sur la charge que les pierres peuvent supporter*, inserita nel *Journal de physique* del mese di Novembre 1774; III *Mémoires sur les écluses et le canal du Centre*, inserite negli atti dell' Accademia di Digione di cui Gauthey era membro; IV *Traité complet sur la construction des ponts et des canaux navigables*, Parigi, 1809-15, 3 vol. in-4: Quest' opera, nella quale Gauthey ha consegnato i risultati delle sue ricerche e della lunga sua esperienza, è stata pubblicata dopo la sua morte, avvenuta a Parigi il 14 Luglio 1806, da Navier suo nipote.

GAUTIER (Uberto), ingegnere francese nato a Nimes nel 1660, e morto a Parigi nel 1737, pubblicò non poche opere che attestano delle sue cognizioni e del suo talento. Ecco le principali: I *Traités de fortifications avec l'examen des methodes dont on s'est servi jusqu'alors pour fortifier les places*, Lione, 1685, in-12; II *Traité des ponts, la manière de les construire, tant ceux de maçonnerie que de charpente*, Parigi, 1716, in-8; III *Dissertation qui résout les difficultés sur la poussée des voûtes et des arches de différents surbaissements, les voussoirs, la charge des pilotis*, ec.

GAY-VERNON (Giuseppe), nato nel 1760, entrò di 19 anni nel corpo del genio. Allorchè istituita venne la Scuola politecnica, vi fu nominato professore, e per diciassette anni ne fu ancora il sotto-direttore e quindi il comandante col titolo di barone. Alla caduta di Napoleone si allontanò da ogni impiego e visse in un ritiro assoluto fino alla sua morte avvenuta a Saint-Leonard, sua patria, nel mese di Ottobre 1822. Si ha di lui: I *Exposition abrégée du cours de géométrie descriptive appliquée à la fortification, à l'usage des élèves de l'École polytechnique*, 1802, in-4; II *Traité élémentaire d'art militaire et de fortification, à l'usage des élèves de l'École polytechnique et de l'École militaire*, Parigi, 1805, 2 vol. in-4: quest' ultima opera, che è stata tradotta in varie lingue e specialmente in inglese, è adottata nella maggior parte delle scuole d' Europa.

GEBER o GIABER, il cui vero nome sembra essere Abou Moussah Djafar al Sofi, è stato uno dei più celebri alchimisti arabi. Gli si è voluto attribuire l' onore dell' invenzione dell' algebra, ramo della scienza cui avrebbe egli dato il suo nome. Cardano, che lo pone nel numero dei dodici ingegni più sottili del mondo non ha poco contribuito ad accreditare questa opinione. Ma Cardano era troppo prevenuto in favore dell' alchimia, e non è difficile che partecipasse dell' entusiasmo

degli adepti per Geber. I libri che ci rimangono di quest'arabo, che secondo lo storico Aboulfeda viveva nel VIII secolo, sono esclusivamente dedicati all'alchimia e alla medicina empirica. Vi si trovano per verità alcune nozioni di astronomia, ma nulla indica la grande scoperta che al loro autore si vuole attribuire. È dunque lecito il credere, o che è esistito un altro Geber, o che l'alchimiste Geber non è il preteso inventore dell'algebra.

GEHLER (Giovanni Samuele Traugott), celebre fisico tedesco, nato a Gorlitz nel 1751 e morto nel 1795, ha lasciato parecchie opere assai stimate, delle quali citeremo: I *Historiae logarithmorum primordia*, Lipsia, 1776, in-4; II *Dizionario di fisica* (in tedesco), Lipsia, 1787-91, 4 vol. in-8, con un supplemento pubblicato nel 1795.

GELLIBRAND (Enrico), astronomo e geometra inglese, nato a Londra nel 1597, fu l'amico e probabilmente il discepolo di Enrico Briggs, che morendo l'incombensò di terminare il suo gran lavoro sui logaritmi, ch'ei lasciava incompleto. Gellibrand si conformò alle sue intenzioni e compose il secondo libro dell'opera, che sotto il titolo di *Trigonometria britannica* stampata venne nel 1633 in-fol. dal celebre Adriano Vlacq a Goude in Olanda.

Gellibrand era curato della parrocchia di Chiddingstone nella contea di Kent, quando fu preso ad un tratto da una specie di passione per le matematiche dopo avere assistito ad una pubblica lezione di tale scienza. Abbandonò tosto la carriera ecclesiastica in cui poteva intanto sperare avanzamento ed entrò come scolare nell'università di Oxford. Lo zelo col quale si diede allo studio lo fece ben presto distinguere da Enrico Briggs, che nel 1627 gli fece ottenere la cattedra di astronomia nel collegio di Gresham. È autore di diversi trattati sulla navigazione, e di un'opera matematica intitolata: *Istituzione trigonometrica* che ha avuto parecchie edizioni. Gellibrand morì ancor giovane nel 1637, probabilmente in conseguenza di un'applicazione troppo assidua, giacchè a questa soltanto doveva i suoi progressi e non ad un ingegno naturale. Come astronomo, nulla rimane di Gellibrand, che del resto era partigiano dichiarato del sistema di Tolomeo, e non esitò a difenderlo contro quello di Copernico cui trattava di assurdo.

GEMELLI (*Astron.*). In latino *Gemini*. Terza costellazione dello zodiaco. La maggior parte dei poeti vuole che siano in essa rappresentati i gemelli Castore e Polluce; ma vi è chi pretende che essa allude ad Apollo ed Ercole; altri vi ravvisano Trittolemo e Giasone; altri, Anfione e Zeto; ed altri infine Teseo e Piritoo. Gli orientali simboleggiavano questa costellazione con due capretti. Presentemente è rappresentata col segno ♊, e comprende 85 stelle nel catalogo di Flamsteed.

GEMINO. È autore di un'opera in greco intitolata: *Introduzione allo studio dei fenomeni celesti*. È opinione che fosse di Rodi, ma che scrivesse a Roma verso i tempi di Silla e di Cicerone. Egli stesso ha fissata tale epoca a un di presso in un passo del suo libro, nel quale dice che 120 anni prima la festa d'Iside presso gli Egiziani cadeva nel solstizio d'inverno, il che non può avvenire che una volta in 1460 anni. Gli autori peraltro non vanno pienamente d'accordo nei loro calcoli su tale passo. Petavio ne inferisce che Gemino viveva 77 anni prima di G. C., e Bonjour vuole che fosse 137 anni prima dell'era nostra. Gemino cita Ipparco che osservava dall'anno 160 al 125, esso è dunque posteriore a tale epoca. Questo è quanto di lui sappiamo. È uno di quelli autori la cui vita è interamente nelle opere loro, e quelle di Gemino sono in parte perdute.

Aveva composto un trattato di matematiche di cui Proclo ha approfittato nel suo commentario sopra Euclide; ma oggigiorno è conosciuto soltanto per la sua *Introduzione*, o *Elementi di astronomia*. È dessa un'opera alquanto superficiale, ma semplice, luminosa quale a molti riguardi si potrebbe comporre al dì

d'oggi, e la migliore certamente di tutte quelle che rimangono de'Greci. La prima edizione comparve in Altorf nel 1590 colla traduzione latina d'Ilderico. La più nota è quella che Petavio ha pubblicato nel suo *Uronologion* o *Raccolto di scritti relativi all'ostronomio*. Gemino vi tratta dei circoli della sfera, dei climi, del levare e dal tramonto delle stelle, dei giorni, dei mesi, degli anni e dei diversi periodi immaginati dai Greci; dei movimenti del sole, della luna e dei pianeti; dell'esseligmo, cioè di un periodo luni-solare sgombro di frazioni. Ciò che dice dell'ineguaglianza del sole prova che nun era geometra, e ne'calcoli dell'ineguaglianza della luna non si mostra aritmetico troppo valente: del rimanente, spirito giusto e saggio, non scriveva pei dotti, ma specialmente per le persone di mondo e pei letterati. Ha il merito di non credere all'astrologia; combatte anzi coloro che pretendevano che il levare e il tramonto del stelle potessero avere alcuna influenza sui venti e sulla pioggia. Ammette al più che possano servire per annunzj peculiari a certi siti, i quali convengono ad una sola posizione, ed in cui non si deve porre alcuna fede, se non in quanto una lunga esperienza ne abbia dimostrata la certezza. Nel suo quadro del cielo stellato fa Callimaco, e non il geometra Conone, autore della costellazione conosciuta sotto il nome di *Chiomo di Berenice*; e la sua testimonianza bastar deve per vendicare la memoria di Conone dalla taccia di cortigiano a di basso adulatore che alcuni hanno voluto dargli a proposito di tale finzione poetica assai conveniente a Callimaco, ma poco degna di un geometra.

GEMMA (Ranieri), comunemente cognominato *Frisio*, matematico ed astronomo olandese, nacque nel 1508 a Dockum, in Frisia: incominciò la sua educazione letteraria a Groninga, e la terminò a Lovanio, dove studiò in medicina e fu dottorato nel 1542. Ebbe al suo tempo gran reputazione come astronomo. Carlo V ne faceva particolar conto, e lo consultò in parecchie occasioni. La modestia di Gemma fece che non accettasse le esibizioni dell'imperatore, il quale avrebbe voluto attirarlo alla sua corte. Morì a Lovanio nel 1555, lasciando un figlio erede dalla sua scienza e della sua cattedra. Le sue opere sono: I *Arithmeticoe procticae methodus focilis*, Anversa, 1540, in-8; II *De rodio astronomico et geometrico liber*, ivi, 1545, in-4; III *De onnuli ostronomici usu*, ivi, 1548, in-8; IV *De principiis ostronomioe et cosmogrophiae*, con alcuni altri piccoli trattati, Parigi, 1547, in-8; e Anversa, 1548, in-12: Boissière ha tradotto questo libro in francese, Parigi, 1582, in-8; V *De ostrolabio catholico et usu ejusdem*, Anversa, 1556, in-8; VI *Charto sive Mappa mundi*, dedicata a Carlo V, Lovanio, 1540; VII Ha inoltre ristampato, corretto e aumentato in parecchie edizioni la *Cosmogrofio* di Pietro Apiano: ne comparve una traduzione francese in Anversa nel 1544, in-4, col titolo: *La Cosmographie de P. Apien, traduite por Gemma Frison, mothémoticien de Louvain, avec autres livres du même Gemmo.*

GEMMA (Cornelio), figlio del precedente, percorse senza degenerare lo stesso arringo del padre: nato a Lovanio nel 1535, morì nella stessa città nel 1579. Le opere sue principali sono: I *De stellà peregrina quae superiori anno apparere coepit, C. Gemmae, et Gul. Postelli judicio*, Anversa, 1573, in-4; II *De prodigioso specie noturaque cometoe onni 1577, cum odjuncta explicatione duorum chosmatum onni 1575*, ivi, 1578, in-12.

GENERARE. Si fa uso in geometria di questa parola per esprimere la generazione di una estensione, effettuata mediante il movimento di un'altra estensione. Così, per esempio, si dice che un cilindro retto è *generoto* dalla rotazione di un rettangolo intorno ad uno dei suoi lati.

GENERATORE o GENERATRICE. In geometria si dà questo epiteto a qualunque specie di estensione che col suo moto ne genera un'altra. Così si chiama cir-

colo generatore della cicloide il circolo che, girando sopra una linea retta, descrive con uno de' suoi punti la cicloide. In egual modo si dice *linea generatrice di una superficie* la retta o curva che col suo moto genera questa superficie.

GENERAZIONE. Questa parola non è stata usata dai geometri che per esprimere la costruzione di una estensione determinata, per mezzo di un' altra estensione supposta messa in moto. In tal modo s' immagina che una *sfera* sia formata dalla rivoluzione completa di un semicircolo intorno al suo diametro; o che un *cono retto* sia costruito dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno dei lati dell' angolo retto. In questo caso la retta intorno alla quale si opera il movimento prende il nome di *asse di rotazione* o *di rivoluzione*.

Nel corso di questo Dizionario ci siamo già serviti parecchie volte della parola *generazione*, prendendola in un significato più esteso e applicandola tanto ai numeri quanto allo spazio. Alla parola Filosofia delle Matematiche ne abbiamo determinato il vero significato.

GENNAJO (*Calend.*). Nome del primo mese dell' anno, ed uno dei due mesi che Numa aggiunse al calendario di Romolo che ne comprendeva soli dieci. In origine questo mese fu composto di 28 giorni: in seguito lo stesso Numa lo aumentò di un giorno per portare l' anno dai 354 giorni ai 355; e in fine Giulio Cesare stabilì che ne avesse 31, numero che ha conservato anco nel calendario gregoriano. Verso il 19 o il 20 il sole entra nel segno dell' Aquario. Questo mese era particolarmente consacrato a Giano, dio del tempo.

GENNETÉ, fisico e meccanico del secolo XVIII, ha pubblicato: I *Expériences sur le cours des fleuves*, Parigi, 1760, in-8; II *Pont de bois de charpente horizontal, sans piles, ni chevalets, ni autre appui que ses deux culées, ec.*, ivi, 1770, in-8; III *Origine des fontaines et de là des ruisseaux, des rivières et des fleuves*, Nanci, 1774, in-8.

GENSSANE (de), membro corrispondente dell' Accademia delle Scienze di Parigi, ha pubblicato nella raccolta degli Atti di quella dotta società non poche interessanti memorie, tra le quali si citano: I *Description d'un planisphère, cadran et machine, pour observer les passages des astres par le meridien*, 1736; II *Observations sur un météore igné en forme de comète*, 1738; III *Nouvelle correction faite aux pompes aspirantes*, 1741; IV *Observations sur un niveau construit de manière que ses pièces essentielles soient à l'abri du vent*, 1741; V *Manière d'employer l'eau pour les pompes*, 1741; VI *Correction faite à la pompe à feu*, 1744; VII *La géométrie souterraine pour l' exploitation des mines*, Montpellier, 1776, in-8.

GENTIL. *Vedi* LEGENTIL.

GEOCENTRICO (*Astron.*). Questo aggettivo, che viene dalle voci greche γῆ, *terra* e κέντρον, *centro*, si applica a tutto ciò che ha rapporto ai pianeti, considerando la terra come centro dei loro movimenti. Per esempio, si dice *longitudine geocentrica* e *latitudine geocentrica*, la longitudine o la latitudine di un pianeta veduto dalla terra; e *movimento geocentrico*, il movimento proprio, apparente, di un pianeta nella volta celeste. *Vedi* Latitudine, Longitudine e Pianeta.

GEODESIA. Ramo della geometria pratica che ha per oggetto la divisione delle terre o delle superficie, o in generale la divisione di una figura qualunque in un determinato numero di parti. La parola *geodesia* deriva dalle voci greche γῆ, *terra* e δαίω, io *divido*.

Oggigiorno si dà alla parola geodesia un significato molto più generale, indicando sotto questo nome la scienza pratica non solo della divisione ma ancora della misura dei terreni, e le si fanno abbracciare così tutte le operazioni trigonometriche e astronomiche necessarie per levare una carta, misurare la lunghezza di un grado terrestre, ec. La geodesia presa in questo esteso senso è propriamente

la geometria pratica. I suoi metodi formano l' oggetto di varj articoli di questo Dizionario, ai quali rimandiamo il lettore. *Vedi* Levar le piante, Meridiana, Misura della terra, ec. Quelli poi che volessero penetrare più addentro nella scienza debbono consultare, Puissant, *Traité de Géodesie*, Parigi, 1842, 2 vol. in-4, e Lefèvre, *Nouveau traité géométrique de l'arpentage.*

GEOGRAFIA (*Matem. appl.*). Con questa parola, che è formata delle voci greche γῆ, *terra*, e γράφω, io *descrivo*, si accenna quella scienza che tratta di tutto ciò che ha rapporto alla terra. Essa si divide in *geografia fisica* e in *geografia matematica*. Quest' ultima comprende le relazioni respettive delle diverse parti della terra tra loro e rapporto al cielo, ed è l' oggetto di diversi articoli di questo Dizionario. *Vedi* Latitudine, Longitudine, Meridiana e Terra.

GEOMETRIA. Questa parola, che deriva dalle voci greche γῆ, *terra* e μέτρον *misura*, ad onta del significato ristretto che le dà la sua etimologia, *misura della terra*, serve a indicare la scienza generale dell' estensione, uno dei due rami fondamentali delle matematiche pure.

L' origine della geometria risale all' origine delle società. Fino dalla più remota antichità si trova dappertutto l' umana intelligenza in possesso di alcune verità matematiche, prodotto necessario del suo primo sviluppo. Ma queste verità, d' altronde in ristrettissimo numero, erano unicamente relative ai bisogni degli uomini; la divisione e la misura delle proprietà, i limiti delle eredità, la figura e la dimensione dei materiali atti alle costruzioni, tali furono gli oggetti dai quali erano esse comunemente dedotte, e per una lunga serie di secoli l' Egitto, che tutti convengono essere stato la cuna della geometria, non potè elevarsi al di sopra di queste considerazioni *concrete* dell' estensione. Solo da Talete e da Pitagora comincia la considerazione *astratta* delle verità geometriche, vale a dire la Scienza, e sotto questo rapporto, come sotto tanti altri, la Grecia si pose alla testa delle nazioni allora civilizzate.

Dopo Pitagora, al quale è dovuto il teorema del *quadrato dell' ipotenusa*, una delle più importanti proposizioni elementari, i filosofi greci si diedero a gara allo studio della geometria. Anassagora di Clazomene, perseguitato per avere insegnato che gli astri sono corpi materiali; Ippocrate di Chio, noto per la sua famosa, quantunque insignificante, quadratura delle lunule; e il divino Platone, che chiamava Dio l' *eterno geometra*, debbono esser citati tra quelli che contribuirono ai progressi della scienza, e di cui Euclide raccolse in seguito i lavori quando compose la sua celebre opera degli *Elementi* (*Vedi* Euclide). Siccome le scoperte dei geometri di questo primo periodo sono menzionate nei loro articoli biografici, così per evitare le ripetizioni ci contenteremo qui di rimandere il lettore a quelli articoli. *Vedi* Apollonio, Archimede, ec. Si veda pure Alessandria (Scuola d').

Ad onta dei lavori immensi di tutti questi uomini illustri, la scienza rimase sempre nel circolo ristretto delle proposizioni *particolari*, e più tardi, dopo il risorgimento delle lettere, quando l' Europa uscì dalla lunga barbarie che tenne dietro alla distruzione dell' impero romano, si limitarono gli uomini tanto esclusivamente a tradurre e a commentare le opere degli antichi, che è quasi impossibile di citare un vero progresso prima dell' epoca in cui Cartesio venne ad aprire alla geometria la nuova carriera che essa ha in seguito percorsa con tanto splendore. Fu nel 1637 che quel grand' uomo pubblicò le sua *Geometria*; e quarant' anni dopo, il calcolo differenziale, scoperto de Leibnitz e Newton, portava le scienza del geometra al suo più alto grado di perfezione, facendola passare finalmente dalle considerazioni *particolari* elle considerazioni *generali* o *universali*.

Non ostante, mentre Cartesio, coll' *applicazione dell' algebra alla geometria*, fondeva uno dei rami più elevati della geometria generale, altri matematici vi

si aprivano egualmente nuove vie; Cavalieri col suo *metodo degl'indivisibili*, Fermat et Barrow, nel tempo stesso che Desargues e Pascal, colle loro considerazioni sulle proprietà delle projezioni e delle trasversali, gettavano i germi della *geometria descrittiva*, di quella geometria che deve recentemente a Monge l'intero suo perfezionamento. In questa guisa cominciava il nuovo periodo della scienza, e fin d'allora non più si tratta di considerare, come unicamente erasi fatto fino a questi ultimi sforzi dello spirito umano, i numeri e le figure sotto il solo rapporto della *relazione*; la costruzione o la *generazione* delle quantità sì numeriche che geometriche divenne lo scopo elevato dei geometri di quest'era brillante, che data dal XVII secolo e che si estende fino ai nostri giorni. Questi lavori importanti sono esposti negli articoli consacrati ai matematici ai quali ne siamo debitori, nè qui possiamo fare altro che rimandarvi il lettore.

Oggi tutti i rami della Scienza dell'Estensione sono costituiti. Essi sono stati l'oggetto di numerose investigazioni che gli hanno successivamente portati a un tal grado di sviluppo che diviene difficile l'afferrarne tutto l'insieme, e lo scoprirne il legame. Ma questa unità di principio, ultimo bisogno della ragione, che invano cercherebbesi nei lavori dei moderni geometri, non è più del dominio della loro scienza; alla Filosofia sola spetta il fissare le leggi delle realtà materiali e intellettuali; a questa *Scienza delle scienze* bisogna finalmente ricorrere per stabilire in modo assoluto le matematiche. Si comprenderà facilmente che per filosofia noi non possiamo intendere quella logomachia puerile insegnata pubblicamente sotto questo nome nelle nostre scuole; e i cui resultati ben lungi dall'esser capaci di favorire lo sviluppo della ragione, non fanno che ritenere in un'ignoranza vergognosa di ogni verità superiore la nazione che si pretende la più illuminata della terra. Se ormai ci vogliamo elevare a vere cognizioni razionali, se, come l'imperiosa necessità se ne fa sentire da ogni parte, si vuol finalmente risalire ai principj della certezza, ed uscire dal caos intellettuale nel quale si trova immersa la società sotto il triplo rapporto della politica, della religione e della scienza, bisogna decidersi a riconoscere altamente il nulla di questa grossolana metafisica delle sensazioni, che oggi domina tanto, e l'insignificanza di quel ridicolo ammasso di nozioni psicologiche che sotto il nome di *eclettismo* non si arrossisce di presentarci come il più sublime sforzo dello spirito umano.

Non è questo il luogo di trattare la deduzione filosofica dei diversi rami della geometria generale, questa deduzione è l'oggetto di un articolo speciale nel quale abbiamo fatto conoscere i principj superiori che vengono finalmente a fondare e spiegare la scienza: per abbracciarla nel suo insieme ci basta qui di stabilire la classificazione seguente:

La Geometria, presa nel suo senso il più generale, è la scienza dell'estensione. Essa si divide in due rami principali.

Il primo di questi rami ha per oggetto i modi distinti e indipendenti, o i modi *individuali* della generazione e del confronto dell'estensione: il secondo, i modi *universali* di questa generazione e di questo confronto.

I. I *modi individuali* della generazione e del confronto dell'estensione formano la scienza che comunemente vien designata sotto il nome di *Geometria elementare*. È essa propriamente la geometria degli antichi. Ne daremo un'idea in poche parole.

Gli elementi di ogni generazione primitiva dell'estensione sono le *linee*. Il primo modo di generazione elementare primitiva è la *linea retta*; l'ultimo, la *linea curva*; e la transizione tra questi due modi, l'*angolo*. Combinando insieme i modi primitivi della generazione dell'estensione, si ottiene una generazione elementare derivata, la *superficie*; e in forza della riunione sistematica di queste diverse generazioni si ottiene il *solido*.

Le linee, le superficie e i solidi sono dunque gli oggetti della geometria elementare, e per conseguenza di tutta la geometria generale.

Seguendo gli antichi, di tutte le linee curve non si considera nella geometria elementare che la sola circonferenza del circolo. Per la costruzione delle figure geometriche si vedano le Nozioni preliminari, e nel corso del Dizionario le parole: Angolo, Circolo, Linea, Poligono, Solido, Triangolo, ec.

Il confronto elementare delle figure geometriche concerne l'eguaglianza o l'ineguaglianza di queste figure. *Vedi* Triangolo *e* Similitudine.

II. *I modi universali* della generazione e del confronto dell'estensione formano parecchi rami della geometria generale, cioè:

La Geometria delle trasversali, che ha per oggetto la generazione primitiva universale dell'estensione per *intersezione*. *Vedi* Trasversale.

La Geometria descrittiva, che tratta della generazione sistematica universale dell'estensione per *projezione*. *Vedi* Descrittiva.

La Geometria detta analitica, o l'*applicazione dell'algebra alla geometria*, che ha per oggetto la generazione sistematica universale dell'estensione per mezzo delle *coordinate*: Quest' ultimo ramo ha una parte elementare che tratta della generazione elementare universale dell'estensione mediante la costruzione dei *rapporti* e dei *luoghi geometrici*. *Vedi* Applicazione dell'algebra alla geometria.

Il *confronto* delle figure geometriche considerato sotto il punto di vista della *universalità* costituisce i *fini geometrici*, che possiamo proporci in ciascuna di queste scienze, delle quali il quadro seguente farà meglio conoscere il legame.

GEOMETRIA GENERALE

Leggi dell'estensione

- Modi distinti e indipendenti, o modi individuali della generazione e del confronto dell'estensione. — Geometria elementare.
- Modi universali della generazione e del confronto dell'estensione.
  - Modi geometrici, o *primitivi*.
    - Parte elementare. — Intersezione. — Geometria delle trasversali.
    - Parte sistematica. — Projezioni. — Geometria descrittiva.
  - Modi algebrici, o *derivati*.
    - Parte elementare. — Luoghi geometrici. — Applicazione dell'algebra alla geometria (senza coordinate)
    - Parte sistematica. — Coordinate — Geometria detta analitica.

GERARDO di Cremona, matematico ed astronomo del XII secolo, è soprannominato ora *Cremonensis* ed ora *Carmonensis* dagli scrittori posteriori a quell'epoca, il che avrebbe potuto portare a supporre che tale denominazione potesse applicarsi a due diversi individui; ma è oggi dimostrato non esser questa che una confusione assai frequente ai cronachisti del medio evo. Gerardo nacque in Lombardia nel territorio di Cremona verso l'anno 1114. Fino dalla gioventù si applicò alla filosofia e alle matematiche. Sembra che l'astronomia avesse per lui molte attrattive, perchè avendo avuta contezza della *Composizione matematica* di Tolomeo, senza dubbio per citazioni di antichi autori, e non esistendo siffatta opera presso i Latini, andò a Toledo tratto dallo splendore che le scienze avevano presso i Mori di Spagna. Là studiò l'arabo e si occupò a tradurre da quella lingua molte opere importanti che non esistevano presso i suoi compatriotti. Tra le altre voltò in latino la tanto desiderata *Composizione matematica* di Tolomeo, alla quale lasciò il titolo di *Almagesto*, che aveva nella versione araba, e che ha conservato anco al presente. Ruggero Bacone e Regiomontano hanno dimostrato le imperfezioni di questo lavoro, imperfezioni che forse era impossibile di evitare nel tempo in cui fu fatto; ma sarebbe un'ingiustizia il dire che tale traduzione con tutti i suoi difetti non abbia potentemente contribuito a favorire i progressi dell'astronomia. Gerardo di Cremona ha fatto parecchie altre traduzioni di opere di medicina e di matematiche, ed ha scritto pure delle opere. Eccone alcune delle principali: I *Theorio planetarum*; II *Allaken de coursis crepusculorum*; III *Geomantia astronomica*: questo scritto si trova stampato fra le opere di Cornelio Agrippa, ed è stato tradotto in francese da de Salerne col titolo di *Géomancie astronomique*, Parigi, 1669 e 1682, in-12. Gerardo tornò a Cremona ed ivi morì nel 1187 in età di 73 anni.

GERBERTO, nato in Alvernia, da famiglia oscura, verso la metà del secolo decimo, si è distinto pel suo sapere in un'epoca di profonda ignoranza. I suoi lavori segnano il punto di partenza del movimento intellettuale, che nel seno del sistema feudale operossi nell'Europa occidentale, e che dissipò lentamente le tenebre e la barbarie, in cui le emigrazioni degli uomini del nord e la lotta sanguinose di molti secoli avevano immerso questa parte del mondo. Educato nell'abazia di Aurillac, che apparteneva a quell'ordine illustre di S. Benedetto, a cui le scienze e le arti della civiltà debbono la loro maravigliosa rigenerazione, Gerberto vi ricevette probabilmente le cure di qualche maestro oggi sconosciuto che seppe coltivare le disposizioni di cui avealo la natura dotato. In questi asili della pietà erasi ricovrato l'umano sapere, e vi fu conservato come un deposito sacro al coperto delle miserie e delle agitazioni che allora desolavano il mondo. Gerberto prese l'abito dell'ordine nel seno del quale la sua infanzia aveva ritrovato una protezione sì generosa. Nato con una disposizione naturale alle matematiche e tormentato dal desiderio di acquistar cognizioni, ottenne da' suoi superiori il permesso di viaggiare. La fama degli Arabi lo condusse in Spagna, e ne riportò in Francia il sistema di numerazione di cui quella nazione disputa l'invenzione agl'Indiani, e che è quello di cui ci serviamo anche oggigiorno. Forse le prime nozioni dell'algebra sono dovute a Gerberto, ed una somiglianza di nome le avrà fatte attribuire ad altri. Comunque sia, il giovine monaco acquistò in breve grande reputazione, e le sue cognizioni in matematiche, prodigiose pel suo tempo, lo fecero accusare di magia. Ma più fortunato di Ruggero Bacone, che, religioso come lui, dovette pure, alcuni secoli dopo, difendersi contro questa assurda accusa, Gerberto giunse rapidamente alle più alte dignità della Chiesa, che ammirava il suo sapere e la sua pietà. Divenuto successivamente abate di Bobbio, in Lombardia; superiore della scuola di Rhaims, ove ebbe per discepolo il re di Francia, Roberto; vescovo di questa stessa diocesi, e

quindi di Ravenna, ove lo chiamò il favore dell'imperatore Ottone III. Gerberto venne finalmente elevato al soglio pontificio, e governò la Chiesa Cattolica sotto il nome di Silvestro II.

S'incontrano delle cose maravigliose e che meritano l'attenzione della storia, nella vita di questo religioso, che, nato nella classe infelice ed oppressa dei servi, ottiene la libertà sotto l'abito venerato dell'ordine di San Benedetto; esce dal monastero, pellegrino della scienza, e non curando i pregiudizj del tempo, va a domandare dei lumi ai nemici della sua religione, viene quindi a portarli al suo paese immerso nella barbarie, ove le sue cognizioni superiori vengono attribuite al soccorso del demonio. Ma la provvidenza non l'abbandona; ei lotta con energia contro questo errore fatale, insegna ai suoi contemporanei i principj della scienza, costruisce il primo orologio a bilanciere, di cui si sia fatto uso in Europa, ove non sapevasi ancora misurare il corso del tempo che per mezzo di uno strumento insufficiente, e finalmente in quei tristi giorni d'ignoranza fa salire la scienza sulla cattedra di S. Pietro. Questo illustre pontefice morì l'11 Maggio 1003. Di lui non resta che la memoria gloriosa dei servigj che ha reso alla scienza.

GERBILLON (Giovanni Francesco), gesuita, nato a Verdun nel 1654, applicossi con ardore e successo allo studio delle matematiche e fu uno dei cinque gesuiti che nel 1685 andarono alla China, ove divennero i fondatori della missione francese. Il p. Gerbillon scrisse in chinese: I *Elementi di geometria, tratti da Euclide e da Archimede*; II *Geometria pratica e speculativa*: queste due opere furono stampate a Peking, ove Gerbillon morì il 25 Marzo 1707.

GERHARDT (Marco Rodolfo Baldassarre), laborioso aritmetico tedesco, nato a Lipsia nel 1735 e morto a Berlino nel 1805. Delle molte di lui opere scritte tutte in tedesco citeremo: I *Regole generali e particolari pel calcolo del corso dei cambj*, Berlino, 1796, in-8; II *Tavole di logaritmi pei negozianti*, ivi, 1788, in-8; III *Memorie sopra il calcolo commerciale*, ivi, 1788, in-8; IV *Lo scritturale universale*, ivi, 1791, 2 vol. in-4.

GERMAIN (Sofia), nata a Parigi il 1.° Aprile 1776, si è illustrata in un arringo in cui poche donne hanno colto palme. All'età di dodici anni la lettura della *Storia delle matematiche* di Montucla sviluppò in lei una passione straordinaria per questa scienza. Senza il soccorso di alcun maestro, gli elementi di Bezout furono la sola sua guida nei suoi primi studj; passò quindi al calcolo differenziale di Cousin; e quando alla istituzione delle scuole normale e politecnica fu stabilito l'uso che gli alunni avessero la facoltà di presentare ai professori delle osservazioni in scritto, la Germain comunicò le sue a Lagrange, sotto il nome di un alunno della scuola politennica. L'inganno fu presto scoperto, e la Germain entrò tosto in corrispondenza coi primi matematici del tempo. Essa occupavasi con assiduità a cercare la dimostrazione di un teorema di Fermat, quando un nuovo e grave problema venne a richiamare e ad assorbire quasi interamente la sua attenzione. Chladni aveva ripetuto a Parigi le sue curiose esperienze sulle vibrazioni delle lastre elastiche, ma si desiderava che fossero esse assoggettate al calcolo. L'Istituto di Francia propose perciò a soggetto di un premio la scoperta delle leggi matematiche di queste vibrazioni; e quantunque Lagrange avesse detto che per avere una soluzione fosse d'uopo di un nuovo genere d'analisi, la Germain si accinse tosto a trovare l'equazione del moto delle lastre elastiche. Tre memorie furono da essa successivamente presentate all'Istituto, l'ultima delle quali venne premiata. Incoraggita da questo successo, non cessò di dedicarsi ai suoi studj favoriti: sviluppò le conseguenze delle formule già trovate; oltre uno scritto che comprendeva quanto aveva esposto nelle sue tre memorie, pubblicò altre dissertazioni sullo stesso argomento; e agli studj dell'analisi

pura e applicata congiunse quello pure della chimica, della fisica, della geografia, e della storia. Essa morì il 26 Giugno 1831. Oltre i molti manoscritti che ha lasciato, si hanno di lei: I *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, Parigi, 1820. Questo scritto è la riunione di tutti i suoi primi lavori su questo soggetto: la memoria coronata ne è la base, e in essa vi sono state rifuse le due precedenti. II *Mémoire sur la nature, les bornes, et l'étendue de la question des surfaces élastiques*, Parigi, 1826; III *Discussion sur les principes de l'analyse employés dans la solution du problème des surfaces élastiques*, inserita nel giornale intitolato: *Annales de physique et de chimie*, 1828; IV *Mémoire sur la courbure des surfaces élastiques*, che si legge nel *Giornale delle matematiche* di Crelle, Berlino, 1831. V Diversi teoremi inseriti da Legendre nel supplemento alla seconda edizione della sua *Théorie des nombres*, teoremi nei quali ella s'incontrò nel cercare inutilmente la dimostrazione di quello di Fermat

GERSTEN (Cristiano Luigi), matematico tedesco, nato nel 1701 a Giessen, e morto a Francfort nel 1762. Fino dal 1722 inventato aveva una macchina aritmetica di cui inviò nel 1735 la descrizione al cavaliere Hans Sloane, che la fece inserire nelle *Transazioni filosofiche*, n.° 438. Quantunque sia essa superiore a quanto in simil genere si era fino allora immaginato, sembra ormai che tali macchine non siano in sostanza che curiosità ingegnose. In pratica, non si può trarre una vera utilità che da quelle fondate sulla teoria dei logaritmi (*Vedi* Gunter e Aritmometro). Si ha di Gersten: I *Methodus nova ad eclypses terrae et appulsus lunae ad stellas supputandas*, Giessen, 1750, in-4; II *Parecchie memorie astronomiche*, inserite nelle *Transazioni filosofiche*, n.i 473, 482 e 483; l'ultima descrive un quarto di circolo murale perfezionato; III Un *Trattato di prospettiva*, rimasto manoscritto.

GERSTNER (Francesco Giuseppe di), ingegnere tedesco, e professore di matematiche e di meccanica all'università di Praga, nacque a Kommotau nel 1756, e morì a Praga nel 1832. La Germania deve a lui la fondazione del suo primo Istituto tecnologico, che fu posto in attività a Praga nel 1807. Gerstner ha pubblicato pure non poche opere in tedesco, delle quali ecco le principali: I *Introduzione all'arte di fabbricare*, Praga, 1789; II *Teoria delle onde*, ivi, 1801; III *Trattato delle ruote idrauliche*, ivi, 1809; IV *Due trattati sui carri e sulle ruote*, ivi, 1813; V *Della spirale delle macchine a pulsione*, ivi, 1818; V *Manuale di meccanica*, ivi, 1831-32, a vol. Non sono stati di questo manuale pubblicati che i primi due volumi e una parte del terzo; il figlio Antonio Francesco di Gerstner lo continua; VI Parecchi articoli scientifici in diverse raccolte periodiche tedesche.

GESTRIN (Giovanni), matematico svedese, insegnò con grido le scienze matematiche nell'università di Upsal, dove fu collocato sotto il regno di Gustavo Adolfo. Pubblicò alcuni *Comenti* sopra Euclide, un *Trattato di meccanica* e un *Trattato di astronomia*. Quasi nello stesso tempo, Kexler, professore nell'università di Abo, diffondeva il gusto delle stesse scienze in un'altra parte del regno colle sue lezioni e colle sue opere, e Stiernhielm sorprendeva i dotti stranieri che arrivavano alla corte di Cristina col suo trattato intitolato: *Archimedes reformatus*.

GETTO d'acqua (*Idraul.*). Filo d'acqua che con forza spilla dall'apertura di un tubo.

L'acqua che spilla e si eleva uscendo dal tubo, non lo fa che in virtù della sua caduta, vale a dire perchè essa esce da un serbatojo superiore ed ha così acquistato una velocità eguale a quella di un corpo pesante che fosse caduto da tutta l'altezza del livello del serbatojo al di sopra dell'orifizio del tubo (*Vedi* Idro-

DINAMICA n.° 3). Ora, per la legge della caduta dei gravi (*Vedi* ACCELERATO), un corpo che cade perpendicolarmente acquista al termine della sua caduta una celerità capace di farlo risalire alla stessa altezza, donde è caduto: e ciò avverrebbe infatti pel filo d'acqua, che si eleverebbe fino al livello del serbatojo donde esce, se non incontrasse parecchi ostacoli. Il primo di questi ostacoli è l'attrito dell'acqua contro le pareti interne del tubo; essa non discende per conseguenza con tutta la celerità dovuta alla caduta, e la celerità finale essendo minore di quella che avrebbe luogo senza questo attrito, l'acqua esce con minore rapidità e non può elevarsi ad un'altezza eguale a quella della sua caduta. Un secondo ostacolo è quello che presenta il peso delle particelle d'acqua che ricadono dopo essersi elevate fino dove è stato loro possibile, e che incontrando quelle che salgono danno loro un impulso in senso inverso. Perciò Torricelli ha osservato che un getto d'acqua sale più in alto quando è diretto obliquamente all'orizzonte, che quando gli è perpendicolare. Finalmente un terzo ostacolo è la resistenza dell'aria, attraverso alla quale il getto d'acqua è costretto a passare; questa resistenza è tanto considerabile che il diametro del getto si allarga a misura che sale, al punto di diventare cinque o sei volte più grande di quello dell'apertura della cannella; il che aumenta nuovamente la resistenza dell'aria in forza dell'aumento di superficie che l'acqua divisa le presenta.

L'esperienza ha fatto conoscere che la differenza tra l'altezza del serbatojo e quella alla quale s'innalza il getto è sensibilmente proporzionale al quadrato di quest'ultima altezza: vale a dire che indicando con h e h' le altezze di due getti, le differenze di queste altezze da quelle dei serbatoj respettivi stanno tra loro come $h^2 : h'^2$. Così, ammettendo, secondo Mariotte, che un getto d'acqua dato da un serbatojo alto 5 piedi e un pollice, si alzi 5 piedi, si troverà che per produrre un altro getto d'acqua che si alzi fino a 15 piedi è necessario un serbatojo che abbia un'altezza di 15 piedi e 9 pollici; perchè, secondo questa regola, le differenze tra le altezze dei getti e quelle dei serbatoj debbono stare nel rapporto di $5^2 : 15^2 = 25 : 225 = 1 : 9$.

Questo rapporto delle diminuzioni delle altezze esige che l'apertura delle cannelle abbia almeno 26 o 27 millimetri di diametro; perchè se questa apertura fosse più piccola i risultati dei calcoli non si accorderebbero più coll'esperienza.

Qualunque sia la direzione del getto, la quantità d'acqua che esso dispensa è sempre la stessa, purchè la cannelle e l'altezza del serbatojo al di sopra della cannella si mantengano le stesse. È questa una conseguenza necessaria della pressione eguale dei fluidi in tutti i sensi.

Quando la cannella per la quale esce l'acqua è diretta obliquamente all'orizzonte, le forza di projezione e il peso dell'acqua fanno sì che il getto descriva sensibilmente una parabola, della quale è tanto maggiore l'ampiezza, quanto è più grande l'altezza del serbatojo; perchè essa è proporzionale a quest'altezza. Quando la cannella si dirige orizzontalmente, il getto descrive una mezza parabola.

I *getti d'acqua* si elevano tanto più in alto quanto le aperture delle cannelle sono più grandi: perchè di due getti d'acqua, che, venendo da un medesimo serbatojo, escono dalle respettive loro cannelle con celerità eguali, il più voluminoso prova un minore attrito relativamente alla quantità d'acqua che passa, e che avendo maggior massa ha pure maggior forza per vincere gli ostacoli. Non ostante, sebbene i grossi getti si alzino più dei piccoli, non dispensano proporzionalmente maggior quantità d'acqua di questi ultimi, perchè la dispensa sta come il prodotto dell'area dell'orifizio della cannella per la celerità nell'istante dell'uscita, e questa celerità è presso a poco la stessa per gli uni e per gli altri, facendo astrazione dagli attriti.

Affinchè però i grossi getti si elevino più in alto dei piccoli, bisogna che i

condotti siano abbastanza ampj da sommioistrare le acque in un' abbondanza sufficiente; perchè, se sono molto stretti, l'esperienza dimostra che i piccoli getti si innalzano più dei grossi. Bisogna dunque che il diametro del condotto abbia una certa grandezza rapporto a quello della cannella, affinchè il getto si innalzi all' altezza maggiore a cui possa giungere. Se dunque si confrontano due getti di acqua differenti, e se si vuole che ognuno di essi si elevi alla massima sua altezza, bisogna che *i quadrati dei diametri dei condotti stiano tra loro in ragione composta dei quadrati dei diametri delle cannelle e delle radici quadrate delle altezze dei serbatoj*. È stato trovato che per una cannella di 6 linee di diametro, ed un serbatojo di un' altezza di 52 piedi, il diametro del condotto deve esser circa di 39 linee. Con questi dati si può calcolare in tutte le altre circostanze il diametro dei condotti. Si veda l'*Idrodinamica* di Bossut, e le opere di Mariotte.

GETTO DELLE BOMBE. *Vedi* BALISTICA.

GEZERI (ABULAZ ISMAELE), rinomato per un talento straordinario nel suo genere, è autore di un *Trattato delle macchine ingegnosamente inventate*. Tale trattato è diviso in sei parti, e tratta degli orologi, degli strumenti di musica, delle macchine idrauliche, ec. È stato tradotto in turco e dedicato all'imperatore Selim.

GHERLI (ODOARDO), modenese, nacque l'anno 1730 in Guastalla, ove allora suo padre era medico. Nel 1748 entrò nell'ordine di S. Domenico in Correggio, e dopo aver fatti i consueti corsi di studj, fu destinato a leggere teologia dommatica nell'università di Modena. Per più anni tenne egli questa cattedra; ma il suo studio prediletto era però quello delle matematiche. In esse aveva cominciato ad esercitarsi fino dagli anni suoi giovanili, e avanzandosi sempre più in quest'ardua scienza potè dare al pubblico in Modena nel 1770 e negli anni seguenti il più amplo e più completo corso di matematica, che si fosse ancora veduto, col seguente titolo: *Gli Elementi teorico-pratici delle matematiche pure*, vol. 7, in-4. Il primo tomo è destinato all'aritmetica; il 2.° all'algebra non applicata alla geometria; il 3.° comprende la geometria tanto piana che solida, la trigonometria piana e sferica, le tavole de'seni, coseni, ec. e de' loro logaritmi; il 4.° tratta dell' algebra applicata alla geometria e comprende la dottrina delle sezioni coniche e l'analisi delle curve; il 5.° si aggira sul calcolo differenziale, e gli ultimi due sul calcolo integrale. Nel Novembre del 1778 passò il Gherli alla cattedra di matematiche nell'università di Parma, e la fama di cui egli godeva fece che ancora altre luminose cattedre gli venissero offerte. Ma mentre egli continuava ad occuparsi nei consueti suoi studj, venne dalla morte rapito in Parma il 6 Gennajo 1780. Lagrange e Condorcet scrissero all'autore lettere piene di onorevoli elogi di lui e della dotta sua opera, le quali si leggono avanti all'ultimo tomo della medesima, di cui si ha un lungo e giudizioso estratto nel *Giornale di Modena*, vol. XII, pag. 116, e vol. XIII, pag. 268.

GIANELLA (FRANCESCO), matematico italiano nato a Milano il 13 Gennajo 1740. Entrato di sedici anni nell'ordine de' gesuiti, fu da'suoi superiori inviato a Torino, dove, collega del giovine Lagrange, che era già celebre, non tardò ad associarsi similmente alla sua gloria. Aggregato all'Accademia di Torino fino dalla sua creazione, somministrò alcune buone memorie per la raccolta che essa pubblicò de' suoi lavori nel 1769 col titolo di *Miscellanea Taurinensia*. Se ne trovano altre ancora dello stesso autore nelle memorie di quella società nel 1784, 1785 e 1786. Fu poscia chiamato a professare le matematiche in patria; ed ivi morì dopo lunga ed onorata corsa il 15 Luglio 1810. Oltre le memorie di sopra accennate, Gianella ha pubblicato in particolare le opere seguenti: I *Dissertatio de igne*, Milano, 1772; II *De fluxionibus earumque usu*, Milano, 1772; III *De paradoxis virium agentium in ratione quavis distantiarum a dato puncto*

in medio non resistente, Milano, 1773; IV *De tensione funium*. Milano, 1775; questo scritto palesa tutte le cognizioni e i talenti del Gianella; V *Elementi di algebra*, Pavia, 1778; VI *Elementi di matematica*, Pavia, 1781.

GIERA (L'Abate Domenico), ex-gesuita italiano, nato a Genova nel 1729. Da' suoi superiori fu mandato giovane ancora a Milano, dove insegnò per lungo tempo nel collegio di Brera l'astronomia, l'ottica e la meccanica. La fama cui acquistò in tali diversi insegnamenti si diffuse per tutta l'Italia. Giera, che fu uno dei fondatori del celebre osservatorio di Milano tornò in seguito a Genova e vi morì nel 1813.

GILLY (David), ingegnere tedesco, nato nel 1748 a Schwedt nel Brandeburgo, ha scritto moltissime memorie e parecchie opere in tedesco sull'architettura idraulica e civile. Citeremo: I *Elementi di un corso d'idraulica con applicazione alla pratica*, Berlino, 1795, in-8; II *Istruzione pratica per l'architettura idraulica corredata di tavole, in società con Eytelwein*, Berlino, 1802-03, 2 parti, in-8, con atlante, in-4. Gilly, che era divenuto direttore del dipartimento delle fabbriche del regno di Prussia col titolo di consigliere del re, morì a Berlino nel 1808.

GIOACHINO (Giorgio), celebre matematico cognominato *Rheticus*, perchè era originario del paese de' Grigioni, in latino *Rhaetia*, nacque a Feldkirch il 16 Febbrajo 1514. Professò dapprima le matematiche nell'accademia di Vittemberga con molto grido: ma avendo udito parlare delle nuove scoperte di Copernico nel sistema del mondo, lasciò la sua cattedra per andare alla scuola di quell'uomo sommo, di cui divenne amico. Si dichiarò ben presto partigiano della mobilità della terra, e si attirò l'odio di tutti i capi dell'antica scuola, pubblicando un'opera nella quale stabiliva come verità incontrastabile il moto della terra intorno al sole, cui il suo maestro non aveva osato proporre che come un'ipotesi probabile: aggiunse anzi nuove ragioni a quelle addotte da Copernico in favore di tale sistema, e sostenne che se Aristotele fosse tornato al mondo, sarebbe stato il primo a riconoscere il suo errore. Retico viaggiò in seguito in diverse parti della Germania, e morì a Caschau a' 4 Dicembre 1576.

Le opere di questo dotto sono: I *Narratio de libris revolutionum Copernici*, Danzica, 1540, in-4; è l'esposizione e la difesa del sistema di Copernico; II *Orationes de astronomia et geographia et de physica*, Norimberga, 1542; III *Ephemeris ex fundamentis Copernici*, Lipsia, 1550, in-4; IV *Opus palatinum de triangulis*, in-fol. di 780 pag. Tale opera fu pubblicata da Valentino Ottone, discepolo dell'autore, ma l'edizione è scorretta. Bartolommeo Pitisco ne pubblicò una infinitamente migliore nel 1613 col titolo: *Thesaurus mathematicus*. Retico aveva pure in mente di pubblicare altre opere, come dei *Comenti* sopra Euclide, un *Trattato di astronomia*, *Tavole pel calcolo degli eclissi*, ec., ma nessuna di esse ha veduto la luce. Per maggiori particolarità sugli scritti di questo autore si veda l'articolo che lo riguarda nella *Biografia universale*.

GIORDANI (Vitale), celebre matematico, nato nel 1633 a Bitonto nel regno di Napoli. Si diede dapprima alla carriera militare, e non applicossi alle matematiche che in età di 26 anni; ma tale fu la rapidità e l'importanza dei progressi che vi fece, che nel 1666 fu scelto per professarle nell'accademia fondata a Roma da Luigi XIV. La regina Caterina di Svezia lo nominò suo matematico; il papa Clemente X lo fece nel 1672 ingegnere del castello S. Angelo, e nel 1685 fu preposto alla cattedra di matematiche nel collegio della Sapienza. Le sue opere sono: I *Corso di matematica che comprende Euclide restituito*, Roma, 1680, 1686, in-fol.: tale corso di matematiche doveva esser composto di più volumi; ma il solo primo è stato stampato. II *De componendis gravium momentis*, ivi,

1685; III *Fundamentum doctrinae motus gravium*, ivi, 1686; IV *Ad Hyacint. Cristoforum epistola*, ivi, 1705, in-fol.; V Lasciò pure manoscritto il corso di geometria che serviva per le sue lezioni nell' accademia di Roma fondata da Luigi XIV.

GIORNO (*Astron.*). Durata della rivoluzione apparente del sole intorno alla terra. *Vedi* CALENDARIO, n° 1, *e* EQUAZIONE DEL TEMPO.

GIOVE (*Astron.*). È questo il pianeta più voluminoso del nostro sistema, e dopo Venere il più brillante: che anzi qualche volta il suo splendore supera quello di quest' ultima.

Giove è il quinto pianeta nell'ordine delle distanze dal sole, rapporto agli antichi pianeti, ma oggi in realtà è il nono, contando i nuovi quattro recentemente scoperti. S' indica comunemente col segno ♃.

Questo pianeta, che è circa 1500 volte più grosso della terra, e la cui rivoluzione intorno al sole si effettua in un periodo di 4332 giorni, 14 ore, 18 minuti e 15 secondi, è ciò non ostante quello il cui moto di rotazione è il più rapido, perchè gira intorno a sè stesso in 9 ore, 55 minuti e 50 secondi. A motivo dell' estrema celerità di questo moto, e come conseguenza del sistema della gravitazione universale, Giove è molto schiacciato verso i poli: le misure che con un' accuratezza estrema ne sono state prese danno pel rapporto del diametro equatoriale al diametro polare, quello dei numeri 107:100: lo schiacciamento è dunque eguale a $\frac{7}{107}$ del diametro equatoriale, vale a dire circa $\frac{1}{15}$, mentre quello della terra non è che di $\frac{1}{300}$.

Il disco di Giove presenta sempre delle fasce o zone, di cui abbiamo già parlato all' articolo FASCE DI GIOVE, e che gli danno l'apparenza rappresentata dalla figura 4 della tavola XXXIV. Furono esse scoperte dai padri Zuppi e Bartoli, dotti gesuiti, ed osservate quindi da Campani nel 1660 con un telescopio a refrazione da lui medesimo costrutto.

Giove è accompagnato da quattro piccoli pianeti o *satelliti*, che, rapporto ad esso, sono ciò che la luna è rapporto alla terra. Questi satelliti invisibili all' occhio nudo, e per conseguenza ignoti agli antichi astronomi, sono stati scoperti da Galileo l'8 Gennajo 1610. Dopo il perfezionamento dei cannocchiali astronomici, gli ecclissi estremamente frequenti di questi satelliti offrono un mezzo preziosissimo per determinare le longitudini terrestri. *Vedi* LONGITUDINE.

Secondo le misure le più esatte e le più recenti, il diametro equatoriale di Giove è 10,860, prendendo per unità quello della terra: ne risulta perciò che il volume di questo enorme pianeta è eguale a 1470 volte quello della terra: ma siccome la sua massa o la quantità di materia di cui è composto non è che circa 338 volte più grande della massa della terra (*Vedi* MASSA), la sua densità confrontata con quella della terra, presa egualmente per unità, è 0,23, vale a dire che essa non supera quella dell' acqua.

Ecco gli elementi di Giove, riferiti al 1.° Gennajo 1801.

Rivoluzione siderea	4332$^{gior.}$,5848212
Longitudine media	112° 15′ 23″,0
Inclinazione sull' eclittica	1 18 51 ,3
Longitudine del perielio	11 8 34 ,6

Longitudine del nodo ascendente . . . . 98° 26′ 18″,9
Semiasse maggiore, preso per unità quello della terra. 5,2027760
Eccentricità in parti del semiasse maggiore. 0,0481621

L' asse di Giove fa un angolo di 86° 54′ $\frac{1}{2}$ col piano dell' ecclittica. La massima distanza di questo pianeta dal sole, valutata in leghe di 2000 tese, è di 213,933,505 leghe, e la minima di 194,267,055 leghe. Le sue distanze dalla terra variano da 253,820,766 fino a 154.379,794 leghe.

GIOVILABIO (*Astron.*). Strumento atto a trovare le configurazioni o le situazioni apparenti respettive dei satelliti di Giove. Lalande ne ha data la descrizione nel suo *Trattato di astronomia.*

GIRAFFA (*Astron.*). Nome di una costellazione settentrionale, situata tra l' Orsa maggiore, Cassiopea, Perseo e il Cocchiere. Essa comprende 58 stelle nel catalogo britannico.

GIRARD (Alberto), geometra olandese, nato verso la fine del XVI secolo, deve considerarsi nella storia della scienza come uno dei precursori di Cartesio, quantunque non abbia fatto in certo modo che presentire alcune verità, che era riservato a questo grand' uomo di sviluppare. L' opera sua principale, che è intitolata: *Invenzione nuova in algebra*, e ch' ei pubblicò nel 1629 in-4, comprende infatti non poche vedute nuove, le quali annunziano studj profondi in geometria e in algebra. Vi si trova una cognizione delle radici negative assai più sviluppata che negli scritti contemporanei sullo stesso soggetto. Alberto Girard dà in quest' opera un saggio assai ingegnoso sugli angoli solidi e sulla loro misura, oggetto fino allora trascurato dai geometri. Vi misura, per la prima volta, la dimensione in superficie, non solo dei triangoli sferici, ma delle figure qualunque formate sulla superficie di una sfera da archi di circoli massimi. Uno degli oggetti di questo libro è pure quello di dimostrare che nelle equazioni cubiche che conducono al caso irriducibile vi sono sempre tre radici, due positive e una negativa, o viceversa. È noto come Viète aveva già costruite queste equazioni, ma si era limitato ad assegnare le radici positive; Girard va più oltre ed assegna le negative che appella *per meno*, ed è certamente una gloria per lui l'aver dimostrato molti anni avanti a Cartesio l' uso delle radici negative in geometria. Si deve pure ad Alberto Girard un' edizione delle opere di Stevino, pubblicata a Leida nel 1634, in-fol. Nella prefazione annunzia che aveva ristabilito i tre libri dei *Porismi* di Euclide e che tale opera era per uscire alla luce: ma non fu mai stampata. Montucla dice che se Girard fosse effettivamente riuscito in tale intento, bisognerebbe considerarlo in tal genere come un edipo più grande ancora di Simpson, perchè questo geometra, quantunque assai perito nella geometria antica, confessa che gli ultimi due libri dei *Porismi*, descritti da Pappo, sono per lui un enimma insolubile. Questo geometra, che dedicò l' intera sua vita a lavori utili ai progressi della scienza, ma poco brillanti e soprattutto poco lucrosi, morì in una condizione prossima all' indigenza nel 1634. Per maggiori particolarità sugli scritti di questo dotto si consulti la *Storia delle matematiche* di Montucla.

GIRARD (Pietro Simone), nato nel 1765 a Caen, ove fece i suoi primi studj. L' inclinazione sua chiamandolo alle scienze, entrò nel corpo degl' ingegneri e poco dopo riportò nel 1792 un premio all' Accademia delle Scienze di Parigi per una memoria sulle cateratte. Nel 1798 accompagnò Bonaparte nella spedizione dell' Egitto, e al suo ritorno fu fatto ingegnere in capo e direttore del canale

dall' Ourcq. Ricevè in seguito molte ed importanti commissioni dal governo, e morì a Parigi nel 1835. Si hanno di lui parecchi scritti, e tra gli altri: I *Traité analytique de la résistance des solides*, Parigi, 1798, in-4; Il *Essai sur le mouvement des eaux courantes, et la figure qu'il convient de donner aux canaux qui les contiennent*, ivi, 1810, in-4.

GIUGNO (*Calend.*). Nome del sesto mese dell'anno. Verso il 20 o il 21 di questo mese termina la primavera e comincia l'estate, poichè allora il sole entra nel segno del Canero. *Vedi* CALENDARIO *e* ARMILLARE.

GIULIANO (PERIODO). *Vedi* PERIODO.

GIUNONE (*Astron.*). Uno dei nuovi pianeti situati tra l'orbita di Marte e quella di Giove; è stato scoperto il 2 Settembre 1804 da Harding all'osservatorio di Lilieotal.

L'estrema piccolezza e il poco splendore dei due pianeti Cerere e Pallade avevano fatto concepire a Harding il progetto di dare una descrizione completa della zona percorsa da questi piccoli pianeti, perchè gli astronomi non fossero più esposti all'errore di osservare in loro vece alcuna delle stelle telescopiche delle quali tutte le regioni celesti sono piene. Verificando con accuratezza le carte che a tale oggetto aveva costruite, quest'astronomo, nella notte dal 1 al 2 Settembre 1804, determinò la posizione di una stella di ottava grandezza confrontandola colle stelle dei Pesci, segnate dei numeri 93 a 98 nel catalogo di Bode. Il 4 Settembre, la stella aveva variato di posizione, e si trovava un poco più australe e un poco più occidentale. Dal 5 al 6, Harding, con un micrometro circolare, riconobbe un moto retrogrado in ascensione retta di 7′ 30″, e un moto di 12′ 42″ in declinazione australe, essendo di 24 ore, 14 minuti e 12 secondi l'intervallo delle osservazioni. Il 7 e l'8 dello stesso mese essendo stati verificati questi movimenti, Harding si affrettò ad annunziare la sua scoperta, e Gauss, che aveva già calcolato le orbite di Cerere e di Pallade, determinò pure quella del nuovo pianeta, al quale fu dato il nome di *Giunone*.

Questo pianeta è di un colore biancastro e non presenta traccia veruna di atmosfera: il suo diametro è più piccolo di quelli degli altri nuovi pianeti, ed è per conseguenza il più piccolo del sistema solare. La sua orbita si distingue da tutte le altre per la grande sua eccentricità il cui effetto è talmente sensibile, che il pianeta descrive la metà dell'orbita, che comprende il perielio, nella metà del tempo che impiega a descrivere l'altra metà, che comprende l'afelio.

Ecco gli elementi di Giunone, riferiti al 1.° Gennajo 1820.

Rivoluzione periodica	1592 gior.,6608
Longitudine media	200° 16′ 19″,1
Inclinazione sull'ecclittica	13 4 9 ,7
Longitudine del perielio	53 33 46 ,0
Longitudine del nodo ascendente	171 7 40 ,4
Semiasse maggiore, preso per unità quello della terra	2,6690090
Eccentricità in parti del semiasse maggiore	0,2578480
Diametro medio apparente, secondo Schroeter	3″,057

Non è stato ancora possibile di scoprire se Giunone, al pari di tutti gli antichi pianeti, abbia un moto di rotazione sul suo asse; ciò non ostante le osser-

vazioni di Schroeter, sul cangiamento della luce di questo pianeta, rendono assai probabile una rotazione che si effettui nel periodo di 27 ore.

GLOBO. In geometria s'indica con questa parola un corpo rotondo che s' immagina generato dalla rivoluzione di un semicircolo intorno al suo diametro: comunemente questo corpo si dice *sfera*. *Vedi* Sfera.

Si chiama Globo artificiale in geografia e in astronomia, un globo di metallo, di legno o di cartone, sulla superficie del quale si rappresenta la terra o il cielo, coi diversi circoli che su di essi s' immaginano condotti. I globi che rappresentano la terra si chiamano *globi terrestri*, e quelli che rappresentano il cielo, *globi celesti*. Si vedano le figure 4 e 5 della tavola CIV. I limiti ristretti che ci sono imposti nella compilazione di questo Dizionario non ci permettono di dar qui la costruzione e l' uso di tali strumenti.

GNOMONE (*Astron.*). Strumento che serve a misurare l'altezza del sole. Questo nome viene dal greco γνωμον, che significa *riga diritta*, *stile diritto*. Lo gnomone è ordinariamente un pilastro, una colonna, o una piramide elevata verticalmente sopra una superficie piana, orizzontale, in un punto di una linea retta tirata su questa superficie, e che rappresenta la meridiana del luogo. Si veda la figura 7 della tavola CV. Per conoscere l' altezza del sole al suo passaggio pel meridiano, vale a dire l' altezza del sole al di sopra dell' orizzonte nell' istante del mezzogiorno vero, basta misurare la lunghezza dell' ombra projettata dallo gnomone quando quest' ombra cade precisamente sulla linea meridiana, perchè nel triangolo rettangolo formato dallo gnomone, dalla sua ombra e dal raggio luminoso, conoscendo due lati, rimane facile il calcolare l' angolo dell'ombra e del raggio, angolo che misura precisamente l' altezza del sole. Sia infatti CE (*Tav.* CV, *fig.* 7) uno gnomone, di cui esprimeremo con h l' altezza, e sia a la lunghezza CA della sua ombra, l'angolo EAC sarà l' altezza del sole, e si avrà (*Vedi* Trigonometria)

$$1 : \tang EAC :: a : h,$$

donde

$$\tang EAC = \frac{h}{a}.$$

Con questo metodo, 320 anni avanti l' era nostra, Pitea trovò il giorno del solstizio d' estate, a Marsiglia; la lunghezza dello gnomone stava a quella dell' ombra nel rapporto dei numeri 120 e $41 \frac{4}{5}$, il che dà pel valore della tangente dell' angolo di altezza il numero $\frac{182}{209}$; quest' angolo era dunque allora di $70° 47' 42''$, che bisogna ridurre a $70° 31' 35''$ per aver riguardo alla grandezza del semidiametro apparente del sole, e agli effetti della refrazione. Così, l' altezza dell' equatore essendo a Marsiglia di $46° 42' 17''$, si può concluderne che la distanza del sole dall' equatore nel momento del solstizio, cioè l' obliquità dell' eclittica, era presso a poco di $23° 49'$ al tempo di Pitea.

Il metodo di osservare le altezze del sole per mezzo dell' ombra di uno gnomone è sottoposto a parecchi inconvenienti, il principale dei quali consiste nel non essere l' ombra solare determinata con nettezza. Si è cercato di rimediarvi collocando alla sommità dello gnomone una lastra armata di un foro circolare, pel quale venga projettata sulla meridiana l'immagine brillante del sole. Le osservazioni le più importanti sono quelle di Cassini, fatte a Bologna nel 1656, e

quelle di Lemonnier, fatte a Parigi nel 1743, nella chiesa di S. Sulpizio. Esse hanno dimostrato la diminuzione progressiva dell' obliquità dell'ecclittica. *Vedi* ECCLITTICA. Per maggiori particolarità si consulti ancora l' articolo MERIDIANA.

GNOMONICA. Scienza degli orologi solari. Questo nome è derivato da *gnomone*, perchè i Greci distinguevano le ore dall' ombra di uno gnomone.

Si chiama *orologio solare* una superficie qualunque sulla quale si descrive una quantità di linee tali che l' ombra di una verga metallica infitta in questa superficie indichi le ore per mezzo della sua coincidenza con alcuna di queste linee. Le linee dell' orologio diconsi *linee orarie*, e la verga metallica prende il nome di *stile* o di *asse*, perchè si considera come formante parte dell' asse del mondo, nella direzione del quale è sempre collocata.

1. Per potere spiegare più facilmente le proprietà fondamentali degli orologi solari, supponiamo che l' asse del mondo, invece di essere una linea immaginaria, sia una verga metallica, e che il piano dell' equatore sia capace di ritenere l'ombra che vien prodotta dall'intersezione dei raggi solari con questa verga. Nel suo moto diurno apparente, il sole descrivendo sulla volta celeste un circolo parallelo all' equatore, l' ombra projettata dall' asse percorrerà successivamente il piano dell' equatore; e se s' immagina questo piano diviso in 24 parti eguali per mezzo di rette condotte dal centro alla circonferenza, la coincidenza dell' ombra con ognuna di queste rette indicherà un' ora determinata o una ventiquattresima parte del giorno solare vero. Noi chiameremo *piani orarj*, i piani d' ombra, vale a dire i piani che ad ogni istante passano per l' asse e pel centro del sole.

2. Ora, un punto qualunque della superficie della terra può esser considerato, senza errore sensibile, come il centro della sfera celeste, ed ogni piano condotto per questo punto parallelamente all' equatore, può prendersi pel piano medesimo dell' equatore. Se dunque si pone uno stile AB (*Tav.* CXLI, *fig.* 2) nella direzione dell' asse del mondo, e se gli si fa attraversare in un punto C un piano parallelo all' equatore, si avrà immediatamente un orologio solare descrivendo dal punto C una circonferenza di circolo, perchè basterà, per condurre le linee orarie, dividere questa circonferenza in ventiquattro parti eguali per mezzo di rette condotte dal centro C, procurando però che una di queste rette, CD, incontri la meridiana del luogo. Questa retta sarà la linea di *mezzogiorno*, e le altre indicheranno le ore avanti o dopo mezzogiorno, secondochè saranno dirette all' occidente o all' oriente della meridiana. L' orologio del quale abbiamo data così la descrizione dicesi *orologio equatoriale*. Affinchè possa esso servire tutto l' anno, bisogna che abbia due facce, perchè il sole si trova per sei mesi nell' emisfero boreale e per sei mesi nell' emisfero australe.

È chiaro che in questo orologio non s' incontra nessuna difficoltà per condurre le linee orarie, e basta solo che si sappia tirare una meridiana e collocare lo stile. Ci faremo ora a trattare questi stessi problemi la cui soluzione è egualmente essenziale in tutti gli altri orologi.

3. Dopo avere scelto un piano perfettamente orizzontale, si descriverà da un punto qualunque di esso preso come centro una circonferenza di circolo, e in questo punto si pianterà una verga di metallo di alcuni pollici di altezza esattamente perpendicolare al piano. Si osserverà prima di mezzogiorno l'istante in cui l' estremità dell' ombra della verga toccherà la circonferenza, e si segnerà il punto in cui tale incontro avrà avuto luogo; dopo mezzogiorno si osserverà di nuovo lo stesso fenomeno, e si segnerà parimente il secondo punto d' incontro. Si dividerà in due parti eguali l' arco compreso tra i due punti in tal modo determinati, e per questo punto di divisione e pel centro si condurrà una retta indefinita che sarà la meridiana. Siccome una sola osservazione fatta avanti e dopo mezzogiorno può mancare di precisione, è meglio descrivere più circonferenze

concentriche per poter determinare più punti la mattina e la sera; allora si ha una maggior certezza dell'esattezza del risultato, specialmente se tutti i punti di divisione degli archi si trovano sopra una medesima linea retta. Esistono ancora altri mezzi più esatti per condurre una meridiana, dei quali parleremo altrove. *Vedi* MERIDIANA.

4. Lo stile dovendo essere nella direzione dell'asse del mondo, bisogna che sia situato nel piano verticale che passa per la meridiana, e che faccia con questa linea un angolo eguale all'altezza del polo al di sopra dell'orizzonte, ossia alla latitudine del luogo. Queste due condizioni possono senza difficoltà ottenersi mediante una squadra sulla quale sia segnato l'angolo richiesto.

Per collocare l'orologio, basta poi far passare lo stile pel suo centro, in modo che esso sia esattamente perpendicolare al suo piano, il che può effettuarsi ancora per mezzo di una squadra.

5. Possiamo ora proporci di disegnare un orologio sopra una superficie piana in una situazione qualunque. Questo problema, preso nella sua massima generalità, si riduce a trovare le intersezioni dei piani orarj colla superficie data. Abbiasi primieramente un piano orizzontale.

6. *Orologio orizzontale.* Dopo aver condotta la meridiana AB, e posto lo stile AC (*Tav.* CXLI, *fig.* 3), in modo che l'angolo CAB sia eguale alla latitudine del luogo, non resta altro da fare che descrivere le linee orarie: ora, queste linee dovendo necessariamente incontrarsi nel punto A, che si suppone il centro della sfera celeste, basta per ognuna di esse determinare nel piano orizzontale un secondo punto che le appartenga. Immaginiamo un orologio equatoriale il cui centro sia in un punto qualunque dello stile, e il cui piano tagli il piano orizzontale dato secondo la retta MN. Questa retta sarà la traccia del piano dell'equatore su quello dell'orizzonte. Questa linea si chiama *linea equinoziale*. Se ora s'immagina che per l'asse AC e per ognuna delle linee orarie DE, DP, ec. dell'orologio equatoriale si facciano passare dei piani, le intersezioni AE, AP, ec. di questi piani col piano orizzontale saranno le linee orarie dell'orologio orizzontale. Si potranno dunque condurre immediatamente queste linee orarie conoscendo soltanto i punti E, P, ec. in cui le linee orarie dell'orologio equatoriale, prolungate sufficientemente, incontrano la linea equinoziale MN. Questa considerazione così semplice ci somministra i mezzi tanto di calcolare la grandezza degli angoli orarj EAB, PAB, ec. tra le linee orarie cercate e la meridiana AB, quanto di costruire graficamente queste linee.

Il triangolo BAD, rettangolo in D, ci dà (*Vedi* TRIGONOMETRIA)

$$1 : \text{sen}\, DAB :: AB : BD,$$

e il triangolo EBD, rettangolo in B, ci dà

$$1 : \text{tang}\, EDB :: BD : BE.$$

Da queste due proporzioni si trae

$$\frac{BE}{AB} = \text{tang}\, EDB \times \text{sen}\, DAB:$$

ma il triangolo BAE, rettangolo in B, ci dà pure

$$1 : \text{tang}\, BAE :: AB : BE,$$

dunque si ha

$$\text{tang}\, BAE = \frac{BE}{AB} = \text{tang}\, EDB \times \text{sen}\, DAB.$$

Così, osservando che l' angolo BDE può essere uno qualunque degli angoli orarj dell'orologio equatoriale, che l' angolo BAE è l'angolo orario corrispondente dell' orologio orizzontale, e che inoltre l' angolo DAB è la latitudine del luogo, se s' indicano con h gli angoli orarj equatoriali, con h' gli angoli orizzontali corrispondenti, e con λ la latitudine, si avrà infine l' espressione generale

$$\text{tang}\, h' = \text{tang}\, h \,\text{sen}\, \lambda \ldots\ldots (1),$$

nella quale non resterà più che a sostituire in luogo di h le distanze angolari delle differenti ore del giorno a ragione di 15° per ora a contare dal mezzogiorno, perchè le linee orarie dell' orologio equatoriale prese d' ora in ora dividono la circonferenza in 24 parti eguali, o di 15 in 15 gradi sessagesimali.

Se si trattasse dunque di trovare gli angoli orarj di un orologio orizzontale, per esempio per Parigi, ove la latitudine è di 48° 50', si farebbe nella formula (1), λ=48° 50', ed h successivamente eguale a 15°, 30°, 45°, ec., e si otterrebbero per h' i valori seguenti: 11° 25', 23° 29', 36° 58', ec.

Siccome le distanze angolari delle linee orarie sono le stesse prima e dopo mezzogiorno, cioè a destra e a sinistra della meridiana, si avrà dunque la linea delle undici ore e quella di un' ora, facendo da ciascuna parte della meridiana un angolo di 11° 25'; si avranno parimente le linee delle dieci e delle due, facendo degli angoli di 23° 29', e così di seguito. Se invece di dividere l'orologio d' ora in ora si volesse dividerlo di mezz' ora in mezz' ora, si farebbe successivamente nella formula (1) h eguale a 7° 30', 15°, 22° 30', 30°, ec., e si otterrebbero i seguenti valori per le distanze angolari delle linee orarie dalla linea di mezzogiorno:

	Mattina	Sera	
la linea delle	XI ½	XII ½	5° 39'
	XI	I	11 25
	X ½	I ½	17 18
	X	II	23 29
	IX ½	II ½	30 1
	IX	III	36 58
	VIII ½	III ½	44 26
	VIII	IV	52 31
	VII ½	IV ½	61 11
	VII	V	70 24
	VI ½	V ½	80 5
	VI	VI	90 0
	V ½	VI ½	99 55
	V	VII	109 36
	IV ½	VII ½	118 49
	IV	VIII	127 29

7. La costruzione grafica dell' orologio orizzontale è estremamente semplice. Sia A (*Tav.* CXLI, *fig.* 4) il centro dell' orologio e AB la meridiana, si farà l' angolo DAB eguale alla latitudine del luogo, e da un punto arbitrario D preso sopra AD si alzerà su questa retta una perpendicolare DB prolungata

fino al suo incontro in B colla meridiana. Per questo punto B si condurrà la retta indefinita MN perpendicolare alla meridiana, e sarà questa la linea equinoziale. Sul prolungamento della meridiana si prenderà BC eguale a BD, e prendendo BC per raggio si descriverà un semicircolo EBF. Si dividerà questo semicircolo in dodici parti eguali, e per ciascun punto di divisione si condurranno dei raggi che si prolungheranno fino al loro incontro coll' equinoziale MN. Si unirà finalmente il centro A con tutti i punti d'incontro per mezzo di rette, le quali saranno le linee orarie cercate. La linea delle ore sei è parallela all' equinoziale, e le linee al di sopra di quella delle ore sei sono i prolungamenti delle linee al di sotto.

La ragione di questa costruzione è evidente, perchè se col pensiero s'immagina alzato il triangolo ABD in modo che il suo piano divenga perpendicolare al piano dell' orologio, e se si fa girare il semicircolo EBF fintantochè CB si confonda con BD, si avrà la disposizione mediante le quale abbiamo determinato (*Tav.* CXLI, *fig.* 3) i valori degli angoli orarj. Infatti C che si confonde con D diviene il centro dell' orologio equatoriale, AD è l'asse, e i punti segnati X, XI, I, II, ec. sono le intersezioni delle linee orarie coll' equinoziale.

8. *Orologio verticale.* Si dà questo nome a qualunque orologio descritto sopra una superficie piana perpendiculare al piano dell' orizzonte. Quest' orologio prende diversi nomi secondo la direzione della sua intersezione coll' orizzonte. Si dice *verticale meridionale* quando guarda esattamente il polo sud, vale a dire quando è perpendicolare al piano del meridiano, e si trova per conseguenza nel piano del primo verticale: *verticale declinante*, quando fa un angolo qualunque col piano del primo verticale, e questo orologio prende poi particolarmente il nome di *orologio orientale*, quando il suo piano essendo nel piano stesso del meridiano ha la faccia rivolta a levante, e *orologio occidentale*, quando essendo sempre nel piano del meridiano la sua faccia guarda l'occidente. Passeremo adesso ad esporre la costruzione di questi diversi orologi.

9. *Orologio verticale meridionale.* Sia A (*Tav.* CXLI, *fig.* 5) il centro dell' orologio; la linea AC, determinata da un filo a piombo, sarà la linea del mezzogiorno, o l'intersezione del piano del meridiano con quello dell'orologio. Si porrà lo stile AB nella direzione dell' asse del mondo, il che si eseguirà collocandolo esattamente nel piano del meridiano, e in modo che faccia colla meridiana un angolo BAC eguale al complemento della latitudine del luogo. Ciò posto, immaginiamo un orologio equatoriale il cui centro sia in un punto qualunque B dello stile; il piano di questo orologio taglierà il piano verticale lungo una retta MN perpendicolare ad AC, la quale sarà l'equinoziale dell' orologio cercato.

Così, unendo mediante le rette AD, AE, ec. il centro A coi punti D, E, ec. in cui le linee orarie dell' orologio equatoriale tagliano l'equinoziale, si avranno le linee orarie cercate dell' orologio verticale meridionale. Questa costruzione dà immediatamente l'espressione dell' angolo orario dell' orologio verticale, perchè il triangolo CBA, rettangolo in B, dà

$$1 : \text{sen}\,BAC :: AC : BC,$$

donde $AC = \frac{BC}{\text{sen}\,BAC}$; il triangolo CBD, rettangolo in C, dà

$$1 : \text{tang}\,CBD :: BC : CD,$$

donde $CD = BC\,\text{tang}\,CBD$; e finalmente il triangolo ADC, rettangolo in C, dà

$$1 : \text{tang}\,CAD :: AC : CD,$$

donde $\tang CAD = \frac{CD}{AC}$, e per conseguenza

$$\tang CAD = \tang CBD \sen BAC:$$

ora CAD è l'angolo orario dell'orologio verticale, CBD l'angolo orario corrispondente dell'orologio equatoriale a BAC il complemento della latitudine. Si ha dunque in generale, dando ad h, h' e λ lo stesso significato dato loro di sopra,

$$\tang h' = \tang h \sen(90^\circ - \lambda) = \tang h \cos\lambda,$$

espressione che, facendo soccessivamente h eguale a 15°, 30°, 45°, ec., ci darà le distanze angolari delle linee orarie dalla linea del mezzogiorno. Se ne farà il calcolo come per l'orologio orizzontale.

Confrontando la disposizione dalla figura 5 con quella della figura 3, che ci ha servito a trovare l'angolo orario dell'orologio orizzontale, si vede che la costruzione grafica dell'orologio verticale meridionale è presso a poco simile a quella dell'orologio orizzontale, e che questa costruzione può eseguirsi nel modo seguente.

Sia C (*Tav.* CXV, *fig.* 5) il centro dell'orologio che vuol descriversi, si conduca la linea CA che faccia colla meridiana CD un angolo ACD eguale al complemento della latitudine del luogo; da un punto A, preso sopra AC, si conduca sopra AC una perpendicolare AE, e dal punto E in cui questa perpendicolare incontra la meridiana, conduciamo BG perpendicolare a CD. Sarà questa l'equinoziale. Prendiamo ED = AE, e dal punto D come centro descriviamo il quarto di circolo EFQ. Dividiamo questo quarto di circolo in sei parti eguali, e per ognuno dei punti di divisione conduciamo dei raggi prolungati fino al loro incontro coll'equinoziale, e pel centro C conduciamo le rette C11, C10, C9, ec. Queste rette saranno le linee orarie prima di mezzogiorno. Una stessa costruzione a sinistra della meridiana ci darà le linee orarie dopo mezzogiorno.

Il tempo più lungo che l'orologio verticale meridionale possa indicare le ore, è dalle sei della mattina fino alle sei della sera, e ciò ha luogo nel tempo degli equinozj. Dopo l'equinozio d'autunno, il sole illumina la faccia meridionale dal piano del primo verticale in tutto il tempo che sta anll'orizzonte, ma allora si alza dopo le sei e tramonta sempre avanti le sei. Dopo l'equinozio di primavera, il sole si alza sempre prima delle sei, ma comincia ad illuminare la faccia settentrionale di questo piano, ed è sempre più della sei quando i suoi raggi cominciano a percuotere la faccia meridionale, come parimente sulla sera cessa d'illuminare questa faccia prima delle sei. Se si volesse costruire un orologio verticale *settentrionale*, il che si eseguirebbe esattamente nella stessa maniera spiegata di sopra, colla sola differenza che lo stile dovrebbe fare colla meridiana un angolo BAC (*Tav.* CXLI, *fig.* 4) eguale al supplemento dell'angolo BAC complemento della latitudine, è chiaro che questo orologio non potrebbe servire che quando il sole è al nord del primo verticale, e anco allora non indicherebbe che poche ore la mattina e la sera.

10. *Orologio verticale declinante.* Quest'orologio è quello che più comunemente si descrive sui muri. Così ci faremo, come pei precedenti, ad insegnare la maniera di calcolare le distanze angolari delle linee orarie dalla linea di mezzogiorno, che si ottiene immediatamente col filo a piombo, e ad esporre la sua costruzione grafica.

Per semplificare la questione, supponiamo che avanti al muro si trovi collocato un orologio orizzontale bene orientato. Lo stile di questo orologio, prolun-

gato fino al muro, indicherà il posto, la direzione e la situazione dello stile dell' orologio che vuol costruirsi. Le linee orarie, prolungate parimente fino al muro, vi segneranno ognuna un punto per dove deve passare la linea oraria corrispondente dell' orologio verticale; così, il centro essendo dato dallo stile, si potranno facilmente condurre le linee orarie sul piano verticale declinante.

Sia dunque (*Tav.* CXLI, *fig.* 6) A il centro dell' orologio orizzontale, e AD il suo stile prolungato indicante in D il centro dell' orologio verticale. Sia inoltre MN l'equinoziale dell' orologio orizzontale, ed M'N' l'equinoziale dell' orologio verticale, determinata sul suo piano dall' intersezione del piano orizzontale. Allora l' angolo M'BM sarà l' angolo di declinazione del piano verticale, e BAE essendo un angolo orario qualunque dell' orologio orizzontale BDC sarà l' angolo orario corrispondente dell' orologio verticale. Indichiamo con λ la latitudine del luogo ossia l' angolo DAB, con δ la declinazione del piano verticale espressa dall' angolo M'BM, con H l' angolo orario orizzontale EAB, e con H' l' angolo orario verticale BDC. I triangoli ADB, ABE, ambedue rettangoli in B, ci danno

$$1 : \text{tang}\,\lambda :: AB : BD,$$

$$1 : \text{tang}\,H :: AB : BE,$$

donde si ottiene

$$BE = \frac{BD\,\text{tang}\,H}{\text{tang}\,\lambda}.$$

Da un' altra parte il triangolo CBE ci dà

$$BC : BE :: \text{sen}\,CEB : \text{sen}\,ECB;$$

ma CEB è il complemento dell' angolo orario H, e di più l' angolo CBE è la declinazione del piano verticale, perciò si ha

$$ECB = 180^\circ - CEB - CBE = 180^\circ - (90^\circ - H) - \delta = 90^\circ + H - \delta,$$

per conseguenza la proporzione superiore equivale all' altra

$$BC : BE :: \text{sen}(90^\circ - H) : \text{sen}(90^\circ + H - \delta) :: \cos H : \cos(H - \delta),$$

donde si ottiene

$$BC = \frac{BE \cos H}{\cos(H - o)};$$

e sostituendo in questo valore di BC quello di BE trovato di sopra, esso diverrà

$$BC = \frac{BD\,\text{tang}\,H \cos H}{\text{tang}\,\lambda \cos(H - \delta)},$$

il che darà

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\text{sen}\,H}{\text{tang}\,\lambda \cos(H - \delta)},$$

osservando che $\text{tang}\,H \cos H = \text{sen}\,H$.

Ora il triangolo CBD, rettangolo in B, ci dà

$$1 : \text{tang}\,H' :: BD : BC,$$

donde

$$\tang H' = \frac{BC}{BD},$$

e finalmente

$$\tang H' = \frac{\sen H}{\tang \lambda \cos(H - \delta)} \ldots\ldots (1).$$

Quest' esprèssione ci darà i valori degli angoli orarj dell' orologio verticale, sostituendo in luogo di H i valori angolari degli angoli dell' orologio orizzontale, i quali sono dati dalla formula

$$\tang H = \tang h \sen \lambda \ldots\ldots (2),$$

essendo h l' ora contata da mezzogiorno e ridotta in gradi dell' equatore a ragione di 15° l' ora. Si veda quanto è stato detto di sopra al n.° 4.

In questa costruzione non abbiamo considerato che la metà del piano dell' orologio, quella cioè che riceve le ombre dopo mezzogiorno; per rendere la formula applicabile all' altra metà, siccome in questo caso le due metà dell' orologio non sono più simili, bisogna fare H negativo, il che dà

$$\tang H' = -\frac{\sen H}{\tang \lambda \cos(H + \delta)},$$

ove il segno negativo di tang H' indica che l'angolo H' deve esser preso sull' orologio all' occidente della meridiana.

Facendo girare il piano verticale intorno alla sua linea equinoziale M'N' finchè venga a stendersi interamente sul piano orizzontale, si trova senza difficoltà la costruzione che adesso passiamo ad esporre. Sia D (*Tav.* CXLII, *fig* 1) il centro dell' orologio verticale, e BD la meridiana verticale; conduciamo arbitrariamente una retta M'N' perpendicolare a BD, e pel punto B conduciamo un' altra retta MN che faccia con M'N' un angolo MBM' eguale alla declinazione del piano verticale. Dal punto B alziamo sopra MN una perpendicolare indefinita BA, che rappresenterà la meridiana dell' orologio orizzontale. Per trovare il centro di quest' ultimo, facciamo nel punto D un angolo BDA' eguale al complemento della latitudine e portiamo la distanza BA' da B in A: A sarà il centro dell' orologio orizzontale. Non si tratta dunque più che di descrivere questo orologio col metodo indicato di sopra, prendendo A per centro e AB per meridiana, e le intersezioni delle sue linee orarie coll' equinoziale M'N' dell' orologio verticale ci daranno i secondi punti cercati delle linee orarie di quest' ultimo. Ma, per servirci delle costruzioni già fatte, abbassiamo dal punto B sopra DA' la perpendicolare BE, e portiamo la lunghezza BE da B in P: P sarà il centro dell' orologio equatoriale per mezzo del quale bisogna costruire l' orologio orizzontale. Descriviamo dunque il semicircolo QBS, e dividiamolo in dodici parti eguali; facciamo passare dei raggi per tutti i punti di divisione, prolungandoli fino all' equinoziale MN dell' orologio orizzontale, e si terminerà quindi quest' orologio come viene indicato nella figura; le linee orarie o i loro prolungamenti incontreranno M'N' nei punti IX, X; XI, I, II, ec. Finalmente si conduca dal punto D una retta ad ognuno di questi punti e l' orologio cercato sarà così costrutto.

11. È però una ricerca preventiva della massima importanza quella di conoscere con esattezza la declinazione del piano verticale, sia che non voglia farsi altro che la sola costruzione grafica, sia che vogliano calcolarsi le distanze angolari delle

linee orarie dalla linea di mezzogiorno mediante le formule (1) e (2). Indicheremo un mezzo semplicissimo per ottenere questa notizia. Dopo aver piantato l'asse AC (*Tav.* CXLII, *fig.* 2), si sa che esso deve esser sempre nel piano del meridiano e nella direzione dell'asse del mondo: per l'estremità C di quest' asse si condurrà un'orizzontale CD, e si segnerà il punto D dove essa incontra la meridiana AXII: quest'ultima è data in tutti gli orologi verticali dalla direzione di un filo a piombo sospeso al centro A dell'orologio. Per questo punto D si condurrà nel piano dell'orologio un'orizzontale MDN sulla quale si segneranno due punti M ed N egualmente distanti dal punto D. Ciò fatto, si misureranno colla massima accuratezza tutti i lati dei triangoli MCD, DCN, ed in ognuno di essi si calcolerà l'angolo in D. In tutti i casi questi due angoli debbono essere supplementi l'uno dell'altro, il che serve a verificare l'operazione; se sono ambedue retti, il piano è senza declinazione, cioè direttamente meridionale; se sono diseguali, la loro differenza è eguale alla deviazione del piano dell'orologio.

12. Quando la deviazione del piano dell'orologio è eguale a 90°, questo piano si confonde allora col piano del meridiano, e l'orologio prende il nome di *orientale* o di *occidentale*, secondochè è seguato sulla faccia che guarda a levante o su quella che è rivolta a ponente. La costruzione è la stessa in ambedue i casi.

Adesso il piano dell'orologio contenendo l'asse non può ricevere la sua ombra; è perciò necessario collocare quest' asse fuori del piano e parallelamente ad esso. Si prenda dunque a piacere un punto A (*Tav.* CXVII, *fig.* 5); si conduca primieramente nel piano una orizzontale indefinita AB, e quindi una retta AK che faccia con questa un angolo eguale al complemento della latitudine del luogo. Da un punto qualunque D si alzerà sopra AK una perpendicolare EDC, che rappresenterà l'asse del mondo. Nel punto D si eleverà una verga o *falso stile* di una lunghezza di alcuni pollici, e alla sua estremità si fisserà il vero stile inclinandolo parallelamente ad EC. Ciò posto, si prenderà DE eguale alla lunghezza del falso stile, e pel punto E si condurrà EG parallela ad AK, e sarà questa l'equinoziale. Dal punto D come centro e con DE per raggio, si descriverà una circonferenza EKC, di cui si dividerà la metà inferiore in 12 parti eguali, e per ciascun punto di divisione si condurrà un raggio, che si prolungherà fino al suo incontro coll'equinoziale EG. Per tutti i punti così trovati sull'equinoziale, si condurranno delle rette parallele ad EC, le quali saranno le linee orarie cercate. EC è la linea delle ore sei, vale a dire che sono le sei della mattina o della sera quando l'ombra dello stile coincide con EC. Dietro ciò è facile conoscere quali sono le ore indicate dalle altre linee.

L'*orologio orientale* non può servire che dalla mattina fino a mezzogiorno, e l'*orologio occidentale* da mezzogiorno fino alla notte. In questi due orologi le linee orarie sono tutte parallele tra loro e all'asse del mondo, perchè quest'asse essendo l'intersezione comune di tutti i piani orarj, ed essendo inoltre parallelo al piano dato, le intersezioni dei piani orarj con questo non possono incontrare l'asse e gli sono necessariamente parallele. È dunque facile il rendersi ragione della costruzione che adesso abbiamo esposta.

13. *Orologi inclinati.* Si dà in generale questo nome a tutti gli orologi il cui piano fa un angolo qualunque col piano dell'orizzonte. In questo senso, l'orologio equatoriale e tutti gli orologi verticali sono *orologi inclinati*. Se l'intersezione del piano dell'orologio coll'orizzonte è una retta che passa pei punti di oriente e di occidente, l'orologio è semplicemente *inclinato*; in tutti gli altri casi l'orologio si dice *inclinato* e *declinante*.

La costruzione di un *orologio inclinato* non presenta maggior difficoltà di quella di un orologio orizzontale; basta soltanto che nella formula

$$\text{tang}\, h' = \text{tang}\, h \,\text{sen}\, \lambda$$

venga sostituito sen$(\lambda+i)$ in luogo di senλ, essendo i l'inclinazione del piano, che si misura per mezzo di un quarto di circolo graduato; come nella costruzione grafica (*Tav.* CXLI, *fig.* 4) basta che si faccia l'angolo BAD eguale a $\lambda+i$. Lo stile pure deve fare colla meridiana dell'orologio un angolo eguale a $\lambda+i$. Tutte queste condizioni sono evidenti di per sè senza che faccia d'uopo d'entrare in ulteriori spiegazioni.

14. Vi è però un caso notabile che noi dobbiamo esaminare, quello cioè in cui il piano dato passa pei poli del mondo, vale a dire quando la sua inclinazione è eguale alla latitudine. L'asse si trova allora interamente compreso nel piano e tutte le linee orarie gli sono parallele. L'orologio disegnato su questo piano prende il nome di *orologio polare*. Ve ne ha di due specie; se sono rivolti allo zenit, si chiamano *polari superiori*, e se guardano il nadir diconsi *polari inferiori*. I primi indicano le ore dalle sei della mattina fino alle sei della sera, e gli altri le ore della mattina fino alle sei, e quelle della sera dalle sei fino al tramonto del sole. La loro costruzione è la stessa; eccola:

Sul piano dell'orologio si conduca una retta orizzontale AB (*Tav.* CXV, *fig.* 6), e dopo aver preso CE per meridiana, da un punto D come centro, con DE per raggio, si descriva un quarto di circolo DGE. Si divida questo quarto di circolo in sei parti eguali, e dal centro D si conducano pei punti di divisione le rette D1, D2, D3, ec. che incontrano l'orizzontale AB. Si portino gl'intervalli E1, E2, E3, ec. dall'altra parte di CE, per tutti i punti di divisione si alzino delle perpendicolari ad AB, e queste saranno le linee orarie. Finalmente si alzi in D un falso stile perpendicolare al piano dell'orologio ed eguale al raggio DE, ovvero due falsi stili eguali a DE posti perpendicolarmente l'uno in E e l'altro in C; e sull'uno o sugli altri si collochi una riga parallela a CE: la sua ombra segnerà le ore cadendo sulle linee orarie segnate 1, 2, 3, ec.

Nell'*orologio polare inferiore*, si sopprimono le ore antimeridiane, 9, 10 e 11, e quelle dopo mezzogiorno, 1, 2, 3, e non si lasciano che le ore 7 e 8 della mattina e le 4 e 5 della sera, che divengono le ore 7 e 8 della sera e 4 e 5 della mattina rivoltando l'orologio.

15. *Orologio inclinato e declinante*. È questo il caso il più complicato e il più generale della gnomonica piana: non ostante ne otterremo la soluzione senza ricorrere ad altri principj che quelli che ci hanno fin qui guidato.

Siano (*Tav.* CXLII, *fig.* 3) DB la meridiana dell'orologio cercato, MN la sua equinoziale e DD' il suo asse. Prolunghiamo quest'asse fino al piano orizzontale che si può immaginare che passi per MN, e si prenda il punto A ove incontra esso questo piano per centro di un orologio orizzontale di cui M'N' condotta perpendicolarmente alla meridiana AB pel punto B e nel piano orizzontale sarà la linea equinoziale. Una linea oraria qualunque AE dell'orologio orizzontale taglierà l'equinoziale MN dell'orologio inclinato e declinante in un punto C che determinerà la linea oraria corrispondente DC di quest'ultimo orologio. Dunque non si tratta più che di calcolare l'angolo CDB. Ora indichiamo l'angolo DAB o la latitudine del luogo con λ, l'angolo MBM' o la deviazione del piano dato con δ e finalmente l'angolo ABD o l'inclinazione del piano con i: indichiamo inoltre con H l'angolo orario BAE, e con H' il suo corrispondente CDB. Ciò posto, il triangolo ADB ci dà

$$AB : BD :: \text{sen}(180^\circ-\lambda-i) : \text{sen}\,\lambda :: \text{sen}(\lambda+i) : \text{sen}\,\lambda,$$

e il triangolo ABE

$$1 : \text{tang}\,H :: AB : BE;$$

combinando insieme queste due proporzioni, se ne trae

$$BE = \frac{BD \operatorname{sen}(\lambda + i) \operatorname{tang} H}{\operatorname{sen} \lambda}.$$

Il triangolo CBE, nel quale si hanno gli angoli $CEB = 90° - H$, $CBE = \delta$ e $BCE = 180° - 90° + H - \delta = 90° + (H - \delta)$, ci dà

$$BC : BE :: \cos H : \cos(H - \delta),$$

donde

$$BC = \frac{BE \cos H}{\cos(H - \delta)}.$$

Sostituendo in questo valore di BC quello di BE, si otterrà

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\operatorname{sen}(\lambda + i) \operatorname{sen} H}{\operatorname{sen} \lambda \cos(H - \delta)}.$$

Ma il triangolo BDC, rettangolo in B, ci dà pure

$$1 : \operatorname{tang} H' :: BD : BC,$$

donde si trae

$$\operatorname{tang} H' = \frac{BC}{BD},$$

e per conseguenza

$$\operatorname{tang} H' = \frac{\operatorname{sen}(\lambda + i) \operatorname{sen} H}{\operatorname{sen} \lambda \cos(H - \delta)} \ldots\ldots (a),$$

formula nella quale l'angolo H dell'orologio orizzontale è dato dall'espressione

$$\operatorname{tang} H = \operatorname{tang} h \operatorname{sen} \lambda$$

essendo h l'ora espressa in gradi a ragione di 15° per ora. Per una metà dell'orologio si farà H negativo.

Questa espressione generale (a) deve contenere come casi particolari tutte quelle che abbiamo trovate precedentemente. Infatti, se si fa $i = 90°$, che è il caso degli orologi verticali, si ottiene $\operatorname{sen}(\lambda + i) = \operatorname{sen}(\lambda + 90°) = \cos \lambda$; e siccome $\frac{\cos \lambda}{\operatorname{sen} \lambda} = \frac{1}{\operatorname{tang} \lambda}$, così la formula (a) diviene allora

$$\operatorname{tang} H' = \frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{tang} \lambda \cos(H - \delta)},$$

che è la formula (1) del n° 10.

Se in quest'ultima si fa $\delta = 0$, che è il caso degli orologi verticali senza declinazione, si ottiene

$$\operatorname{tang} H' = \frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{tang} \lambda \cos H} = \frac{\operatorname{tang} H}{\operatorname{tang} \lambda};$$

e, sostituendo il valore di $\tang H$,

$$\tang H'=\frac{\tang h \sen \lambda}{\tang \lambda}=\tang h \cos \lambda,$$

che è la formula del n.° 9.

Finalmente, se nella formula (a) si fa $\delta=0$, si cade nel caso degli *orologi inclinati*, vale a dire

$$\tang H'=\frac{\sen(\lambda+i)\tang H}{\sen \lambda},$$

ossia

$$\tang H'=\tang h \sen(\lambda+i),$$

sostituendo il valore di $\tang H$.

La costruzione grafica degli *orologi inclinati declinanti* si eseguisce presso a poco nella stessa maniera di quella degli orologi verticali declinanti; per esempio, se DB (*Tav.* CXLII, *fig.* 4) rappresenta la meridiana ed MN l'equinoziale di un tale orologio, si condurrà dal centro D una retta DO' che faccia con DB un angolo BDO' eguale a $180°-(\lambda+i)$, e pel punto B un'altra retta BA', che faccia con DB l'angolo DBA' eguale all'inclinazione i. BA' sarà la distanza dal centro all'equinoziale nell'orologio orizzontale che deve servire alla costruzione. Dal punto B si condurrà pure BO' perpendicolare sopra DO', e BO' sarà il raggio dell'orologio equinoziale per mezzo del quale deve descriversi l'orologio orizzontale. Così, dopo aver condotto la retta M'N' che faccia con MN nel punto B un angolo MBM' eguale alla deviazione δ, e la retta AB perpendicolare sopra M'N', si prenderà AB = A'B e BO = BO'; dal punto O come centro si descriverà il semicircolo QBS, e si terminerà la costruzione come al n.° 10 (*Tav.* CXLII, *fig.* 1). È chiaro che essendo BAE un angolo orario dell'orologio orizzontale, BDC è l'angolo corrispondente dell'*orologio inclinato declinante*.

16. In tutti gli orologi dei quali abbiamo parlato, vi è uno stile parallelo all'asse del mondo; ma si può anco trovare l'ora solare per mezzo dell'altezza del sole in più maniere differenti con certi orologi portatili, pei quali non vi è bisogno di conoscere la meridiana. Non ci è qui possibile di descrivere tali orologi, per la descrizione dei quali non meno che per tutte le altre moltissime particolarità di gnomonica della quali non abbiamo potuto occuparci rimandiamo il lettore alle opere speciali. Alla parola UNIVERSALE si darà la costruzione di un orologio di questo genere, per mezzo del quale si può trovare l'ora col soccorso e senza il soccorso del sole, e coi soli raggi luminosi di un astro qualunque. Quanto agli orologi costruiti sopra superficie curve, non possiamo parimente occuparcene: ma tutta la gnomonica può ridursi ad un solo problema generale, che è il seguente: *Essendo dati dodici piani che si tagliano ad angoli eguali lungo una medesima retta, trovare le loro intersezioni con una superficie piana o curva situata in un modo qualunque rispetto a questi piani.* Tutte le costruzioni precedenti non sono che casi particolari di questo problema, e lo stesso ha luogo per tutte le altre. Ci resta soltanto da aggiungere poche parole intorno alla precisione che può sperarsi dagli orologi solari.

La gnomonica suppone che il moto del sole sia perfettamente uniforme, e che si effettui in un circolo esattamente parallelo all'equatore. Queste due ipotesi sono inesatte. Vediamo se questa inesattezza possa condurre a grandi errori. La durata della rivoluzione diurna del sole varia dalle ore 23 59' 40'' circa fino alle ore 24 0' 30''; questa differenza di 50'' da un limite al limite opposto non è

che di alcuni decimi di secondo tra due giorni consecutivi. Si può dunque conchiudere che archi eguali sono percorsi dal sole in un medesimo giorno in tempi sensibilmente eguali, e che l'ora solare viene rappresentata esattamente da un arco di 15° descritto intorno all'asse del piano orario. Quantunque il moto del sole non sia per sè stesso ben rappresentato da circoli paralleli all'equatore, perchè non lo sarebbe realmente che da un filo avvolto a guisa di spirale e a distanze diseguali intorno alla zona sferica che il sole descrive due volte nel suo corso annuo, se non si vuole aver riguardo che alle ore prossime al mezzogiorno, gli archi si potranno considerare come esattamente circolari e le ineguaglianze saranno insensibili. Ma vi sono altre cause di errore, che è impossibile di evitare, cioè la refrazione e la parallasse che alzano disegualmente il sole nelle differenti ore del giorno e nelle differenti stagioni dell'anno. Siccome queste cause hanno fortunatamente poca influenza sulle ore che maggiormente si approssimano al mezzogiorno, e non ne hanno nessuna nell'istante preciso del mezzogiorno, così è evidente che non può ricercarsi una gran precisione negli orologi solari che in vicinanza del mezzogiorno.

Quando si vuole che un orologio solare indichi il *mezzogiorno medio*, si costruisce intorno alla linea del mezzogiorno una curva che si dice *meridiana del tempo medio*. *Vedi* Meridiana.

Si costruiscono ancora degli *orologi lunari*; ma si può fare uso di tutti gli orologi solari per trovare l'ora mediante le ombre lunari, perchè a tale effetto basta conoscere l'età della luna, ossia il numero dei giorni scorsi dopo il novilunio. Dopo avere osservato l'ora indicata dalla luna sull'orologio solare, si aggiungeranno a quest'ora i tre quarti dell'età della luna, e la somma sarà l'ora solare. Questo metodo, che non deve considerarsi che come un'approssimazione, riposa sul fatto che la luna passa tutti i giorni al meridiano tre quarti d'ora più tardi del giorno precedente. Siccome nel giorno del novilunio la luna passa al meridiano nel tempo stesso del sole, così il giorno dipoi vi passa tre quarti d'ora dopo, il giorno successivo due volte tre quarti d'ora più tardi, e così di seguito. Se il numero dei giorni, moltiplicato per $\frac{3}{4}$ e sommato col numero delle ore, è maggiore di 12, bisogna togliere 12.

17. L'invenzione degli orologi solari è attribuita ad Anassimandro; sembra però che essa sia più antica, perchè si parla di uno di questi strumenti nella Bibbia sotto il regno di Achaz, cioè 775 anni prima dell'era volgare (Lib. IV dei Re, cap. 20, v. 10). Il loro uso era già assai comune in Grecia al tempo d'Eudossio, ma i Romani non li conobbero che assai tardi. Il primo che si vide in Roma fu costruito a cura di Papirio Cursore, 306 anni prima di G. Cristo. Molti autori hanno scritto sulla gnomonica: si deve a Clavio un'opera estesissima, della quale l'edizione pubblicata nel 1708, colle addizioni di Sturmio e coi metodi di Picard e di La Hire per costruire gli orologi solari in grande, è tuttora ciò che abbiamo di più completo su tale argomento. In seguito, Dechalles, Ozanam, La Hire, Wolf, Deparcieux, Rivard, Dom Bedos, Emerson, ec., hanno pubblicato dei trattati di gnomonica più o meno dettagliati. Delambre ne ha inserito uno curiosissimo nella sua *Storia dell'astronomia antica*.

GODIN (Luigi), membro dell'Accademia reale delle Scienze di Parigi, nacque in questa città nel 1704. Si dedicò con molta passione allo studio dell'astronomia, e tali furono i progressi che vi fece che in età appena di 21 anno fu nel 1725 ammesso alla Accademia. Venne poco dopo incaricato di scrivere la storia di questa società dal 1680 al 1699, e fu dietro un suo rapporto sulla questione della figura della terra che il ministero risolse di mandare degli astronomi all'equa-

tore e al polo, onde determinassero la misura della terra in maniera precisa. Essendo stato scelto con la Condamine e Bouguer per andare al Perù, partì dalle coste di Francia nel 1735, e pochi mesi dopo giunse coi suoi compagni a Quito, ove terminate le operazioni gli convenne restare, perchè il vicerè di Lima non volle acconsentire alla partenza degli accademici, che sotto la condizione che Godin rimanesse ad insegnare le matematiche in quella città. Solo nel 1751 gli fu permesso di tornare in patria; ma il suo posto di accademico pensionario essendo stato nella sua assenza conferito ad altri, si risolse di accettare l'offerta che gli venne fatta dalla Spagna di assumere la direzione della scuola delle guardie marittime di Cadice, impiego che tenne fino al 1756, in cui fu ristabilito nel grado di accademico pensionario. Egli però morì poco dopo nel 1760 a Cadice, ove si era recato a sistemare alcuni suoi affari particolari. Abbiamo di lui: I *Histoire de l'Académie depuis 1680 jusqu' à 1699*, 11 vol. in-4; II *La Table alphabétique des matières contenues dans l'Histoire de l'Académie depuis son établissement jusqu'en 1730*, 4 vol. in-4; che poi fu continuata da Demours e Cotte fino al 1790, 10 vol. in-4; III Un *Appendix aux Tables astronomiques de Lahire*, per l'edizione del 1727, in-4; IV Compilò la *Connaissance des temps* per gli anni 1730, 1731, 1732 e 1733; V Cooperò altresì al *Recueil des machines approuvées par l'Académie des Sciences*, pubblicato da Gallon, 6 vol. in-4.

GONIOMETRIA (*Geom.*). Questa parola deriva da γωνια, *angolo*, e da μετρον, *misura*, e serve a indicare l'arte di misurare gli angoli, non meno che di disegnare sulla carta gli angoli di cui sia nota in gradi la grandezza. Si consulti la *Goniométrie* di Francoeur. Alla parola Angolo abbiamo spiegato per qual ragione ci serviamo del circolo per la misura degli angoli, e ciò che deve intendersi pel numero dai loro gradi.

GONZALVEZ da COSTA (Emanuele), astronomo portoghese, nato nel 1605 presso Coimbra, e morto nel 1688. Ha scritto: I *Noticias, ec.*, ó *Notizie astrologiche sopra l'influenza delle stelle*, Lisbona, 1659, in-4; opera assai curiosa, in cui l'autore sostiene con ingegno e profondità i principj che ha fatti suoi. II *Braululagia, ec.*, o *Trattato astrologico del sole, della luna, de' pianeti, de' loro varj aspetti, delle costellazioni, degli ecclissi, ec.*, Coimbra, 1670, in-4. Tale libro può venire considerato come un corso compiuto di astronomia, non ostante la parola di *astrologia*, cui porta abusivamente nel frontespizio. Gonzalvez l'arricchì di tutte le cognizioni che aveva acquistate coll'assiduo studio di parecchi anni: e le nuove scoperte che vennero fatte in seguito in tale scienza non impediscono che l'opera sua possa essere ancora letta con frutto. Egli lasciò manoscritto un *Trattato sugli ecclissi, coll' istanza del loro principio e l'epoca della loro durata*, che si conserva nella biblioteca di Coimbra.

GOSSELIN (Guglielmo), matematico francese, nato a Caen e morto verso il 1590, godette al suo tempo di qualche fama. Ha tradotto in francese l'*Arithmétique de Nicolas Tartaglia, Brescian, avec toutes les démonstrations mathématiques et plusieurs inventions du traducteur éparses chacune en son lieu*, Parigi, 1578, in-8.

GOSSELIN (Pietro), nato a Cahors, fu uno di quelli che utilmente coltivarono le matematiche nel secolo XVI, e che contribuirono a diffonderne il gusto in Francia. Ha scritto: *De arte magna seu de occulta parte numerorum quae et algebra et almucabola vulgo dicitur libri IV, in quibus explicantur aequationes Diophanti, regulae quantitatis simplicis et quantitatis surdae*, Parigi, 1577, in-8. Mi ricordo, dice Montucla, d'aver veduto anticamente in tale opera saggi abbastanza ingegnosi di applicazione dell'algebra alla geometria, e tra gli

altri all' invenzione di due medie proporzionali continue, in cui però s' inganna credendo di avere risoluto con un' equazione del secondo grado il problema che Apollonio risolveva per mezzo di un' iperbola. A questo autore si attribuisce pure un' opera intitolata: *De ratione discendae docendaeque mathematices proelectio*, Parigi, 1583, in-8.

GOTTIGNIEZ (Egidio Francesco), matematico, nato a Brusselles nel 1630, entrò nell' ordine dei gesuiti in età di ventitrè anni, e dopo aver passato a Malines il tempo del suo noviziato, fu mandato a Roma a compiervi gli studj teologici. Ma le disposizioni grandi ch' ei dimostrò per le matematiche indussero i suoi superiori a destinarlo all' insegnamento di queste scienze; e dal 1662 al 1689, epoca della sua morte, divise il suo tempo tra l' insegnare e la compilazione delle sue opere. Si hanno di lui: I *Epistola de difficultatibus circa eclipses in Jove a Mediceis planetis effectas*, Bologna, 1665, in-fol. Tale lettera è diretta a Giovan Domenico Cassini, e si legge in seguito alla risposta che vi fece quel celebre astronomo, al quale il p. Gottigniez avea tentato di rapire alcune delle sue scoperte intorno a Giove e Marte. II *Lettera intorno alle macchie nuovamente scoperte nel pianeta di Giove*, Roma, 1666, in-8; III *De figuris cometarum, qui annis* 1664, 1665 *et* 1668 *apparuerunt, cum brevissimis animadversionibus*, ivi, 1668, in-4; IV *Elemento geometriae planae*, ivi, 1669, in-12; V *Logistica sive scientia circo quomlibet quantitatem demonstrative discurrendi, ec.*, ivi, 1674, in-4; VI *Arithmetica introductio ad logisticam*, ivi, 1676, in-4; VII *Idea logisticae*, ivi, 1677, in-4; VIII *Epistolae mathematicae*, ivi, 1678, in-4; IX *Clavis logisticae*, ivi, 1679, in-4; X *Logistica universalis*, Napoli, 1687, in-fol.

GOUDIN (Matteo Bernardo), matematico ed astronomo, nato a Parigi il 14 Gennajo 1734, studiò nel collegio dei gesuiti, ove conobbe Dionis du Séjour. Destinati ambedue alla magistratura, ambedue appassionati per le scienze, studiarono sempre insieme, e strinsero tra loro un' amicizia che non si troncò che colla morte. Usciti dal collegio, pubblicarono insieme il frutto dei primi loro lavori, e quantunque tutto l' onore tornasse a Dionis, l'affetto di Goudin per lui non diminuì punto. Gl' impieghi che successivamente occupò Goudin nella magistratura non rallentarono il suo ardore per le scienze, e quando la rivoluzione lo ebbe privato delle sue cariche, si ritirò nel suo castello di Torcy nella Brie, cercò distrazioni nel suo amore per l' astronomia, e vi morì verso il 1805.

Goudin ha pubblicato in comune con Dionis, *Traité des courbes algébriques* Parigi, 1756, in-12; *Recherches sur la gnomonique, ec.*, Parigi, 1761, in-8, e un *Traité des propriétés communes à toutes les courbes, suivi d' un mémoire sur les éclipses de soleil*, Parigi, 1778, in 8. Quest' ultima opera è, dice Montucla, un capo-lavoro di precisione, ed ha per oggetto di spianare la via alla trasformazione delle equazioni algebriche, in un modo più generale che non era stato per anche concepito. La *memoria* sugli ecclissi del sole è interamente di Goudin: era già comparsa nel 1761; ricomparve in detta opera più ampliata; e l' autore vi aggiunse in seguito altre cose nelle edizioni di Parigi del 1788 e 1790, in-4. Egli vi ha determinato in modo preciso tutte le circostanze dell' ecclissi del 1847, che è annunziato come il più considerabile di questo secolo. Goudin ha scritto inoltre: I *Mémoire sur les usages de l'ellipse dans la trigonométrie sphérique*, Parigi, 1797, in-4; II Diverse *Memorie* inserite nella *Connaissance des temps*. Le principali sue opere sono state riunite col titolo di *Oeuvres de M. B. Goudin*, Parigi, 1799, in-4.

GOUYE (Tommaso), astronomo gesuita, nato a Dieppe nel 1650, ha pubblicato: *Recueil des observations physiques et mathématiques pour servir à la perfection de l' astronomie et de la géographie, envoyées de Siam par les Jésuites*

missionaires, Parigi, 1688, in-8, e 1692, in-4. Diede pure un ragguaglio dell' ecclisse lunare del 15 Marzo 1699, e fece parecchie altre osservazioni. Morì nel 1725 a Parigi.

GRADO (*Alg.*). Termine usato per distinguere le equazioni secondo la più alta potenza dell'incognita che esse contengono. Così un'equazione del *quinto grado*, per esempio, è quella nella quale x è alla quinta potenza, o che contiene x^5. *Vedi* EQUAZIONE.

GRADO (*Geom.*). È la 360ª parte della circonferenza del circolo secondo la divisione sessagesimale, o la 400ª secondo la divisione centesimale.

Ogni circonferenza di circolo essendo supposta divisa in gradi, si esprime la grandezza di un angolo per mezzo del numero di gradi e di frazioni di grado che comprende l'arco che gli serve di misura. Così un angolo di 30 gradi sessagesimali è un angolo che posto nel centro di un circolo intercetta tra i suoi lati un arco il cui rapporto colla intera circonferenza è lo stesso di quello di 30 a 360. *Vedi* ANGOLO.

GRADO *di latitudine*. *Vedi* LATITUDINE.

GRADO *di longitudine*. *Vedi* LONGITUDINE.

GRADO *terrestre*. Se la terra fosse una sfera esatta, un grado terrestre sarebbe la 360ª parte della sua circonferenza nella divisione sessagesimale: tutti i gradi sarebbero eguali, e gli angoli al centro della terra intercetterebbero tra i loro lati degli archi che sarebbero loro proporzionali. Ma la terra è lungi dall'esser perfettamente sferica, e per conseguenza gli angoli eguali al centro non determinano archi eguali alla superficie. Ciò che si dice grado terrestre è la porzione di un arco terrestre che corrisponde a un grado celeste; così, un grado misurato in questa maniera è un angolo che non ha il suo vertice nel centro della terra, ma nel punto di concorso delle verticali tirate dalle due estremità del grado celeste perpendicolarmente alla terra. Un grado terrestre è dunque lo spazio che bisogna percorrere sulla terra affinchè la linea verticale cangi di un grado. Questo spazio essendo tanto più grande quanto più piccola è la curvatura, se la terra è schiacciata verso i poli, i gradi terrestri misurati sul meridiano debbono esser tanto più grandi quanto sono più vicini al polo, ove la curvatura è minima, il che appunto è stato confermato dall'esperienza. *Vedi* MISURA DELLA TERRA.

GRAFICO. (*Geom.*). Dicesi *operazione grafica* il modo di risolvere un problema per mezzo di figure geometriche disegnate sulla carta. Se ne può fare uso con vantaggio per ottenere una prima approssimazione in un gran numero di quesiti astronomici, ed anco in semplici problemi numerici. Il modo di risolvere le equazioni del terzo e del quarto grado, che abbiamo esposto alla parola COSTRUZIONE, è una operazione grafica.

GRAFOMETRO (*Geom. pratic.*). Semicircolo graduato dal quale si fa uso nell'agrimensura per levare gli angoli sul terreno. Questo semicircolo riposa sopra un piede, e porta nel suo centro una riga o *alidada* mobile che serve al traguardo degli oggetti. Quando questa alidada o linda è situata nella direzione di un oggetto e il diametro del semicircolo è collocato nella direzione di un altro, l'angolo formato dalle rette che si suppongono condotte dal centro dello strumento a questi due oggetti è misurato dall'arco compreso tra il diametro e l'alidada, e si conosce immediatamente la grandezza di quest'angolo dal numero dei gradi dell'arco segnati sullo strumento.

GRAHAM (GIORGIO), celebre orologiaro e meccanico inglese, nato nel 1675 a Horsgills, nella parrocchia di Kirklinton nella contea di Cumberland. Essendo andato a Londra nel 1688, si mise per imparare da un orologiaro, e divenne presto così valente che Tompion, uno dei più celebri orologiari di quel tempo concepì per esso un vivo interesse, l'ammise in sua casa e lo trattò sempre dipoi

come figlio. Graham accoppiava al dono dell' invenzione una diligenza scrupolosa nel lavoro dalle macchine e degli strumenti, diligenza per la quale gli è riuscito di dare a tutte le sue opere una esattezza e una precisione somma. Aveva una profonda conoscenza dell' astronomia, ed ha applicato principalmente al progresso di questa scienza i diversi strumenti e metodi che ha immaginati o perfezionati. Tra gli altri preziosi oggetti gli si deve il superbo murale che fece pel dottore Halley nell' osservatorio di Greenwich; e dietro ad esso murale sono stati lavorati i migliori strumenti di tal genere: mediante un settore inventato e costrutto da lui, il dottore Bradley scoperse due movimenti nuovi nelle stelle fisse, l'aberrazione cioè e la nutazione. Il planetario che fece pel conte di Orrery ha lungamente servito per modello alle macchine di tal fatta, costrutte nel secolo XVIII. Allorchè gli accademici francesi si allestirono pel loro viaggio nel nord, onde determinare la figura della terra, Graham fu scelto per fornire quei viaggiatori degli strumenti che erano loro necessarj; e la maniera con la quale corrispose a tale fiducia, facilitò molto l'oggetto della spedizione. L'orologeria gli è debitrice dell' invenzione dello scappamento a cilindro, che ha fatto avanzare di un gran passo la precisione degli orologi astronomici. Ha arricchito le *Transazioni filosofiche*, dal volume 31 al 42, della comunicazione di molte scoperte ingegnose ed importanti, principalmente in fisica ed in astronomia, siccome quelle di una specie di alterazione oraria nell' agô calamitato, di un pendolo a mercurio, e di diverse particolarità curiose relative alla vera lunghezza del pendolo semplice, sul quale continuò a fare esperienze fino all' ultimo anno della sua vita. Morì a Londra il 24 Novembre 1751, e fu sepolto nell'abazia di Westminster. Era membro della Società Reale di Londra.

GRAMMATICO (Nicasio), gesuita, nato a Tranto verso la fine del XVII secolo, si applicò con molto ardore all' astronomia, e fece osservazioni successivamente a Friburgo, in Brisgovia, in Ingolstadt, a Madrid e nella sua città nativa. Morì a Ratisbona il 28 Settembre 1736. Ha scritto: I *Methodus nova solis et lunae eclipsium in plano organice delineandarum*, Friburgo, 1720, in-4; II *Problema geographicum de longitudine locorum terrae per acum nauticam indaganda*, Ingolstadt, 1723, in-4; il p. Schreier suo confratello ebbe molta parte in quest' opera; III *Exercitatio de cometa anni 1723*, ivi, 1724, in-4; IV *Planetolabium novum pro situ reliquorumque planetarum pasitu accurate designanda*, ivi, 1725, in-fol.; V *Explicatio et usus planetolabii novi*, ivi, 1726, in-4; VI *Uranophili e soc. Jesu tabulae lunares ex theoria et mensuris Isaaci Newtoni in gratiam cultorum astronomiae concinnatae, addito usu tabularum*, ivi, 1726, in-4; VII *Dissertatio astronomica de ratione corrigendi typos et calculos eclipsium solis et lunae, mapparumque geographicarum constructiones, ab astronomis et geographis hactenus adhibitas, in hypothesi telluris sphaericae, cum ista reapse sit figurae sphaeroidalis*, ivi, 1734, in-4; l'autore supponeva con Cassini la terra allungata verso i poli; VIII *De vera epocha conditi et per Christum reparati orbis dissertatio*, ivi, 1734, in-4; IX *Dissertatio astronomica de cometa annorum 1729 et 1730*, Tyrnau, 1736, in-12. È dovuta pure al p. Grammatico una nuova edizione delle *Tavole astronomiche* di Lahire, con aggiunte, Ingolstadt, 1722, in-4.

GRANDAMI (Giacomo), gesuita, nato a Nantes nel 1588, studiò particolarmente la fisica e l'astronomia, ed acquistò alcuna lode in tali scienze. Morì a Parigi nel 1672. Abbiamo di lui: I *Nova demonstratio immobilitatis terrae petita ex virtute magnetica*, La Flèche, 1645, in-4. Tale dimostrazione, dice Montucla, è cattiva quanto quella cui Gilbert pretendeva di dare dell' opinione opposta, traendola dalle proprietà magnetiche delle quali sembra dotata la terra; II *Tabulae astronomicae*, Parigi, 1665, in 4; III *Le cours de la comète qui a paru sur la*

fin de l'année 1664, *avec un traité de sa nature, de son mouvement et de ses effets*, ivi, 1665, in-4; IV *Parallèle de deux comètes qui ont paru dans les années* 1664 *et* 1665, ivi, 2 opuscoli, in-4; V *Deux éclipses en l'espace de quinze jours déchiffrées*, ivi, 1666, in-4; VI *Dissertatio de eclipsi solis notata a Pachymere*: leggesi nell'edizione di Pachimero pubblicata dal p. Possin, Roma, 1666, in-fol. VII *Ratio supputandarum eclipsium solis*, Parigi, 1668, in-4.

GRANDEZZA. In generale s' intende ordinariamente per grandezza tutto ciò che è suscettibile di aumento e di diminuzione; in questo senso appunto un *numero*, un'*estensione*, ec. sono grandezze. D' Alembert, nell' Enciclopedia, ha elevato dei dubbj sulla esattezza di questa definizione, dicendo che la luce è suscettibile di aumento e di diminuzione, e che non ostante sarebbe un esprimersi molto impropriamente se si considerasse la luce come una grandezza. Ma possiamo fare osservare che qui si tratta dell' intensità della luce, intensità che si può esprimere con un numero e che per conseguenza è una vera grandezza nel senso matematico di questa parola.

GRANDI (Guido), uno dei migliori matematici che onorato abbiano l'Italia nel secolo passato, nacque a Cremona nel 1671. Entrato assai giovane nell' ordine dei religiosi camaldolensi, si diede con ardore allo studio delle scienze e della filosofia. Aristotele aveva ancora nelle scuole molti partigiani, nè le nuove dottrine potevano professarsi con tanta franchezza da non incontrare nemici numerosi nei fautori dei vecchi errori. Pure il p. Grandi, appena ottenuta una cattedra di filosofia in Firenze, cominciò a dimostrare la debolezza e la falsità dei principj del peripatetismo: agli errori però di Aristotele sostituì quelli di Cartesio, senza prevedere che tale nuovo sistema doveva venire quanto prima rovesciato. La lettura dei libri di Cartesio gli aveva ispirato genio per la geometria: ne intraprese lo studio, e i suoi progressi in tale scienza furono tanto rapidi da rendersela in breve tempo pienamente famigliare.

I suoi superiori avevano divisato d' inviarlo a Roma a insegnarvi la teologia, quando una soluzione nuova ch' ei diede dei problemi del Viviani sulla costruzione delle volte attirò su di lui l' attenzione del granduca di Toscana, Cosimo III, che nel 1702 gli conferì la cattedra di filosofia nella università di Pisa. D' allora in poi si applicò con nuovo ardore alle matematiche, prese parte in tutte le discussioni di cui esse erano soggetto, ed entrò in commercio di lettere con Leibnitz, Newton, Bernoulli e Bagltvi, che tutti gli diedero prove di affetto e di stima. La passione troppo grande ch' ei aveva per la disputa, effetto forse di un temperamento bilioso, gl' impedì di comporre opere di quella importanza che le sue estese cognizioni avrebbero comportato. È d' uopo però confessare che non fu sempre aggressore; ma era difficile il placarlo; e la morte sola dei suoi avversarj terminò le sue contese con Vitale Giordani *sul moto della terra*, e con Marchetti e Varignon *sull' infinito*. Grandi, la cui fama erasi diffusa per tutta l' Italia, fu incaricato di studiare i modi per riparare alle inondazioni del Reno, e venne pure nominato arbitro nella differenza insorta su tal proposito tra Bologna e Ferrara. Esercitava egli le funzioni di soprintendente delle acque in Toscana, quando venne a morte il 4 Luglio 1742.

Un catalogo compiuto delle opere del Grandi si trova nel suo elogio scritto da Fabroni, *Vitae Italorum*, tom. VIII. Ecco le principali: I *Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum*, Firenze, 1699, in-4: tale scritto comprende molte più cose che non sembra prometterne il suo titolo. II *Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam, cum epistola ad P. Caevam*, ivi, 1701, in-4; III *Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometrice exhibita*, Pisa, 1703, in-8; ivi, 1710, in-4; IV *Ri-*

cerche intorno alla natura e alle proprietà del suono, nelle *Transazioni filosofiche*, n.° 319, anno 1709. Tale opera gli meritò una sede nella Società Reale di Londra. V *De infinitis infinitorum infiniteque parvorum ordinibus*, Pisa, 1720, in-4; VI *Del movimento delle acque, trattato geometrico*, inserito nella *Raccolta degli autori che trattano del moto delle acque*, Firenze, 1723, in-4; VII *Sezioni coniche*, ivi, 1722, in-8; VIII *Flores geometrici ex rhodonearum et cloeliarum curvarum descriptione resultantes; una cum novi expeditissimi mesolabii auctario*, ivi, 1728, in-4. Il mesolabio inventato da Grandi basterebbe a detta di Cinelli ad assicurarsi la sua reputazione. Le curve di cui si tratta in tale opera sono nominate, le une *rodonee* a motivo della loro somiglianza ad una rosa, le altre *clelie* in onore della contessa Clelia Borromei, versata abbastanza nelle discipline matematiche da gustare i pregi di tale scritto. IX *Elementi geometrici piani e solidi*, Venezia, 1759, in-8.

GRASSI (Orazio), gesuita, noto meno pei suoi talenti come astronomo che per la sua contesa coll' illustre Galileo, nacque nel 1582 in Savona. Fu ammesso nella società in età di anni 18, e professò con lode le matematiche a Genova e a Roma per 20 anni. Fatto rettore del collegio di Savona, tornò a Roma verso la fine della sua vita, ed ivi morì nel 1654. Pubblicò sotto il velo dell'anonimo le seguenti opere: I *Dissertatio optica de iride*, Roma, 1618, in-4. II *Dissertatio astronomica de tribus cometis anni* 1618, ivi, 1619, in-4; e Bologna, 1655, in-4. III *Libra astronomica et philosophica qua Galilaei opiniones de cometis refutantur*, Parma, 1629, in-4. In tale scritto aveva preso il nome di *Lotario Sorsi*, uno dei suoi discepoli; ma Galileo indovinò facilmente il vero autore, e gli rispose col *Saggiatore*, capo-lavoro di critica e di eloquenza. Il suo avversario non si tenne però per vinto, e diede in luce, sempre sotto il nome di *Sorsi*, IV *Ratio ponderum librae et simbellae, in qua quid e Galilaei simbellatore de cometis statuendum sit proponitur*, Parigi, 1626; Napoli, 1627 e 1629, in-4.

GRAVESANDE (Guglielmo Giacobbe S'), geometra olandese, nato a Bois-le-Duc il 27 Settembre 1688, acquistò molta celebrità durante il secolo XVIII per le sue estese cognizioni in matematiche, per le sue ricerche in fisica e per le sue opinioni in filosofia. Fino dall'infanzia può dirsi che annunziasse le più felici disposizioni e la passione più viva per lo studio delle matematiche. Inviato a Leida a studiare il diritto, non tralasciò di applicarsi con ardore allo studio suo favorito, e non aveva ancora 19 anni quando pubblicò il suo *Saggio sulla prospettiva*, scritto che fermò l'attenzione dei geometri, e gli meritò il suffragio dell' illustre Giovanni Bernoulli, quantunque non esenta da alcune imperfezioni, inevitabili per parte di un giovane autore, e cui si era prefisso di togliere in una nuova edizione, della quale stante la sua morte il pubblico è rimasto privo. Dopo aver presa la laurea in legge, si recò all' Aja, ove insieme con alcuni giovani intraprese la compilazione del *Giornale letterario*, proseguito poi da altri col titolo di *Giornale della repubblica delle lettere*. Egli vi rendeva conto delle produzioni matematiche, e in generale delle scoperte scientifiche del suo tempo; i suoi articoli, notabili per la loro originalità e per profondità di vedute, formano dissertazioni non meno interessanti che compiute sulle più gravi questioni. Tra tali articoli si può citare il suo esame della *Geometria dell' infinito* di Fontenelle, che non rimase interamente soddisfatto del giudizio del compilatore, e le sue dissertazioni *sulla costruzione delle macchine pneumatiche*, e *sulla teoria delle forze vive e dell' urto dei corpi in moto*. La macchina pneumatica deve alcuni perfezionamenti importanti alla ingegnosa discussione di S'Gravesande, come le sue opinioni sulla teoria delle forze, d'altronde conformi a quelle di Leibnitz, divennero l' occasione di una lunga ed utile controversia tra i geometri.

Nel 1717 S' Gravesande fu promosso alla cattedra di matematiche e di astronomia nell'università di Leida, e nel discorso d'introduzione che in tal circostanza recitò, intitolato: *De matheseos in omnibus scientiis, praecipue in physicis, usu; necnon de astronomiae perfectione ex physica haurienda*, stabilì i principj filosofici che in seguito professò con lustro straordinario. Noi però non lo seguiremo nelle sue dottrine, la cui influenza non fu che passeggera. Ci limiteremo a dire che sotto il punto di vista pratico della scienza S' Gravesande dimostrò i vantaggi del metodo introdotto da Galileo e da Newton, e che nel punto di vista speculativo, le sue opinioni, alle quali è stato dato il nome di *filosofia*, altro non sono in realtà che un eclettismo impotente delle dottrine di Cartesio, di Leibnitz e di Locke. Dopo avere ricusato di abbandonare la sua patria per far parte delle accademie di Pietroburgo e di Berlino, S' Gravesande morì il 28 Febbrajo 1742, in conseguenza del profondo dolore che gli cagionò la perdita improvvisa dei suoi due giovani figli. Ha lasciato nella scienza un nome distinto e parecchie opere importanti, tra le quali citeremo: I *Saggio di prospettiva*, Aja, 1711; II *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata; sive Introductio ad philosophiam newtonianam*, ivi, 1720, 2 vol. in-4; III *Philosophiae newtonianae institutiones in usus academicos*, Leida, 1723: è un compendio dell'opera precedente; IV *Matheseos universalis elementa, quibus accedunt, specimen commentarii in arithmeticam universalem Newtoni, ut et de determinanda forma seriei infinitae adsumptae regula nova*, Leida, 1727, in-8. S' Gravesande è stato inoltre editore di varie opere, siccome della raccolta delle opere di Huygens, alla quale ha aggiunto la vita di quel dotto; di quella delle opere del suo amico Keill; di quella delle opere adottate dall'Accademia reale delle Scienze di Parigi, prima della sua rinnovazione nel 1699: infine ha preseduto all'edizione dell'*Aritmetica universale* di Newton fatta all'Aja nel 1732. Per maggiori particolarità su questo dotto e sui suoi scritti si consulti la *Biografia universale*.

GRAVITA' (*Mecc.*). Forza in virtù della quale tutti i corpi tendono gli uni verso gli altri.

Tutti i corpi che esistono nell'universo si comportano tra loro come se si attraessero scambievolmente, o come se fossero spinti gli uni verso gli altri da una potenza esterna. Questa forza, qualunque sia la sua origine e la sua natura, agisce in ragione diretta delle masse e in ragione inversa del quadrato delle distanze; le sue leggi sono conosciute più esattamente di quelle di alcun'altra forza naturale. Quanto alla causa fisica della gravità, essa è affatto sconosciuta, e nessuno dei sistemi immaginati per renderne ragione va esente da objezioni alle quali è impossibile rispondere. I corpi si attirano veramente l'un l'altro? ovvero sono essi spinti l'uno verso dell'altro? Questo è ciò che è impossibile di decidere nello stato attuale della scienza, e noi non possiamo perciò considerare la gravità o la tendenza scambievole dei corpi che come un fatto generale, la cui causa superiore non sarà rivelata che col mistero della creazione. Newton stesso non ha mai preteso di dare l'attrazione come la causa della gravità; ei dice espressamente che si serve soltanto di questa parola per enunciare il fatto, non già per spiegarlo.

La gravità è la stessa cosa che il peso; ciò non ostante la parola *peso* non si applica che alla forza la quale fa sì che i corpi terrestri tendano verso la terra, mentre in generale si dice *gravità* la forza in virtù della quale un corpo qualunque tende verso un altro. Ecco le prove dell'universalità di questa forza.

Un corpo materiale qualunque, posto in movimento per effetto di una forza unica, descrive necessariamente una linea retta. Così i corpi che nei loro movimenti descrivono delle linee curve debbono esser costretti a far ciò da qualche altra potenza che agisca continuamente sopra di essi.

Da ciò deriva che i pianeti, facendo le loro rivoluzioni in orbite ellittiche, ricevono l'azione continua e costante di una forza che gl' impedisce di uscire da tali orbite e di descrivere delle linee rette.

Ma è dimostrato, 1.° che tutti i corpi i quali nel loro moto descrivono una linea curva sopra un piano, e che per mezzo di raggi condotti verso uno stesso punto descrivono intorno a questo ponto delle aree proporzionali ai tempi, sono spinti da qualche potenza che tende verso questo ponto; 2.° che quando più corpi girano intorno ad un medesimo centro in circoli concentrici, in modo che i quadrati dei tempi periodici delle loro rivoluzioni stiano tra loro come i cubi delle loro distanze dal centro comune, le forze centrali di questi corpi stanno in ragione inversa dei quadrati delle distanze. *Vedi* Forze centrali.

Ora Keplero ha veduto, e dopo di lui tutti gli astronomi hanno verificato, che le aree descritte dai raggi vettori dei pianeti sono proporzionali ai tempi delle loro rivoluzioni, e che i quadrati di queste rivoluzioni stanno tra loro come i cubi delle distanze. *Vedi* Leggi di Keplero.

Così i pianeti sono dunque ritenuti nelle loro orbite da una potenza che agisce continuamente sopra di essi, la direzione della quale è verso il centro di queste orbite, e la cui intensità è in una ragione inversa del quadrato della distanza. Basta ora confrontare questa forza centrale o *centripeta* colla forza di *gravità* dei corpi sulla terra per assicurarsi che esse sono esattamente simili.

Abbiamo veduto altrove (*Vedi* Accelerato), che il peso fa percorrere ai corpi che cadono liberamente, alla latitudine di Parigi, lo spazio di 4,9044 metri nel primo minuto secondo della loro cadota; e siccome le forze acceleratrici si misurano per mezzo della celerità acquistata nell' unità di tempo, la forza del peso viene così rappresentata da 9,8088 metri. Ma questa forza non è precisamente quella che abbiamo bisogno di conoscere, poichè essa è diminuita per effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione della terra sul suo asse. Per potere confrontare la gravità alla superficie della terra con ciò che essa diviene alla distanza dei pianeti, bisogna primieramente determinarla quale è in sè stessa: ora se noi rappresentiamo con G la forza di gravità, con f l'effetto della forza centrifuga e con g la forza del peso data dall'esperienza, siccome f agisce in senso inverso alla gravità, così avremo

$$g = G - f, \quad \text{o} \quad G = g + f;$$

ma all' equatore si ha $g = 9,7798$ (*Vedi* Pendolo) ed f è $\frac{1}{289}$ della gravità (*Vedi* Forze centrali, n.° 12), così sostituendo questi valori si trova

$$G = 9,7798 + \frac{G}{289},$$

donde isolando G si ottiene

$$G = 9^m,8137.$$

Se ora s'indica con G' ciò che diviene la gravità G alla distanza della luna, supponendo che questa forza aumenti in ragione inversa del quadrato della distanza, si avrà, facendo il raggio medio dell' orbita lunare eguale a 60,314 semidiametri della terra,

$$G : G' :: (60,314)^2 : 1,$$

donde si trae

$$G' = \frac{G}{(60,314)^2} = \frac{9,8137}{(60,314)^2}.$$

Tale sarà dunque l' effetto della gravità in un secondo di tempo sopra un corpo posto alla distanza della luna.

Ma, indicando con φ una forza acceleratrice, la formula generale del moto accelerato è (*Vedi* ACCELERATO)

$$e = \frac{1}{2}\varphi t^2.$$

Così, ponendo in luogo di φ il valore di G', e supponendo che il tempo t sia di un minuto o di 60'', avremo per lo spazio e che dovrà esser percorso in un minuto di tempo

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{9,8137(60)^2}{(60,314)^2} = 4,89 \text{ metri.}$$

Così, un corpo posto alla distanza della luna deve percorrere uno spazio di 4,89 metri, in un minuto, cadendo liberamente verso la terra, se la forza di gravità si estende fino a questa distanza. Vediamo ora se l' esperienza si accorda con questo resultato.

Per la teoria delle forze centrali, se la luna obbedisse unicamente alla forza centripeta, essa cadrebbe verso la terra, in un minuto, per uno spazio eguale al seno-verso dell' arco che essa descrive nel medesimo tempo. Così, la rivoluzione siderea della luna intorno alla terra effettuandosi in un periodo di 27 giorni, 7 ore e 43 minuti, ossia in 39343 minuti, si ha pel valore dell' arco descritto in un minuto

$$\frac{360^\circ}{39343} = \frac{1296000''}{39343} = 32'',94\,;$$

e siccome il seno-verso di un angolo qualunque μ per un circolo che abbia per raggio r (*Vedi* SENO-VERSO) è dato dall' espressione

$$\frac{2r\,\text{sen}^2\left(\frac{\mu}{2}\right)}{R^2},$$

essendo R il raggio delle tavole dei seni, si avrà per lo spazio cercato

$$2(60,314)\,\text{sen}^2(16'',47)\,\frac{1}{R^2}.$$

Per avere questo valore in metri, bisogna moltiplicarlo pel raggio equatoriale della terra, che è di 6376466 metri, e così esso diverrà

$$2(30,314)\,.\,6376466\,.\,\text{sen}^2(16'',47)\frac{1}{R^2} = 4,89 \text{ metri.}$$

Così la forza centripeta della luna è la stessa della forza della gravità, vale a dire che essa procede dallo stesso principio. Dunque la luna gravita sulla terra, e reciprocamente questa gravita sulla luna, il che d' altronde riman confermato dal fenomeno delle maree. *Vedi* MAREA.

Lo stesso ragionamento può applicarsi agli altri pianeti, donde se ne conclude che la gravità è una forza universale. *Vedi* PESO.

GRAVITAZIONE. Tendenza che un corpo ha verso un altro corpo in forza della sua gravità. *Vedi* GRAVITA'.

La fisica celeste è fondata oggi sul principio della gravitazione universale, stabilito da Newton, e in virtù del quale tutte le parti della materia tendono le une verso le altre con una forza che varia in ragione inversa del quadrato della distanza. Le dimostrazioni che sono state date di questo principio non lasciano nulla a desiderare, e possiamo francamente considerarlo come una delle leggi generali della natura. Ma per quanto la sua scoperta basti per immortalare quell'ingegno fortunato al quale la scienza e per conseguenza l'umanità sono debitrici di tante altre scoperte, sarebbe certamente un'ingiustizia verso i predecessori di Newton il ricusar loro una parte della gloria di cui è stato egli ricolmo. In questa circostanza, come in tutte le grandi scoperte, noi vediamo sorgere dalle tenebre un punto luminoso; appena percettibile nel suo nascere, a poco a poco si accresce, rimane lungo tempo stazionario, quindi si accresce di nuovo, finalmente si mostra da tutte le parti, e finisce con portare la vita e la luce nel seno della notte profonda in cui ha avuto origine. Ma quanti ostacoli debbono superarsi! Quanti sforzi infruttuosi! Certamente se dobbiamo della riconoscenza a quelli esseri privilegiati che sanno con una mano ardita alzare il velo della verità, quanta non ne dobbiamo noi anco a quelli i cui lavori forse meno brillanti, ma non meno utili, preparano il cammino; spianano la via, e accumulano i materiali!

La gravitazione universale è stata intraveduta fino dalla più alta antichità. Fu essa uno dei principj della filosofia di Democrito e di Epicuro, e già abbiamo avvertito che molto tempo prima di essi Anassagora (*Vedi* ANASSAGORA) dava ai corpi un peso che gli attirava verso la terra, la quale ei considerava come il centro de' loro movimenti. Quando il vero sistema del mondo, scoperto o piuttosto resuscitato da Copernico, cominciò a divulgarsi, le idee degli antichi sulla gravitazione cominciarono pure a germogliare. Copernico stesso non attribuiva la forma sferica dei corpi celesti che ad una tendenza delle loro parti a riunirsi, ma non giunse fino ad estendere questa tendenza da un pianeta all'altro. Ben presto Keplero fece questo passo ardito, perchè nella prefazione del suo libro sui movimenti di Marte faceva gravitare la luna sulla terra e *viceversa*, talche, dice egli, se non fossero ritenute lontane l'una dall'altra in forza della loro rotazione, esse si avvicinerebbero e si riunirebbero nel loro centro comune di gravità. Successivamente l'attrazione o la gravitazione fu da Fermat riguardata come la causa del peso. Secondo lui, un corpo materiale cadeva verso il centro della terra unicamente per la tendenza che aveva verso tutte le parti di essa. Aggiungeva inoltre che era meno attirato quando si trovava tra il centro e la superficie, perchè le parti più lontane da questo centro comune lo attiravano in un senso contrario a quello delle più vicine, donde concludeva cha, in questo caso, il peso decresce come la distanza dal centro (Si veda la *Harmonia universalis* del p. Mersenne, lib. II), il che è stato poi dimostrato col rigor dell'analisi da Newton. Roberval prese pure la gravitazione universale per principio fondamentale del sistema fisico astronomico che pubblicò nel 1644 sotto il nome di Aristarco di Samo. In tale opera, Roberval attribuisce a tutte le parti della materia di cui è composto l'universo, la proprietà di tendere le une verso le altre: è questa la ragione per cui si dispongono esse in figura sferica, non in virtù di un centro, ma per la loro mutua attrazione e per mettersi in equilibrio le une con le altre.

Ma, come abbiamo già detto all'articolo ATTRAZIONE, nessuno prima di Newton ha meglio scorto il principio della gravitasione universale, nè più si è approssimato a farne l'applicazione conveniente al sistema dell'universo, che il

dottore Hooke. Non gli rimaneva che a trovare la legge del quadrato delle distanze; e se ancora vi corre molto tra le congetture di questo detto e le sublimi dimostrazioni di Newton, vedremo più lungi che il suo libro, pubblicato nel 1674, fu almeno l'occasione delle scoperte di quest' ultimo.

Fu nel 1666 che Newton, ritiratosi alla campagna per fuggire la peste che in quell' anno desolava Londra e le sue vicinanze, rivolse le sue meditazioni sul peso dei corpi. La sua prima riflessione, dietro quanto ne racconta Pimberton nella sua opera: *Wiew of sir Isaac Newton Philosophy*, Londra, 1725, fu che la causa qualunque che produce la caduta dei corpi terrestri, agendo sempre sopra di essi a qualunque altezza vengano portati, poteva esser benissimo che si estendesse molto più lungi di quello che si pensava, ed anco fino alla luna, come poteva pure essere questa forza quella che riteneva la luna nella sua orbita, bilanciando la forza centrifuga che nasce dalla sua rivoluzione intorno alla terra. Considerò nel tempo stesso che quantunque il peso non paresse diminuito nelle differenti altezze alle quali possiamo giungere, pure queste altezze sono troppo piccole perchè si possa concluderne che la sua azione è dovunque la stessa; e gli sembrò al contrario assai più probabile che essa dovesse decrescere a misura che aumenta la distanza dal centro. Per scoprire la legge di questa diminuzione, Newton diede una grande estensione alle sue prime idee; pensò che se effettivamente era il peso della luna verso il nostro globo che la riteneva nella sua orbita, lo stesso doveva accadere per i pianeti principali rispetto al sole, e pei satelliti di Giove rispetto a queste pianeta. Confrontando i tempi periodici dei pianeti intorno al sole colle loro distanze, trovò che le forze centrifughe che nascono dalle loro rivoluzioni e per conseguenza le forze centripete che le equilibrano stanno in ragione inversa dei quadrati delle distanze. La stessa cosa avendo luogo pei satelliti di Giove, Newton concluse che la forza che ritiene la luna nella sua orbita doveva essere il peso diminuito nel rapporto inverso del quadrato della sua distanza dalla terra. Non si trattava più che di verificare questa conclusione.

Ora, se la luna, la cui distanza dalla terra è di circa 60 semidiametri terrestri, è obbligata a girare intorno a questa perchè tende verso di essa con un peso diminuito secondo il quadrato della sua distanza, cioè con un peso $60^2 = 3600$ volte minore che alla superficie della terra, la caduta che essa farebbe essendo abbandonata a questa forza unica in un tempo determinato, per esempio in un minuto, dovrà essere la 3600^{sima} parte dello spazio che descrivono i corpi pesanti verso la superficie della terra in questo stesso tempo. Ma questa caduta della luna, o questo spazio del quale si approssimerebbe essa alla terra se per un minuto obbedisse unicamente al peso, è il seno-verso dell' arco che essa descrive in questo tempo (*Vedi* Forze Centrali). Dunque questo seno-verso deve essere la 3600^{sima} parte dello spazio percorso in un minuto da un corpo pesante che cade liberamente alla superficie della terra. Newton intraprese i calcoli necessarj; ma i resultati che allora ottenne gli fecero abbandonare tutte le sue ricerche. Avendo egli supposto, coi geografi della sua nazione, che il grado terrestre contenesse 60 miglia inglesi, invece di 69 e mezzo circa che effettivamente ne contiene, non trovò più il rapporto che era necessario per verificare la sua congettura; e questo errore di misura, che era per lui impossibile il supporre, poco mancò che non distroggesse affatto il maestoso edifizio che cominciava ad innalzarsi.

Non fu che nel 1676 che Newton ricominciò i suoi calcoli servendosi della nuova misura della terra fatta da Picard, ed è probabile che vi fosse indotto dalla lettura dell' opera di Hooke. Quando, per mezzo di questa misura, ebbe egli determinato esattamente le dimensioni dell' orbita lunare, il calcolo gli

diede precisamente ciò che cercava (*Vedi* Gravità), e dopo questa dimostrazione non esitò più a concludere che quella stessa forza che provano i corpi vicini alla superficie della terra, vien pure provata dalla luna nella sua orbita, e che è precisamente questa forza che ve la ritiene e le impedisce di cadere in linea retta. Assicurato di questa verità, Newton proseguì le sue investigazioni; vide che le leggi di Keplero, di cui diede la prima dimostrazione teorica (*Vedi* Aree proporzionali ai tempi), non erano che una conseguenza del suo principio, e lo stabilì finalmente in un modo incontrovertibile nell'opera che pubblicò nel 1687 col titolo di *Philosophiae naturalis principia mathematica*; opera immortale, della quale non si è detto troppo proclamandola una delle più belle che lo spirito umano abbia giammai prodotte, e di cui il successo sì luminoso in Inghilterra e sì contrastato nel resto dell'Europa finì col rovinare tutti gli antichi sistemi, operando un'immensa rivoluzione nella scienza, alla quale veniva finalmente a dare una base.

In Francia, ove le idee nuove non eccitano prontamente l'entusiasmo che quando sono assurde, si elevò sul principio una vivissima opposizione contro il sistema della gravitazione universale. Se alcuni amici della verità osarono dichiararsi in favore di Newton, vennero tosto dileggiati coll'epiteto di *attrazionarj*: si collocò l'attrazione nel numero delle cause occulte, i suoi partigiani nel numero dei visionarj, nè vi volle meno dell'immenso ascendente di Voltaire sul suo secolo per far ricredere gli spiriti dal loro precipitato giudizio. Questo genio brillante, che i poeti consideravano come un gran filosofo, e i filosofi come un gran poeta, si dichiarò il panegirista di Newton in un'opera in cui nondimeno traspare la più completa ignoranza delle prime nozioni della geometria elementare; ma Voltaire era l'oracolo del tempo, e questa volta almeno la verità non ebbe a soffrire della sua influenza. Dobbiamo inoltre affrettarci a dire a lode della nostra nazione che la reazione in favore del nuovo sistema non si fece attendere molto tempo, e che divenne non meno compiuta che generale.

Parecchi autori, come Whiston nelle sue *Praelectiones physico-mathematicae*, e S' Gravesande ne' suoi *Elementi* e *Istituzioni*, hanno tentato di rendere le scoperte di Newton accessibili al pubblico non iniziato nei calcoli superiori, sostituendo alle dimostrazioni matematiche ragionamenti più semplici ed esperienze. Queste opere, e particolarmente quella di Maclaurin intitolata: *Esposizione delle scoperte del cavalier Newton*, tradotta in francese nel 1756 dalla marchesa du Châtelet, hanno contribuito assaissimo a diffondere la dottrina dell'attrazione. Devesi pure ai padri Leseur e Jàquier la traduzione del libro stesso dei principj con un comento estesissimo.

GREAVES (Giovanni), in latino *Gravius*, nacque nel 1602 a Colmore nel Hampshire. Dopo aver fatto i consueti studj delle umane lettere, si applicò con passione alla fisica e alle matematiche: lesse in seguito le migliori opere greche e latine che trattano dell'astronomia, ed essendosi rese famigliari le lingue orientali, lesse altresì gli autori arabi e persiani che hanno scritto su tale scienza. Nel 1630 gli venne conferita la cattedra di geometria nel collegio di Gresham a Londra, e pochi anni dopo, nel 1637, intraprese un viaggio nell'oriente onde meglio istruirsi nella pratica della lingua araba e raccogliervi le opere scientifiche dei dotti di quella nazione. Al suo ritorno, successe nel 1643 al dottor Bainbridge nella cattedra di astronomia dell'università di Oxford: ma la devozione che dimostrò in quel tempo alla causa reale fece sì che venisse spogliato nell'anno 1648 della sua cattedra. Riparò allora a Londra, ove il cordoglio finito avendo di rovinare la sua salute già logora per l'eccesso del lavoro, morì il dì 8 Ottobre 1652. Le opere sue principali sono: I *Pyramidographia*, Londra, 1646, in-8: è una descrizione delle piramidi di Egitto, colla determinazione della loro

posizione e della loro misura; II *Demonstratio ortus Sirii heliaci pro paralello inferioris Aegypti*, in seguito ai *Canicularia* di Bainbridge, Oxford, 1648, in-8; III *Elementa linguae persicae; item anonimus persa de siglis Arabum et Persarum astronomicis*, Londra, 1649, in-4; IV *Epochae celebriores astronomis, historicis et chronologis Chataiorum, Syro-Graecorum, Arabum, Persarum, Chorasmiorum usitatae; ex traditione Ulug-Beigi, Indiae principis, cum commentariis*, ivi, 1650, in-4; V *Astronomica quaedam ex traditione Shah Cholgii Persae; una cum hypotesibus planetarum*, ivi, 1652, in-4; VI Una traduzione latina dei *Lemmata* di Archimede fatta dietro la scorta di un manoscritto arabo, e pubblicata nella *Miscellanea* di Samuele Foster, 1659, in-fol. Ha inserito pure parecchie memorie nelle *Transazioni filosofiche*, ed ha lasciato altri scritti di minor conto che Birch ha raccolto e pubblicato nel 1737 col titolo di *Opere miste* di Greaves, 2 vol. in-8.

GREGORIO DA SAN VINCENZO (Il Padre), celebre geometra, nato a Bruges nel 1584, si recò a proseguire gli studj in Italia, ed abbracciata avendo la regola di s. Ignazio a Roma, in età di 20 anni divenne uno dei discepoli del p. Clavio, e gli successe nella cattedra di matematiche. Diffusa essendosi la sua reputazione per tutta l'Europa; chiamato venne a Praga dall'imperatore Ferdinando II, ed era in quella città, quando presa venne dagli Svedesi. Tratto dal suo zelo a portare i soccorsi spirituali ai soldati della sua communione sino sul campo di battaglia, vi fu ferito gravemente; e nel sacco che fu dato alla città perdette tutti i suoi manoscritti, frutto di quarant'anni di studj e di fatiche, o tra i quali trovavasi un grosso volume sulla quadratura del circolo che consumato venne dalle fiamme. La ricerca di tal quadratura era stata l'oggetto costante dei lavori di questo dotto matematico, ma non vi ha di comune che questa vana pretensione tra lui e la maggior parte di quelli che si sono occupati di questo soggetto. L'opera cui pubblicò su tale materia, e di cui parleremo più sotto, contiene vedute di altissima importanza: ma le ragioni sulle quali appoggiava la pretesa sua scoperta non potevano reggere all'esame. Cartesio ne dimostrò la falsità in una lettera al p. Mersenne, e fu questo religioso che primo impugnò la nuova soluzione della quadratura nel suo libro: *Cogitata physico-mathematica*, 1648. Tre anni dopo, Huygens, allora giovanissimo, confutò il p. Gregorio in un libro che può considerarsi come un modello di precisione e di lucidezza. Il p. Leotaud, gesuita e buon matematico, si unì agli avversarj del suo confratello, il quale non trovò difensori che tra i suoi discepoli. Nel numero di questi si facevano distinguere i pp. Sarana e Ayuscom: il primo replicò caldamente al p. Mersenne, e il secondo rispose ad Huygens o al p. Leotaud, cui accusò di non aver compreso i ragionamenti del suo maestro. Il p. Leotaud riprese la penna, e se colla sua *Cyclomathia* non ridusse al silenzio i difensori del p. Gregorio, ciò fu perchè nella disputa si frammischiò la passione. Contuttociò il p. Mersenne, Huygens e Leotaud rendevano giustizia alle cognizioni somme del p. Gregorio, e l'illustre Leibnitz negli *Acta eruditorum* di Lipsia per l'anno 1695 non esitò a collocarlo tra i geometri più distinti. Il re Filippo IV lo aveva chiamato in Spagna perchè desse lezioni di matematiche al principe don Giovanni d'Austria. Tornò sul finire de' suoi giorni nei Paesi Bassi, e morì a Gand il 27 Genajo 1667.

Ecco l'elenco delle sue opere: I *Theses de cometis*, 1619, in-4; II *Theoremata mathematica scientiae staticae de ductu ponderum per planitiem recta et obliqua horizontem decussantem*, Lovanio, 1624, in-4; III *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, Anversa, 1647, in-fol. Secondo Montucla, tale opera è un vero tesoro, una miniera ricca di verità geometriche e di scoperte importanti e curiose. Vi si trova infatti un gran numero di teoremi

nuovi sulle proprietà del circolo e di ciascuna delle sezioni coniche, la sommazione geometricamente dedotta dei termini e delle potenze dei termini delle progressioni, dei mezzi senza numero di quadrare la parabola e di misurare i solidi generati dalla circonvoluzione delle curve coniche, la formazione di una moltitudine di nuovi corpi suscettivi di considerazione geometrica, e cui egli misura col metodo *ductus plani in planum*, ec.; IV *Opus geometricum ad mesolabium per rationum proportionalitatumque novas proprietates*, Gand, 1668, in-4. Tale opera, che l'autore non ha terminata, tratta il problema della determinazione di due medie proporzionali continue. Sopra questo dotto si consulti la *Storia delle matematiche* di Montucla, e la notizia biografica che Quetelet ha inserita negli *Annali belgici* di Aprile, 1821, VII, 253.

GREGORY (Giacomo), nato nel 1636 a New-Aberdeen in Scozia, deve annoverarsi tra i grandi geometri che hanno illustrato il secolo XVII, tanto fertile in uomini celebri. Dopo un viaggio in Italia, intrapreso col fine di ascoltare i grandi professori che allora questo paese possedeva, tornò in patria ove fu promosso alla cattedra di matematiche nel collegio di s. Andrea. Adempì con grande onore alle funzioni dell' insegnamento, e nel tempo stesso acquistossi colle sue opere una reputazione europea. Gregory precedè infatti il gran Newton nell'invenzione del telescopio a riflessione. Espose la sua scoperta in un'opera in cui si rinvengono idee nuove, e che furono sommamente utili. Forse avrebbe dato il suo nome ai grandi perfezionamenti dell' ottica che hanno aumentato i titoli della gloria di Newton, se avesse posto una minore importanza a risolvere uno dei problemi i più difficili di questa scienza, vale a dire quello di trovare i mezzi di rimediare all' incurvazione delle immagini nelle lenti o negli specchi sferici, e se non avesse così perduto un tempo prezioso in saggi infruttuosi. La fortuna peraltro di questo dotto non adeguava di gran lunga il suo merito, ed alcuni membri dell' Accademia delle Scienze di Parigi lo avevano indicato come uno dei dotti stranieri più degni dei benefizj di Luigi XIV; ei però non volle che si proseguissero le pratiche incominciate a suo favore, e i motivi del suo rifiuto fanno onore alla sua modestia: » Sono contento della mia situazione, scriveva a Collins, suo amico, » per quanto poco vantaggiosa ella sia; ho conosciuto molti dotti superiori a me » di molto per ogni titolo, coi quali non vorrei mutare condizione». Una morte subitanea sopraggiunse a troncare improvvisamente le nobili speranze che Gregory fatte avea concepire, nel momento in cui in tutta la forza dell' età e del talento i suoi lavori potevano essere tanto utili al progresso della scienza. Morì di 39 anni nel 1675.

Gli scritti matematici di Gregory sono: I *Optica promota, seu abdita radiorum reflexorum et refractorum mysteria geometrice enucleata*, Londra, 1663, in-4; in tale opera espone l' autore le sue scoperte in ottica; II *Exercitationes geometricae*, Padova, 1666, in-4: Gregory vi dimostra in un modo nuovo la quadratura dell' iperbola data da Mercatore, e riduce a tale quadratura la figura delle secanti, da cui dipende l' accrescimento esatto dei meridiani nelle carte ridotte. La serie che dà in quest' opera per esprimere la circonferenza circolare è di un uso assai difficile. Dalla sua corrispondenza con Collins resulta che aveva scoperto l' origine dell' espressione d' una delle serie che Newton aveva trovato pel circolo; ne inviò la continuazione a questo geometra con la serie nuova che esprime l' arco per mezzo del seno, e che è interamente a lui dovuta. Si scorge ancora in questa corrispondenza che Gregory possedeva il metodo del regresso delle serie, e che lo avrebbe pubblicato se non ne fosse stato distolto dal suo rispetto e dalla sua ammirazione per Newton, che in quel tempo proponevasi egli stesso di pubblicare il suo. Può riscontrarsi in questo proposito il *Commercium epistolicum*, edizione in-4. III *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, ivi,

1667, in-4. Si potrebbe presumere da tale titolo che Gregory credesse di aver trovato la quadratura esatta del circolo e dell'iperbola, ma toglie el contrario a provare come essa è impossibile, e ne dà approssimazioni al sommo ingegnose. La scoperta che vi annunzia di una proprietà dei poligoni inscritti e circoscritti alle sezioni coniche fu impugnata da Huygens, e fu occasione a diversi scritti nel *Journal des Savans*, e nelle *Transazioni filosofiche*, anni 1667 e 1668; IV *Geometriae pars universalis*, ivi, 1668, in-4. È una raccolta di teoremi curiosi ed utili per la trasformazione e la quadratura delle figure curvilinee, per la rettificazione delle curve, la misura dei loro solidi di circonvoluzione, ec. I più di essi sono di grande eleganza e tratti a generalità in un modo proprio dell'autore.

GREGORY (David), nipote del precedente, fu un matematico distinto ma non giunse a collocarsi nella scienza in quel grado elevato in cui erasi posto suo zio, non ostante che si sie esercitato negli stessi rami delle matematiche, o forse appunto per questo motivo. Nato ad Aberdeen nel 1661, prese i gradi accademici che autorizzano a professare nella università di Edimburgo, e v' insegnò in seguito le matematiche per varj anni. Ma alcuni disgusti che ebbe a provare lo decisero e recarsi nel 1691 all'università di Oxford, eve pochi giorni dopo fu ricevuto dottore in medicina, e nello stesso anno conferita gli venne la cattedra di astronomia per la reounzia fattane de Eduardo Bernard. Ebbe allora la gloria di essere uno dei primi a spiegare pubblicamente le dottrine di Newton, che l'onorava della sua amicizia. Fu ammesso nella Società Reale di Londra, e morì a Maidenhead il 10 Ottobre 1708.

I suoi scritti sono: I *Exercitatio geometrica de dimensione figurarum; sive specimen methodi generalis dimetiendi quasvis figuras*, Edimburgo, 1684, in-4; II *Catoptricae et dioptricae sphaericae elementa*, Oxford, 1695, in-8. Opera assai stimata, tradotta in inglese nel 1705 dal dott. Browoe. Desaguliers ne pubblicò un'edizione più compiuta, Londra, 1735. Vi si trovano, in forma di appendice, le lettere di Giacomo Gregory e di Newton sul telescopio a riflessione, e la storia compendiosa dei diversi perfezionamenti che sono stati fatti a questo strumento. David Gregory dava la preferenza al telescopio newtoniano, al quale oggi è generalmente preferito il gregoriano. III *Astronomiae physicae et geometricae elementa*, Oxford, 1702, in-fol.; ristampata con aggiunte dell' editore Huart, Ginevra, 1726, 2 vol. in-8. Questo trattato elementare di astronomia è stato lungo tempo il migliore e il più compiuto. L'autore vi dimostra che gli antichi hanno avuto cognizione del principio della gravitazione, e che i moderni l' hanno reso soltanto più sensibile colle loro scoperte. Vi espone e fa la spiegazione dei sistemi più celebri, e cerca specialmente di rendere quello di Newton più suscettivo di esser compreso dalle menti più mediocri. V' È dovuta ancora a David Gregory una traduzione in latino della *Teoria della luna* di Newton, Londra, 1702, in-4; un'eccellente edizione greca e latina d' Euclide, con una dotta prefazione, Oxford, 1703, in-fol.; un numero grande di dissertazioni inserite nella *Transazioni filosofiche*; e finalmente ha lasciato, in manoscritto, opere considerabili, e tra le altre un comento sui *Principj* di Newton.

GRILLET (Renato), meccanico ed orologiaro celebre di Parigi, ha pubblicato: I *Curiosités mathématiques*, Parigi, 1673, in-4; II *Nouvelle machine d'arithmétique*, nel *Journal des Savans*, anno 1678, n.° 14. La macchina di cui qui si parla è una scatola contenente 24 cilindri disposti in tre file, ciascuno dei quali porta nella circonferenza i nove bastoni aritmetici di Neper, e nell'estremità superiore tre circoli concentrici. Tale macchina, fondata sul principio medesimo della rote di Pascal, e del tamburo aritmetico di Petit, ebbe su questi strumenti il vantaggio di esser portatile. Il Delfino, al quale l' autore fece omaggio del suo lavoro, avendogliene ordinata una più grande, vi fece due leggeri cambiamenti,

per mezzo dei quali l'addizione delle diecine si fa da sè stessa, volgendo le ruote in un verso, e la loro sottrazione nel verso opposto; e si possono fare in una volta due regole differenti non ponendo attenzione che ad una sola. Si sa che tali macchine voluminose, sovente proposte (*Vedi* Gersten), e più curiose che utili, esigono altrettanta applicazione ed assai più tempo che il calcolo ordinario, e che non vi hanno invenzioni di un'utilità pratica in tal genere che quelle le quali sono fondate sulla proprietà dei logaritmi (*Vedi* Gunter).

GRIMALDI (Francesco Maria), gesuita, ed uno dei migliori matematici del suo tempo, nacque a Bologna nel 1615. Dopo avere insegnato la belle lettere per 25 anni, si applicò alle scienze esatte, e vi fece progressi abbastanza grandi per far deplorare che non vi si sia dato interamente, e che non abbia compiuto una più lunga corsa. Cooperò utilmente ai lavori importanti del p. Riccioli; fece una descrizione particolare delle macchie della luna, pose loro nomi diversi da quelli dati da Evelio, e la sua nomenclatura è stata poi adottata da tutti gli astronomi. Questo dotto religioso morì a Bologna nel 1663. Ha scritto: *Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride, aliisque annexis libri II*, Bologna, 1665, in-4. Quest'opera contiene il ragguaglio di un numero grande di esperienze curiose sopra la luce e i colori. L'autore vi rende conto della sua scoperta della inflessione dei raggi solari in prossimità di certi corpi, e della loro dilatazione causata dal prisma: egli aveva notato tutte le circostanze che caratterizzano la differente refrangibilità dei raggi luminosi, ma non può per giustizia dirsi che abbia fatto tale importante scoperta, che è dovuta interamente a Newton. Intanto il p. Grimaldi avrà sempre l'onore di esser stato il precursore di quell'uomo immortale: e questo titolo basta a raccomandare la sua memoria alla stima dei posteri.

GRINEO (Simone), professora di matematiche, nato a Berna nel 1 Dicembre 1539 e morto a Basilea nel 1582. Ha pubblicato: I *Commentarii duo, de ignitis meteoris unus, alter de cometarum caussis et significationibus* · *accessit observatio cometae quae anno superiore* 1577 *et ab initio* 78 *fulsit*, *et disputatio de inusitata magnitudine et figura Veneris conspecta in fine anni* 1578 *et ad initium* 1579, Basilea, 1580, in-4.

GRISCHOW (Agostino), dotto filologo e matematico tedesco, nato ad Anclam nella Pomerania citeriore il 13 Dicembre 1683. Dopo aver terminato i suoi studj accademici all'università di Jena, si recò a Berlino ove nel 1725 fu fatto professore di matematiche. Come membro dell'antica Accademia delle scienze di quella città, fu per 28 anni incaricato delle osservazioni meteorologiche e della compilazione degli almanacchi. Morì il 10 Novembre 1749, e di lui abbiamo: I *Isagoge ad studia mathematica, seu mathematum praecognita*, Jena, 1712, in-4; II *Astrognosia novissima, seu phoenomenorum atque hypothesium circa stellas novas speciatim ità dictas, succincta aequa ac distincta neque alibi ita juncta explicatio*, ivi, 1717. In questo volume Grischow ha raccolto tutto ciò che riguarda le nuove stelle. Parecchie dissertazioni di questo matematico si leggono nelle *Miscellanea Berolinensia*, e nei primi volumi delle *Memorie* dell'Accademia di Berlino.

GRISCHOW (Agostino Nataniele), figlio del precedente, nato a Berlino nel 1726, profittò tanto delle lezioni del padre suo, che nel 1749 successe a lui come astronomo e come membro dell'Accademia di Berlino. Due anni dopo fu nominato professore di astronomia e segretario dell'Accademia imperiale di Pietroburgo; ma non godè molto tempo di questo impiego, essendo morto il 4 Giugno 1760. Questo dotto érasi trasferito nel 1751-52 nell'isola di Oesel, sulle costa della Livonia, per osservarvi le parallassi, quando La Caille andò al Capo di Buona Speranza, e al suo ritorno aveva pubblicato: *Serma habitus de parallaxi coela-*

stium corporum, sive de via ad distantias et magnitudines eorum definiendas apud astronomos celeberrima, Pietroburgo, 1755, in-8. I *Novi Commentarii* dell'Accademia di Pietroburgo contengono di questo autore un gran numero di memorie del massimo interesse per la scienza: tra le altre si notano le seguenti: I *Methodus investigandi parallaxin lunae et planetarum eclipsibus stellarum fixarum a luna innixa*, inserita nel tom. IV, an. 1752; II *Solutio novi cujusdam problematis astronomici, in usum praecipue nauticum propositi, in dissertatione de progressu artis nauticae in determinanda maris et longitudine et latitudine*, tom. V, an. 1754-55; III *Errorum tabularum lunarium, ex eclipsibus solis praecipue iis, quae anno 1748, die 25 Jul. et anno 1750, die 8 Jan. styli novi, diligentissime sunt observatae, definiendarum disquisitia*, tom. V, an 1754-55; IV *Investigatio positionum insigniorum Russiae locorum*, tom. VIII, an. 1760-61. È stata pure inserita nelle *Transazioni filosofiche*, n.° 489, una memoria di Grischow intitolata: *Of an extraordinary Lunar circle and of two paraselenes made at Paris*, 20 *Oct.* 1787.

GROENING (Giovanni), dotto tedesco, ha pubblicato: *Historia cycloidis contra Pasculium*, Amburgo, 1701. Tale scritto non poco curioso contiene molte notizie che invano cercherebbonsi altrove: infine vi si trovano: *Hugenii annotationes posthumae in Is. Newtoni philosophiae naturalis Principia mathematica.*

GROIGNARD (Antonio), celebre ingegnere della marina francese, nacque il 4 Febbrajo 1727 a Solliès, e morì a Parigi nel 1797. I limiti di questo Dizionario non ci permettono di entrare in nessuna particolarità relativamente ai grandi miglioramenti da lui introdotti nella costruzione dei vascelli, e agl' immensi vantaggi che con ogni maniera d' invenzioni e di perfezionamenti ha arrecato alla marina dello stato e del commercio della Francia: basti dire che ove non fosse stato superato da Sané niuno più di lui meriterebbe di esser nominato il *Vauban* della marina. Più geloso però di esser utile che di brillare, Groignard consacrò interamente al servizio dello stato le alte sue facoltà, nè ha scritto altro che due memorie sul modo di disporre il carico nei bastimenti e sui loro ondeggiamenti, le quali furono entrambi premiate dall' Accademia delle Scienze di Parigi, e si leggono nella *Raccolta* delle memorie premiate da quella dotta Società nei tomi VII e IX.

GROLLIER (Niccolò), nato nel 1677 a Lione, abbracciò di 19 anni la carriera delle armi, nella quale giunse al grado di commissario provinciale di guerra. Avendo ottenuto nel 1728 il suo ritiro, consacrò tutti i suoi momenti d' ozio alle scienze fino alla sua morte avvenuta nel 1745. Si ha di lui: I *Recueil d'ouvrages curieux de mathématiques et de mécanique, ou Description du Cabinet de Nicolas Grollier de Servières*, Lione, 1719, in-4; Parigi, 1751, in-4; II *Mécanique abrégée des arts et métiers.*

GRU (*Mecc.*). Apparecchio che serve a sollevare i grossi pesi, e i cui elementi principali sono un verricello e una puleggia.

Si conoscono diverse specie di grue: le une sono stabili, e se ne fa uso nei porti per caricare e scaricare i battelli; le altre sono mobili, e sono principalmente impiegate nella costruzione degli edifizj. La fig. 1 della Tavola CXLIII rappresenta una di queste ultime. L' effetto di questa macchina si calcola nel modo medesimo di quello del verricello (*Vedi* Verricello), ma bisogna di più prendere in considerazione la resistenza sulle pulegge cagionata dalla rigidezza delle corde. Si consulti su questo particolare l' *Art de bâtir* di Rondelet, e il secondo tomo della *Mécanique appliquée aux arts* di Borgnis.

GUA de MALVES (Gian Paolo de), nato nel 1712 a Carcassona da famiglia no-

bile ed antica. La rovina del sistema di Law avendo cagionato quella del padre suo, nè avendo più mezzi di comparire nel mondo in modo conforme alla sua nascita, deliberò di farsi ecclesiastico. Provvisto di alcuni benefizj si recò a Parigi, ove attese con ardore allo studio delle scienze e in particolare a quello delle matematiche. Pubblicò nel 1740 l' *Uso dell' analisi di Cartesio*, e tale opera, nella quale vendica il filosofo francese delle ingiuste critiche de' suoi avversarj, gli aprì le porte dell' Accademia delle Scienze, ove fu ammesso nella classe di geometria, ed ove non tardò a mostrarsi degno emulo dei Clairaut e dei d'Alembert. Animato da uno zelo ardente pel pubblico bene e versato nelle più astruse questioni di economia politica, propose al governo varj progetti sia per accrescere le rendite dello stato, sia per migliorare la sorte del popolo, ma ebbe la disgrazia di non vederne accolto nessuno. Divenuto membro della Società Reale di Londra e dell' accademia di Bordeaux, morì a Parigi nel 1786. I suoi scritti matematici sono: I *Usage de l' analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres*, Parigi, 1740, in-12. In tale opera si trovano teorie semplici e generali, presentate in un modo nuovo, quasi sempre estese o perfezionate, e da ultimo rese più piccanti per avvicinamenti singolari e inaspettati, il che palesa nel suo autore una mente vigorosa, feconda in idee e in espedienti; II *Mémoire qui contient une démonstration d' algèbre, cherchée depuis long-temps par les plus fameux algébristes*; inserita nella Raccolta dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1741; III *Mémoire sur la façon de rechercher le nombre des racines réelles ou imaginaires*, nella Raccolta suddetta, anno stesso.

GUARINI (Cammillo Guarino), teatino, nato a Modena nel 1624, abbracciato avendo la professione religiosa in età di diciassette anni, si applicò con somma studio e profitto all' architettura e alle matematiche. Il duca di Savoja lo creò nel 1668 suo architetto ordinario, aggiunse poi a tale titolo quello di suo lettore in teologia e in matematiche, e non cessò di colmarlo di testimonianze della sua benevolenza. Morì a Milano il 6 Marzo 1683. Le opere sue principali sono: I *Euclides adauctus et methodicus*, Torino, 1671, 1676, in-fol.; II *Modo di misurare le fabbriche*, ivi, 1674, in-8; III *Compendio della sfera celeste*, ivi, 1675, in-12; IV *Trattato di fortificazione*, ivi, 1676, in-4; V *Leges temporum et planetarum, quibus civilis et astronamici temporis lapsus, primi mobilis, et errantium decursus ordinantur et in tabulas digeruntur ad latitudidem Taurinensem*, ivi, 1678, in-fol. VI *Coelestis mathematicae pars I et II*, Milano, 1683, in-fol.

GUERICKE (Ottone di), uno dei più celebri fisici del secolo XVII, nato a Magdeburgo nel 1602, è noto specialmente per le sue belle esperienze sul vuoto. È a lui dovuta la prima idea della macchina pneumatica, perfezionata poi da Roberto Boyle. Immaginò di pesare l' aria mediante una bilancia, di cui Sigaud de la Fond descrive con esattezza l' apparecchio nella sua opera: *Description et usage d' un cabinet de physique*, tom. II. Dimostrò la forza della pressione dell' aria, applicando l' uno contro l' altro due emisferi di rame, cui, dopo aver fatto tra essi il vuoto, sedici cavalli che tiravano in senso opposto non potevano separare, e i quali vengono ancora denotati col nome di *emisferi di Magdeburga*. Guericke erasi occupato con non minor successo all' astronomia. Fu uno dei primi ad annunziare che si poteva predire con esattezza il ritorno delle comete, e l' esperienza e i progressi della scienza hanno confermato questa opinione. Non così è avvenuto dell' altra per la quale supponeva che le macchie del sole non fossero altro che piccoli pianeti la cui rivoluzione avesse luogo in un' orbita troppo vicina a quest' astro, perchè fosse possibile di misurarne la di-

stanza. Alcuni astronomi hanno pensato peraltro che questa ipotesi non sia priva affatto di fondamento. Egli era in commercio di lettere con parecchi dotti di Europa, e tra gli altri col p. Gaspare Schott, che ha inserito di lui otto lettere nella sua *Tecnica curiosa*. I suoi lavori e le principali sue osservazioni vennero raccolte e pubblicate sotto il seguente titolo: *Experimenta nova, ut vocant, Magdeburgica, de pauco spatio, ab ipso authore perfectius edita, variisque experimentis aucta; quibus accesserunt certa quaedam de aeris pondere circa terram, de virtutibus mundanis et systemate mundi planetario, sicut et de stellis fixis ac spatio illo immenso*, Amsterdam, 1672, in-fol. Morì ad Amburgo nel 1686.

GUERRINO (Tommaso), matematico milanese del secolo XVII, nacque con una decisa inclinazione per lo studio delle matematiche, e seppe superare, per coltivarle, tutti gli ostacoli che gli opponeva la mediocrità della fortuna de' suoi genitori. Fu costretto, per guadagnarsi la sussistenza, ad abbracciare la professione di alabardiere nella città di Milano; ma niun' altra circostanza della sua vita si conosce, mentre l' oscurità della sua famiglia e la natura del suo impiego lo hanno fatto trascurare dai biografi. S' ignora pure l' epoca precisa della sua nascita e della sua morte, e solo si sa che nell' intervallo dal 1663 al 1668 pubblicò diverse opere di matematiche assai stimate, tra le quali si distinguo: I *Euclide in campagna*, trattato di agrimensura; II *Tavole gnomoniche*; III *Trattato di geometria*; IV *Trattato di stereometria*; V *Trattato di geodesia*. Tutte queste opere furono stampate a Milano nel corso dei cinque anni che di sopra abbiamo indicato.

GUGLIELMINI (Domenico), celebre idraulico, nato a Bologna nel 1655, si applicò in pari tempo alla matematiche e alla medicina, e in ambedue queste scienze fece progressi egualmente notabili. Dottorato in medicina in età di ventitrè anni, non cessò di occuparsi indefessamente dello studio delle matematiche, e nel 1686 fatto venne intendente generale delle acque del Bolognese, carica importantissima per la quantità dei fiumi e dei canali che in ogni senso attraversano quel territorio, e che richiedono una continua vigilanza onde prevenire i danni che di momento in momento possono derivarne. L' abilità somma con che seppe adempiere ai doveri del suo impiego, e la rara probità che dimostrò nelle diverse contese insorte tra Bologna e Ferrara a cagione del corso del Reno gli meritarono la pubblica estimazione. Nel 1690 unì al suo ufizio di soprintendente delle acque quello di primo professore di matematiche, e nel 1694 fu espressamente per lui creata la cattedra di idrometria. In seguito, senza perdere il titolo e gli stipendj di professore nell' università di Bologna, passò nel 1698 alla cattedra di matematiche nell' università di Padova, ove divenne poi nel 1702 professore di medicina. Quantunque di un temperamento robusto, tanta applicazione e tante fatiche indebolirono a poco a poco la sua salute, e morì all' improvviso a Padova il 12 Luglio 1710. Il carattere di Guglielmini era dolcissimo, ma di un conversare non ameno, perchè a stento rispondeva alle domande che gli venivano fatte, non curando di esser distratto dalle abituali sue meditazioni. Era membro delle accademie reali delle scienze di Parigi, Londra e Berlino, e della società dei Curiosi della natura di Vienna. L' elogio che di lui scrisse Fontenelle è interessantissimo.

Le opere sue matematiche sono: I *Tesi*, nelle quali sostiene contro Cavina l' opinione di Montanari, suo professore di matematiche, intorno ad una meteora luminosa osservata in Italia nel 1676. II *De cometarum natura et ortu dissertatio epistolica*, Bologna, 1681, in-4; III *Aquarum fluentium mensura nova et inquisita*, Bologna, 1690-91, 2 parti in-4. Tale opera, nella quale tratta dottamente di tutto ciò che ha relazione allo scolo delle acque, combattuta venne

da Papin negli *Acta Lipsensia*. Guglielmini rispose con *Epistolae duae hydrostaticae*, Bologna, 1692, in-4. La prima lettera è indiritta a Leibnizio, cui costituisce giudice della discussione, e la seconda a Magliabechi; IV *Della natura dei fiumi, trattato fisico-matematico*, Bologna, 1697, in-4; e ivi, 1739, in-4, nuova edizione con una traduzione latina e colla prefazione e parecchie dotte note di Eustachio Manfredi. Tale trattato, pieno di una moltitudine di viste nuove, non meno ingegnose che utili, è degno di esser meditato da tutti quelli che si occupano di siffatta parte dell'idraulica.

GUGLIELMO IV, soprannominato il *Saggio*, langravio di Assia-Cassel, nato il 14 Giugno 1532, ed uno dei principi più illuminati del suo secolo, si è reso illustre non solo per la protezione che accordò alle scienze, ma ancora pei propri suoi lavori. L'astronomia principalmente gli deve molto: egli fece costruire a Cassel uno dei primi osservatorj che siano esistiti in Europa, e lo corredò degli strumenti i più perfezionati che si possedessero al suo tempo. Si ha di lui un gran numero di osservazioni importanti che sono state raccolte e pubblicate da Snellio nel 1618. Chiamò presso di sè Rothman e Giusto Byrge, due astronomi stimati di quell'epoca, ch'ei non cessò di ricolmare de'suoi favori; e fu egualmente dietro le sue pressanti sollecitudini che Ticone Brahé potè ottenere dal re di Danimarca non pochi vantaggi. Guglielmo morì nel 1592. Il langravio Maurizio, suo figlio e suo successore, imitò il suo esempio e fu animato dalla stessa sua inclinazione per la scienza.

GUID'UBALDO (Il marchese), nato verso il 1540 in Urbino dell'illustre famiglia del Monte, si dedicò fino dalla sua gioventù allo studio delle matematiche, e sotto la direzione del celebre Commandino vi fece rapidi e notabili progressi. Alieno da qualunque idea ambiziosa non si occupò che della scienza e morì verso il 1601. Ha scritto: I *Planisphaeriorum universalium theoria*, Colonia, 1560, in-8; II *Mechanicorum libri VI*, 1577; III *De ecclesiastici calendorii restitutione*, Pisa, 1580, in-4; IV *Perspectivae libri sex*, ivi, 1600, in-fol. È la prima opera nella quale si dia un'idea della generalità dei principj su cui è fondata la prospettiva; ma ha il difetto di essere eccessivamente prolissa. V *Problematum astronomicorum libri VII*, Venezia, 1609, in-fol.; VI *De Cochlea*, 1615. In quest'opera, pubblicata dopo la morte dell'autore, si esaminano le diverse proprietà della vite di Archimede. Daniele Bernoulli trattò in seguito tale soggetto più brevemente e con maggior profondità nella sua *Idrodinamica*; VII *In Archimedem de aequiponderantibus paraphrasis*.

GUILLARD (Niccolò Antonio), matematico francese, nato a Orbais e morto a Parigi nel 1820, ha pubblicato: I. *Traité élémentaire d'arithmétique décimale*, Parigi, 1802; II *Traité des opérations de change et des arbitrages de change*, ivi, 1803, in-8; III *Arithmétique des premières écoles et des écoles secondaires*, ivi, 1803, in-8. Suo figlio, professore al collegio di Luigi il Grande, aveva cominciato nel 1836 a pubblicare una raccolta settimanale intitolata: *Le Géomètre*, che è però rimasta interrotta alla pagina 224 del primo tomo. Essa conteneva articoli non poco interessanti su diversi punti di analisi.

GUISNÉE, geometra francese del secolo XVII, fu discepolo di Varignon, il quale nel 1702 lo fece ammettere nel numero degli allievi nell'Accademia delle Scienze di Parigi. Tale dotta società lo ammise nel suo seno cinque anni dopo in vece di Carré come meccanico pensionario. Guisnée è principalmente noto pel suo *Traité de l'application de l'algèbre à la géométrie*, di cui la prima edizione venne alla luce nel 1705. I dotti non tardarono ad apprezzare questo trattato, che era uno dei migliori nel suo genere: l'edizione fu presto smaltita, e nel 1723 ne comparve una seconda con numerose correzioni. Cartesio colla sua *Geometria* aveva aperta la via, e i suoi successori non dovevano far altro che esplorare il

terreno che egli aveva scoperta. Guisnée nel risolvere i quesiti di geometria per mezzo dell'algebra molto si diffuse sui metodi di costruzione, cui applicò anco alle equazioni differenziali del primo ordine per mezzo di curve trascendenti. Tali costruzioni sono ora poco in uso, perchè trattate vengono le cose in un modo più analitico, e l'opera di Guisnée oggi più non si legge; ma non dobbiamo dimenticare che fu di somma utilità in altri tempi. Egli aveva pubblicato fino dal 1704 nella raccolta dell'Accademia delle Scienze un *Metodo generale per determinare geometricamente il fuoco di una lente qualunque*. Scrisse altresì non poche memorie sopra diversi punti di geometria e di analisi. La sua memoria intorno ai projetti nell'ipotesi di Galileo contiene dimostrazioni che sono più semplici di quelle di Blondel: ma che è mai la teoria dei projetti quando è trattata senza il calcolo differenziale, e specialmente quando non si avverte alla resistenza dell'aria che tanto influisce sui risultati? Le osservazioni di Guisnée sul metodo *de maximis et minimis* del marchese di l'Hôpital sono assai lungi dall'essere esenti da paralogismi; ma era ben difficile il guarentirsi da ogni errore quando non vi erano che poche nozioni sulla teoria dei *punti singolari*, che sì strettamente con tali quesiti si collega. Gli scritti di Guisnée sono notabili per una non comune chiarezza e per vedute abbastanza ingegnose. Egli morì nel 1718.

GULDIN (Paolo), dotto matematico, nato nel 1577 a s. Gallo da genitori protestanti. In principio si diede ad imparare l'oreficeria, ed esercitò tal professione in varie città della Germania; ma mentre era a Freisinga avendo avuto varie conferenze col priore de' benedettini di quella città, abjurò gli errori nei quali era stato allevato, ed entrò nell'ordine de' gesuiti. La vita ritirata che allora cominciò a condurre sviluppò in lui una decisa inclinazione alle matematiche, e tali furono i progressi che in breve vi fece che nel 1609 fu chiamato a Roma onde professarle nel collegio della società: passò quindi a quello di Gratz, ove morì il 3 Novembre 1643. Guldin fu uno degli avversarj del metodo degli indivisibili, inventato da Bonaventura Cavalieri, che lo confutò caldamente nelle sue *Exercitationes geometricae*. *Vedi* Cavalieri.

Gli scritti di Guldin sono: I *Refutatio elenchi calendarii gregoriani a Setho Calvisio conscripti*, Magonza, 1616, in-4; uopo è aggiungere a tale difesa del calendario gregoriano: *Paralipomena ad Refutationem, in iisque producuntur viginti et novem exempla paschatum ex sancta Cyrillo Alexandrino nunquam antea edita*; II *Problema arithmeticum de rerum combinationibus, quo numerus dictionum seu conjunctionum diversarum quae ex XXIII alphabeti literis fieri possunt indagatur*, Vienna, 1622; III *Dissertatio physica-mathematica de motu terrae ex mutatione centri gravitatis ipsius provenienti*, ivi, 1622; IV *Problema geographicum de discrepantia in numero ac denominatione dierum, quam qui orbem terrarum contrariis viis circumnavigant, et inter se et cum iis qui in eodem loco consistunt, experiuntur*, ivi, 1633; V *Centrobaryrica, seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae libri IV*, Vienna, 1635-42, 2 vol. in-fol. Le più delle cose esposte nei primi due libri di quest'opera erano state dette dal p. la Faille (*Vedi* Faille), ma ciò che distingue il lavoro di Guldin è l'applicazione cui egli fa del centro di gravità alla misura delle figure prodotte per circonvoluzione. Tale proprietà era stata già riconosciuta da Pappo, nè si può scusare Guldin che restituita non gli abbia siffatta scoperta. Egli stabilisce come principio che ogni figura formata dalla rivoluzione di una linea o di una superficie intorno ad un asse immobile, è il prodotto della quantità generatrice pel cammino fatto dal suo centro di gravità. Tale regola, dice Montucla, soffre delle eccezioni, e può anco in certi casi condurre in errore; ma si deve considerare il legame cui l'autore stabilisce tra le

figure, i loro centri di gravità, e i solidi o superficie cui genereno girando intorno ad un asse, come une delle belle scoperte in geometria. Guldin lasciò pure alcune opere manoscritte.

GUNTER (Edmondo), ingegnoso matematico inglese, nato nel 1581 nella contee di Hereford, fu dapprima destinato al ministero evangelico; ma l'inclinazione sua per le scienza matemetiche evendo prevalso, a queste si dedicò interamente, e fino dal 1606 si fece conoscere per l'invenzione del suo settore, strumento per mezzo del quale egli eseguiva colla massima facilità tutte le operazioni pratiche della gnomonica. Inventò e perfezionò diversi altri strumenti di geometria pretica; o tiene un grado distinto nella storia della scoperta dei logaritmi. Creato nel 1619 professore di astronomia nel collegio di Gresham, mentre il suo collega Briggs calcolava assiduamente i logaritmi dei numeri naturali, Gunter s'incaricò di quelli dei seni e delle tangenti, e fin dall'anno 1620 ne pubblicò le tavola col titolo di *Canon of triangles*. Vedendo il vantaggio che danno i logaritmi per render più semplici le operazioni del calcolo, concepì l'idea felice di trasportarli sopra una scala lineare, mediante la quale si potesse con un solo aprire di compasso ottenere il resultato di una moltiplicazione o di una divisione, con una precisione proporzionata alla lunghezza della scala. Tale ingegnosa invenzione, ch'ei pubblicò nel 1624, e che è conosciuta sotto il nome di *Riga logaritmica*, o *Scala di Gunter*, fu benissimo accolta in Inghilterra, e vi si trova comunemente tale scala negli astucci di matematiche. Non ostante che Edmondo Wingate ne avesse fino dal 1624 esposto in Francie le proprietà e gli usi nella sua opera: *L'usage de la Reigle de proportion en l'arithmétique et géométrie*, Parigi, 1624, in-12, e che D. Henrion l'avessa prodotta nuovamente due anni dopo con alcuni perfezionamenti nel suo *Logocanon*, *ou Règle proportionnelle*, Parigi, 1626, in-8, essa vi era quasi sconosciuta quando Lemonnier nel 1772 la raccomandò come preferibile al quarto di riduzione per le pratica dell'arte del pilota. Fortin la fece incidere euch'esso nel 1776 nelle sua riduzione dell'Atlante celeste di Flamsteed.

Dopo Gunter, sono stati fatti importanti miglioramenti al suo strumento. Fino dal 1741, Camus, membro dell'Accademia delle scienze, incaricato di provvedere gl'impiegati dell'appalto alle barriere di una stazza speditive che dispensasse da qualunque calcolo, immaginò di fare scorrere l'una contro l'altra due scale logaritmiche, di cui l'una servisse a misurare il diametro medio, e l'altra la lunghezza dei colli: per tale invenzione la moltiplicazione ere cangiata in eddizione, e se ne leggeva il resultato senza prendere la penna in mano: si vedano su questo proposito le *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1741. Il modo però di stazzare colle righe logaritmiche fu successivamente migliorato da Leadbetter nel suo *The Royal Gauger*, Londra, 1750, in-8, nel quale descrive minutamente le righe logaritmiche ad incastro, strumento che fu in seguito perfezionato in Inghilterra, ove divenne di un uso universale sotto il nome di *sliding rule*. Del resto, l'applicazione più ingegnosa e più utile in pratica che ebbia ricevuto la scala di Gunter è la forma circolare che le ha dato Gattey nel suo quadrente logaritmico pubblicato prima nel 1798 e perfezionato poi col nome di *aritmografo* (*Vedi* Gattey). Gunter giovò pure sotto altri aspetti alle scienze fisiche ed astronomiche: è opinione che sia stato il primo a riconoscere che la variazione dell'ago calamitato non è costante in uno stesso luogo. Nell'osservatorio di Deptford si avvide egli di tale fenomeno l'anno 1621; e Gellibrand ed altri matematici non tardarono a confermarlo con moltiplici osservazioni. Gunter morì nel collegio di Gresham il 10 Dicembre 1626. La quinta edizione delle sue opere, che contiene ancora la descrizione degli strumenti da lui inventati, è state pubblicata e Londre nel 1673 in-4 da Leybourn.

H

HACHETTE (Giovanni Niccola Pietro), geometra francese, nato a Mézières verso il 1770, in umile condizione, è un nuovo esempio di quelli che ai loro talenti hanno dovuto il proprio innalzamento. Monge, che era stato trasferito alla scuola del genio di Mézières, distinse il giovane Hachette, e riconoscendo in lui le più felici disposizioni per le matematiche, prese un vivo interesse ai suoi progressi. Mediante il suo appoggio, Hachette potè fare i suoi studj all'università di Reims; e per la sua raccomandazione fu, in età non ancora di ventitrè anni, inviato professore d'idrografia a Callioure e a Pont-Vendre. Ma un decreto della Convenzione fondato avendo la scuola centrale dei pubblici lavori, conosciuta in seguito sotto il nome di Scuola politecnica (1794), Hachetta fu immediatamente nominato uno dei professori di quel celebre stabilimento. Egli fu incaricato specialmente dell'insegnamento della geometria descrittiva nella scuola preparatoria destinata a formare dei capi di studio. Niun dubbio che in quell'epoca pochi geometri in Europa, se solo si eccettua Monge stesso ed alcuni dei più distinti allievi della scuola del genio di Mézières, fossero al pari di Hachetta al corrente della scienza abbozzata da Frezier e da Dubuat, e che appena da venticinque anni era uscita dall'infanzia. L'anno successivo, quando Monge fece alle prime scuole normali il suo celebre corso di geometria descrittiva, Hachette e Lacroix figuravano accanto a lui come professori aggiunti; e Hachette solo, dal 1797 in poi, restò incaricato del corso alla Scuola politecnica, mentre Monge insegnava l'analisi. Nel 1798 fece parte, insieme col suo maestro, della spedizione militare e scientifica di Buonaparte in Egitto, e com'esso ritornò in Francia nel 1800. Colla sua cattedra di geometria descrittiva alla Scuola politecnica cumulò in breve il titolo di professore di matematiche alla scuola dai paggi, titolo più solido che brillante, e che poteva accrescere i suoi emolumenti senza nulla aggiungere alla sua reputazione, mentre l'insegnamento dei paggi non si estendeva oltre le matematiche elementari. Hachette conservò questo posto fino al 1813, epoca nella quale lo stabilimento fu trasportato da Saint-Cloud a Versailles, ed egli non lasciò i suoi alunni della Scuola politecnica che nel 1816 per coprire la stessa cattedra alla facoltà delle scienze nell'accademia di Parigi. In seguito fu nominato uno degli esaminatori dei candidati per la Scuola politecnica, incarico che adempì con eguale probità e sapere. Nel Settembre 1818 si presentò come candidato all'Accademia delle Scienze, nella sezione di meccanica, e fu ammesso dalla maggiorità: ma la costante sua amicizia per Monge facendo giudicare sfavorevolmente dei suoi principj politici, la sua nomina non ottenne la sanzione reale. Egli restò così fino al 1830 bandito dall'Istituto, ove sedevano i suoi discepoli: finalmente all'epoca della rivoluzione del Luglio 1830 vi fu ammesso, e morì pochi anni dopo il 16 Gennajo 1834.

Hachette acquistossi meritamente la fama di uno dei più abili geometri di un paese e in un tempo che molti ne ha contati. Egli era soprattutto eccellente nella geometria descrittiva, tanto rispetto alle teorie, quanto rapporto alle ap-

plicazioni. Il suo modo d' insegnare era forse alquanto pesante, ma è da notarsi che fu uno dei primi ad esporre la scienza, e che per la solidità, per la precisione e pel metodo lasciò ben poco a desiderare. Egli dava un'importanza essenziale alle operazioni grafiche come quelle che potentemente famigliarizzano lo spirito coi principj, nel tempo stesso che addestrano l' occhio e la mano alle costruzioni. Sebbene non si sia immortalato per grandi e numerose scoperte, ha nondimeno arricchito la scienza di teoremi importanti e di eleganti dimostrazioni. Ha stabilito, con una discussione più compiuta di quella di Eulero, la divisione delle superficie del secondo ordine in cinque specie: ha dedotto dalle loro proprietà un metodo grafico tanto per condurre dei piani tangenti ad una superficie qualunque generata dalla linea retta, quanto per costruire la tangente in un punto di una curva data in rilievo o mediante le sue projezioni. Ha aggiunto molto a ciò che aveva fatto Monge in tutto ciò che riguarda le intersezioni delle superficie, i piani tangenti, i rami infiniti delle linee d' intersezione, e gli asintoti di questi rami. Ha fatto vedere in qual modo possono determinarsi sopra una superficie i *punti singolari*, e come si semplifica questa soluzione generale nel caso particolare delle superficie di rivoluzione.

Le opere di Hachette sono: I Due *Supplémens à la géométrie descriptive de Monge*; il primo pubblicato nel 1811, in-4, e stampato in seguito alla quarta edizione di quell'opera che è l' ultima fatta vivente Monge; il secondo sotto il titolo di *Second supplément*, Parigi, 1818, in-4, seguito dall'*Analyse géométrique* di Leslie; II *Élémens de géométrie à trois dimensions*, Parigi, 1817, in-8. Quest' opera contiene le proposizioni principali della parte razionale della geometria descrittiva; e chiunque vuole studiare questa scienza a fondo non può dispensarsi dal leggerla; III *Collection des épures de géométrie à trois dimensions, à l' usage des élèves de l' École polytechnique*, Parigi, 1795, in-fol.; 2ª ediz. 1817. Questa raccolta forma colla *Geometria* di Monge il primo lavoro che abbia aperto la strada agli amatori della geometria descrittiva. IV *Applications de géométrie descriptive*, Parigi, 1817, in-fol. V *Traité de géométrie descriptive, comprenant les applications de cette géométrie aux ombres, à la perspective, et à la stéréotomie*, ivi, 1822, in-4. Questa bell' opera può dirsi che sia tuttora la base dell' insegnamento della geometria descrittiva, perchè i libri che nei collegi e alla Scuola politecnica sono oggi ad essa preferiti non ne differiscono che leggermente. È divisa in due libri ed ha un' appendice. Il primo è un compendio degli *Elementi di geometria a tre dimensioni*, dei quali non vengono riprodotte che le proposizioni necessarie per l' intelligenza della parte tecnica della geometria descrittiva e delle sue applicazioni alle arti grafiche: il secondo libro comprende le applicazioni, vale a dire, dopo i luoghi geometrici, le ombre e la prospettiva, le anamorfosi, la costruzione dei mappamondi sulla projezione stereografica, e poche pagine sulla gnomonica. L'appendice è consacrata alla stereotomia. VI *Application de l' algèbre à la géométrie, et Traité des surfaces du second ordre*, ivi, 1813, in-8 (la 1ª parte è stata composta insieme con Monge). VII *Traité élémentaire des machines*, ivi, 1811, in-8; ivi, 1828, in-4, 4ª ediz. VIII *Correspondance sur l' École polytechnique*, Parigi, 1804-15, 3 vol. in-8; IX Varj articoli inseriti nel *Giornale della Scuola politecnica*, come: 1º *Application de l'algèbre à la géométrie*, insieme con Monge, tom. IV; 2º *Théorie et description de l'heliostat*, Tom. IX; 3º *Solution analytique de ce problème: determiner le centre et le rayon d' une sphère qui touche quatre sphères données*, tom X. Diversi altri opuscoli e articoli inseriti in varj giornali.

HADLEY (Giovanni), dotto astronomo inglese del secolo XVIII, e membro della Società Reale di Londra, è autore di parecchie memorie inserite nelle *Transa-*

sioni filosofiche. Nel 1731, presentò a quella società un *Quarto di riflessione* o *Settore*, strumento che serve per osservare gli astri in mare, e misura gli angoli non ostante il movimento del vascello, inconveniente che non era stato tolto per anco fino allora, almeno nella pratica; imperocchè Hooke aveva già trovato fino dal 1664 o 1665 il mezzo proposto da Hadley, e costrutto avea uno strumento, perfezionato in seguito e descritto da Newton nel 1669. Perciò Halley reclamò il merito della priorità in favore di quest'ultimo, quando Giovanni Hadley produsse la descriziona del suo strumento. Senza entrare in nessuna disputa su questo particolare, diremo che il settore di Hadley, perfezionato poi essenzialmente da Mayer e da Borda, cambiò aspetto all'astronomia nautica pratica, e se ne può fare uso in terra col medesimo buon successo per misurare gli angoli viaggiando a cavallo o in carrozza. Niuna particolarità si conosce della vita di quest'astronomo, come si ignora ancora l'epoca della sua morte. Citeremo alcune delle sue memorie scientifiche: I *Descrizione di un telescopio catadiottrico*, nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1723; II *Descrizione di un nuovo strumento per misurare gli angoli*, ivi, 1731; III *Osservazioni fatte a bordo del yacht* il Chatam, *nei giorni 30 e 31 d'Agosto e 1° Settembre del 1732, per esperimentare il nuovo strumento*, ivi, 1732, IV *Descrizione di un livello a spirito di vino, attaccato a un quarto di circolo*, ivi, 1733; V *Sulla causa dei venti regolari*, ivi, 1735; VI *Sulla combinazione delle lenti trasparenti con piani che riflettono la luce*, ivi, 1736.

HAHN (Filippo Matteo), ingegnoso meccanico tedesco, nato nel 1739 presso Stuttgard, manifestò fin da fanciullo una inclinazione straordinaria allo studio dell'astronomia. Deciso avendo di abbracciare lo stato ecclesiastico, si recò all'università di Tubinga, ove divise il suo tempo nello studio della teologia e nel fabbricare strumenti astronomici ed ottici. Non ci occuperemo qui di descrivere le molte ed ingegnose macchine da lui costruite, e solo rammenteremo il *Planetario* che fabbricò pel duca di Wurtemberg, e che si conserva anche oggi nella pubblica biblioteca di Louisburgo, una *macchina aritmetica* di cui diede la descrizione nel *Mercurio tedesco* per l'anno 1774, e i perfezionamenti meccanici di cui gli va debitrice l'arte dall'orologiaro. I suoi scritti scientifici sono: I *Descrizione di una piccola macchina astronomica fatta pel principe di Hechingen*, Costanza, 1769, in 4; II *Ragguaglio delle macchine fabbricate da' suoi operaj da sei anni in poi*, Stuttgard, 1774, 3 numeri, in-8; III *Osservazioni sopra gli orologi a sole*, Erfurt, 1784, in-8. Negli *Acta acad. elect. Mogunt. scient. quae Erfurti est ad annos* 1782-83, si legge di questo autore una *Memoria* assai istruttiva *sul perfezionamento degli orologi da tasca*. Morì il 2 Maggio 1790. Per maggiori particolarità si ricorra all'articolo che lo riguarda nella *Biografia universale*.

HALES (Guglielmo), matematico irlandese, aveva professato per lungo tempo le lingue orientali nel collegio della Trinità a Dublino, quando fu nominato rettore di Kildase, ove morì settuagenario nel 1821. Le di lui opere matematiche sono le seguenti: I *Sonorum doctrina rationalis experimentalis*, 1778, in-4; II *De motibus planetarum*, 1786, in-8; III *Analysis aequationum*, 1786, in-4; IV *Analysis fluxionum*, 1800, in-4.

HALLEY (Edmondo). Questo grande astronomo nacque l'8 Novembre 1656 a Londra, ove fece i suoi studj sotto il dotto Tommaso Gale. L'estensione prodigiosa delle sue cognizioni e dei suoi lavori di un ordine il più elevato gli meritarono fino dalla sua gioventù una di quelle grandi reputazioni che sarebbero degna ricompensa di un lungo arringo scientifico. Aveva appena diciannove anni quando pubblicò il suo metodo diretto per trovare gli afelj e le eccentricità dei pianeti, opera notabile, la quale annunziava già cosa doveva divenire un giorno il suo au-

tore. Noi non seguiremo questo grand' uomo in tutti gli avvenimenti della sua vita, ma ci limiteremo ad esporre succintamente i lavori importanti, le osservazioni e le scoperte che ne hanno illustrato l' intera corsa.

Nel tempo in cui Halley manifestava in siffatta guisa l' inclinazione che lo trasportava verso l' astronomia, i cataloghi di Tolomeo e di Ticone erano i documenti i più compiuti che si possedessero sulla posizione delle stelle e sulla cognizione del cielo, e la loro imperfezione si opponeva ai progressi della scienza. Evelio e Flamsteed si occupavano per verità a riempiere la vasta lacuna lasciata da quegli antichi osservatori in tale parte importante della scienza: ma i loro lavori non potevano estendersi al di là degli orizzonti limitati di Londra e di Danzica. Halley concepì il progetto di andare ad osservare nell' altro emisfero, o di penetrare verso il polo australe più avanti che fatto non aveva Richer nel suo viaggio a Caienna. Carlo II, che ad onta della leggerezza e della dissipazione dei suoi costumi reali, proteggeva le scienze, approvò il suo progetto e gli somministrò tutti i mezzi per eseguire un' impresa tanto utile. Halley s' imbarcò nel 1676 per Sant' Elena, isola situata sotto il sedicesimo grado di latitudine australe. Vi passò un anno intero, durante il quale non potè determinare la posizione che di circa trecentocinquanta stelle, perchè il tempo non vi fu così sereno come gli si era fatto sperare. Preferendo tale stazione a quella del capo di Buona Speranza, che dapprima gli era stata consigliata, e soprattutto restandovi sì poco tempo, lasciò al celebre la Caille la gloria di descrivere più tardi la parte meridionale del cielo. Halley non mutò le costellazioni stabilite dai navigatori, e solo si contentò di crearne una accanto alla Nave, dandole il nome di *Quercc di Carlo II*, come monumento della sua riconoscenza verso questo principe. Durante il suo soggiorno nell' isola di Sant' Elena, Halley osservò un passaggio di Mercurio sul disco del sole, passaggio che ebbe luogo il 28 Ottobre dell' anno 1677. Tale genere di fenomeno, comune a tutti i pianeti inferiori, era stato già osservato da Gassendi, da Horrox, da Shakoerleus e da Evelio, ma Halley fu il primo a scorgere l' utilità che la scienza potuto avrebbe ritirare dall' osservazione di simili immersioni. Prese a convincersi e a dimostrare che i passaggi di Venere sarebbero stati i più opportuni a dare la parallasse esatta del sole. Egli ne dissense con una sagacità ammirabile tutte le circostanze ed imprese a ridurle in metodo. Al suo ritorno a Londra, verso l' autunno del 1678, pubblicò il suo catalogo delle stelle australi, accompagnato da dotte dissertazioni sopra diversi punti di astronomia. In tale opera espose il suo metodo per determinare la parallasse del sole. Da principio non potè dargli tutta l' estensione di cui era suscettivo: ma vi tornò sopra più volte, e nel 1716, dopo molti calcoli e mercè una applicazione ingegnosa della sua teoria perfezionata, venne a capo di annunziare agli astronomi, che un passaggio di Venere sul disco del sole avrebbe fatto conoscere la distanza dal sole dalla terra, con un grado di precisione che non avevasi ancora osato di sperare. Può giudicarsi dell' impazienza con cui si attese un avvenimento che doveva condurre ad un resultato così prezioso. L' ultimo passaggio era stato osservato nel 1639, e la natura dei movimenti del sole e di Venere non portavano a produrne un altro che nel 1769. Halley, troppo avanzato in età perchè sperar potesse di vedere tale nuovo passaggio, vi appella tutti gli astronomi che allora viveranno, gli esorta, gli stimola a mettere in opera quanto avranno di sagacità e di sapere, onde ben determinare le circostanze di un fenomeno sì raro e sì decisivo. Possiamo dire che le sue brame sono state adempite: il passaggio atteso fu osservato da tutti gli astronomi di Europa, i quali d' accordo si sparsero a tale oggetto sulla superficie del globo. Il suo metodo ha procurato al secolo presente la cognizione più profonda della vera distanza del sole dalla terra: nè della ricerca dalle dimensioni assolute del nostro sistema planetario po-

trebbero più occuparsi gli astronomi senza risovvenirsi di Halley (*Vedi* VENERE). Ma riprendiamo la storia succinta dei lavori di questo grande ingegno.

Nel 1679, appena pubblicato il suo catalogo delle stelle australi, partì per Danzica per visitarvi Evelio; viaggiò in seguito in Francia, in Italia e in Germania, per comunicare ai dotti le sue osservazioni e raccoglierne nuove cognizioni. Ritornato in Inghilterra, si occupò per quindici anni nelle ricerche le più importanti e le più feconde: nelle *Transazioni filosofiche* dal 1683 fino al 1697, si trova un numero considerabile di memorie e di dissertazioni che dimostrano l'elevatezza del suo ingegno e la moltitudine prodigiosa delle sue cognizioni: l'astronomia, la geometria, l'algebra, l'ottica, la fisica, l'artiglieria, erano per lui soggetti egualmente famigliari. Ei si applicava in pari tempo a lavori scientifici di altro genere, e nell'epoca stessa pubblicò diverse memorie assai curiose sulla storia naturale, sulle antichità, sulla filologia ec., che si trovano nella stessa raccolta. Tra i lavori che basterebbero ad illustrare il suo nome è da notarsi l'ingegnosa sua teoria delle variazioni della bussola. Sapevasi che l'ago magnetico non si volge sempre esattamente verso il polo, e che la causa ignota che produce siffatte variazioni cangia secondo il tempo ed il luogo in cui si osserva. Per rintracciare le leggi di tale fenomeno importante, Halley raccolse migliaja di osservazioni su tale argomento, e confrontandole con una rara pazienza, riconobbe la progressione dei moti dell'ago; dettò una teoria nella quale determinò, sulla superficie della terra, le linee curve in cui l'ago non declina, ed assegnò a tali curve un movimento periodico intorno a due poli diversi da quelli dal globo terrestre. Tale teoria riceveva giornaliere conferme per parte dei dotti e dei navigatori che avevano preso ad esaminarla, e il re d'Inghilterra, che per la situazione e per la forza marittima de'suoi stati aveva più interesse di ogni altro a perfezionarla, incaricò Halley di fare un viaggio sull'Oceano Atlantico per comprovare le leggi delle variazioni dell'ago magnetico, e per tentare nuove scoperte. Egli s'imbarcò il 3 Novembre 1698, s'inoltrò fino al grado cinquantesimosecondo di latitudine australe, e percorse in due anni i mari dei due emisferi sotto i climi i più opposti. Dappertutto le sue osservazioni furono conformi alla sua legge delle variazioni magnetiche. Lieto di questa certezza, ritornò alla patria, ove per lungo tempo ancora doveva crescer lustro al suo nome. Amico del gran Newton e zelante promotore delle sue dottrine, alle potenti sue sollecitazioni dovette il mondo la pubblicazione dei *Principj*, libro immortale, che il suo autore non voleva dare alla stampa. La viva luce che tale opera sparse presso tutte le nazioni di Europa fu un colpo di fulmine per la filosofia di Cartesio. Il sistema dei vortici si dissipava rapidamente, e non era più sostenuto che da alcuni ostinati, che già si trinceravano nella parte problematica che opponeva la natura delle comete. Halley, onde menare l'ultimo colpo alla loro irresoluzione e compiere lo stabilimento della nuova filosofia, ebbe l'idea di applicare il metodo di Newton alla determinazione delle orbite paraboliche delle comete. Si accinse a lunghi e penosi calcoli, e finalmente avendo potuto confrontare le orbite delle 24 comete osservate scientificamente fino a quell'epoca, riconobbe una perfetta analogia negli elementi di quelle degli anni 1531, 1607 e 1682, donde concluse che esse non erano che un solo e medesimo astro, il quale si era mostrato in tre epoche separate da intervalli di tempo pressochè eguali. La storia avvalorò anch'essa questa idea, indicandogli apparizioni di comete che avevano avuto effetto negli anni 1305, 1380, 1456. Non vi fu allora più dubbio: tale costanza di ritorni, tale eguaglianza degl'intervalli, confermarono l'idea sublime di Newton, che le comete, del pari che i pianeti, girino in ellissi intorno al sole. Halley stabilì dunque che tale cometa avesse un periodo di settantacinque in settantasei anni. Annunziò che sarebbe ricomparsa dall'anno 1758 al

1759, e l'avento ha chiarita vera la predizione. Nel 1705 pubblicò siffatta scoperta, la più interessante forse che abbia fatta l'astronomia. Prima di lui, erano state predette delle comete, ma erano apparizioni congetturate piuttostochè ritorni calcolati. Ei fu il primo, che, fondato sopra osservazioni astronomiche e sopra principj matematici, riconobbe la specie di movimento di tali astri e la certezza della loro rivoluzione. Al celebre Clairant appartiene in seguito la gloria di aver saputo fissare con precisione l'epoca del loro ritorno (*Vedi* Apiano, Clairaut e Cometa). Whiston tradusse in latino la *Cometografia* di Halley, aggiungendovi dei comenti, e la fece stampare nel 1710 in seguito alle sue *Praelectiones physico-mathemoticae*. Lemonnier ne pubblicò una traduzione in francese nel 1743, nella sua *Teoria delle comete*; e David Gregory l'inserì ne' suoi *Elementi di astronomia*.

L'astronomia deve ancora ad Halley un perfezionamento nella teoria dei movimenti della luna, la cognizione della quale è di un'applicazione tanto importante nella navigazione. Fino dal suo primo viaggio all' isola di Sant'Elena aveva riconosciuto che la luna, per la rapidità del suo moto, era di tutti gli astri quello che poteva somministrare il mezzo più esatto per trovare le longitudini in mare. Questa idea l'aveva sempre preoccupato, ma fu solo nell'età sua matura e quando ebbe acquistato un tesoro grande di osservazioni e di cognizioni nuove eh'ei si dedicò ad un serio lavoro su tale argomento. È noto come egli si servisse per base delle sue investigazioni del *Soros*, periodo dei Caldei, la cui durata è di circa diciotto anni, e che riconduce presso a poco la luna nelle stesse circostanze rapporto alla terra e al sole. Il problema si trovava così ridotto a determinare per ciascun giorno del periodo la posizione della luna rispetto alla terra e al sole, e la tavola di queste posizioni sarebbe stata di un uso certo e perpetuo. Non possiamo però tacere che Halley cadde qui in grande abbaglio, e che il suo lavoro sotto questo punto di vista è stato l'oggetto di critiche troppo fondate; l'illustre Laplace, tra molti altri geometri, ha fatto conoscere una quantità d'ineguaglianze secolari della luna, le quali non potevano per conseguenza verificarsi tutte nel corso del periodo caldeo adottato da Halley: ma la sua fatica fu almeno per lui l'occasione di scoperte reali ed utili alla teoria. Infatti ei potè trarne alcune delle leggi del moto della luna, vale a dire la sua equazione secolare e la sua ineguaglianza periodica, dipendente dalla variazione delle distanze della terra dal sole.

Nel 1720, cioè nel tempo appunto di questi lavori, Halley rimpiazzò all'osservatorio di Greenwich il celebre e dotto Flamsteed; la nuova sua posizione gli somministrò mezzi immensi di verificare, mediante le osservazioni più continuate, le teoria di cui allora occupavasi. Non intendiamo qui di esporre, ma soltanto di accennare le scoperte di questo grande e infaticabile astronomo, le quali debbono studiarsi nelle sue opere stesse per meglio comprendere la forza di quella sublime intelligenza, e la sua costanza nel tener dietro alle conseguenze delle cose al di là dei limiti che una sterile filosofia vorrebbe imporre alle investigazioni dello spirito umano. Dobbiamo aggiungere che gli scritti di Halley offrono in questo rapporto una conferma esplicita delle dottrine filosofiche esposte in questo Dizionario. Infatti, tale illuste astronomo, quantunque abbia preferito le teorie di Newton a qualche ipotesi di Cartesio, non cessava per ciò di parlare di questo grand' uomo col profondo rispetto che il sommo suo ingegno inspirerà sempre agli uomini che cercano coscienziosamente la verità. Egli ha seguito il suo metodo in tutti i casi in cui l'*osservazione* gli è sembrata insufficiente. Così, quando annunziò il primo che la parallasse e il diametro delle stelle fisse dovevano essere insensibili, perchè la loro distanza era infinita, pose un termine a ricerche che non potevano avere resultati reali, tanto questi globi sono fuori

della portata degli strumenti ottici più potenti, e supplì coll' autorità assoluta della ragione all' autorità pratica e limitata dei metodi empirici. Determinando la precessione degli equinozj, nel tempo stesso di Lahire e di Cassini, Halley si elevò colla potenza dello stesso principio filosofico alla cognizione del moto proprio della stella, sì intimamente connesso con quello del sistema dell' universo. Riconobbe che da Ipparco in poi le latitudini di alcune stelle di prima grandezza avevano subìto dei cangiamenti notabili, e siccome potè convincersi che tali cangiamenti non potevano essere attribuiti alla diminuzione dell' obliquità dell' eclittica nè alla precessione degli equinozj, ne concluse che ogni stella aveva un movimento che le era proprio. Da tali premesse venne condotto a conseguenze e sviluppi non meno rimarcabili. Dichiarò che la pretesa immobilità delle stelle fisse non era che apparente, e che questi corpi cangiavano di posto nello spazio, e che i loro cangiamenti lentissimi non ci sembravano d' altronde tanto piccoli che a motivo della distanza che gli separa dal nostro globo. La lontananza rende presso a poco nulle le variazioni che solo una lunga serie di secoli può render sensibili. In seguito a tali verità sorprendenti vengono considerazioni filosofiche che non lo sono meno: le stelle hanno dunque un' altra destinazione che quella di trasmetterci la debole e pallida luce che ne riceviamo; esse probabilmente illuminano come tanti soli nello spazio altrettanti sistemi planetarj. Queste idee più o meno verosimili sembreranno forse volgari adesso, ma al tempo in cui Halley le affacciò destarono la maraviglia per la loro novità e per la loro arditezza filosofica. È un diritto come un dovere della storia il rendere al loro illustre autore, segnalandole nel cammino progressivo dello spirito umano. Il dotto storico delle matematiche, Montucla, ha seguito Halley in tutti gli sviluppi della sue congetture sulla comete, che d' altronde si deducono ancora dalla teoria di Newton. Ha rammentato che, secondo lui, retrotraendosi di 575 in 575 anni, si sarebbe trovato che la cometa che era comparsa l' anno 46 prima di Gesù Cristo, poco tempo dopo la morte di Cesare, era dovuta passare assai vicino alla terra, all' epoca in cui la cronologia fissa l' avvenimento dell' ultimo cataclisma che ha sconvolto il mondo, e che forse tal circostanza astronomica potè molto contribuirvi. Halley e Newton, al pari di Pascal, soggiunge questo scrittore con una ironia mista a profondo dolore e di cui troppo bene si concepisce il motivo, avevano ancora la debolezza di credere in un Dio!

Halley, del quale le esigenze del nostro piano non ci permettono di considerare con maggiori particolarità gl' immensi ed utili lavori, morì in età di ottantatrè anni il 25 Gennajo 1742. « Egli era, dice Mairan, franco e risoluto nelle sue maniera, giusto ne' suoi giudizj, eguale e regolato ne' suoi costumi, dolce ed affabile, disinteressato, sempre pronto ad aprire l' animo suo, ec. » Per lui, la morte non fu che il momento, atteso con una religiosa rassegnazione, di una modificazione superiore dell' esistenza immortale dell' uomo. Colpito da paralisia da tre anni, le sue forze andarono estinguendosi a poco a poco, senza che nulla perdesse della dolce serenità del suo carattere, di quella giojalità o piuttosto di quella sicurezza pacifica che dà tanta sublimità agli ultimi momenti di un uomo virtuoso. Ecco la lista delle principali sue opere: I *Methodus directa et geometrica investigandi excentricitates planetarum*, Londra, 1675-1677, 2 vol. in-4; Lalande dava la preferenza ai metodi indiretti, e riguardava i diretti come eleganze di geometria pressochè sempre inutili agli astronomi. II *Catalogus stellarum australium*, ivi, 1678-79, in-4. La situazione delle stelle vi è determinata per l' anno 1677; e l' autore vi ha aggiunto a forma di appendice l' osservazione del passaggio di Mercurio sul disco del sole, e le sue ricerche sulla parallasse della luna e sulle correzioni della teoria di tale satellite. Il catalogo delle stelle australi comparve in francese nello stesso anno nelle *Cartes du ciel*

di Ag. Mayer, Parigi, 1679, in-12, colla loro posizione calcolata per il 1700 da D. Anthelme, certosino. III *Teoria delle variazioni dell'ago magnetico*, inserita in inglese nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1683, e in latino negli *Acta eruditorum* del 1684; IV *Teoria della ricerca del fuoco nelle lenti ottiche*, nelle *Transazioni filosofiche*, an. 1692; V *Effemeridi pel* 1688, *calcolate sul meridiano di Londra* (in latino), Londra, 1686, in-8; VI *Tavole del valore delle annualità e delle rendite vitalizie* (in inglese), ivi, 1686, in-12; più ampie e più esatte di quelle che erano uscite a Breslavia l'anno precedente, e che presentavano il primo saggio di tale applicazione dell'aritmetica politica. VII *Valutazione dei gradi di mortalità della specie umana, tratta dalle tavole delle nascite e delle morti della città di Breslavia*, ec. nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1693. Questa interessante memoria contiene la prima tavola di mortalità che si conosca tratta con metodo scientifico dalla osservazione dei fatti; VII *Apollonii Pergaei de sectione rationis libri II, ex arabico mss. latine versi*; *accedunt ejusdem de sectione spatii libri II restituti*, Oxford, 1706, in-8; opera rara, non essendone stati stampati che quattrocento esemplari. VIII *Apollonii Pergaei conicorum libri VIII, et Sereni de sectione cylindri et coni libri II*, ivi, 1710, in-fol.; IX *Tabulae astronomicae*, Londra, 1749, in-4; la stampa n'era incominciata fino dal 1726. X Un gran numero di memorie nelle *Transazioni filosofiche* e negli *Acta eruditorum* di Lipsia.

HALMA (Abate Niccolò), filologo e matematico francese, si è reso celebre per la sua traduzione dell'*Almagesto* di Tolomeo, la prima che sia stata fatta nelle lingue moderne. Nato a Sedan il 31 Dicembre 1755 da famiglia povera, seppe colla sua assiduità allo studio vincere gli ostacoli che a' suoi progressi opponeva la disgraziata sua situazione. Le lingue antiche, le matematiche e l'astronomia furono non le uniche, ma le principali sue occupazioni, poichè attese ancora alla medicina, alla teologia, alla poesia, al disegno, alla storia naturale e all'archeologia. All'oggetto di assicurarsi più sollecitamente i mezzi di sussistenza, abbracciò di buon'ora lo stato ecclesiastico, e si recò a Parigi ove si dedicò alla istruzione della gioventù. Gli furono affidati quindi varj impieghi tanto al tempo della repubblica, quanto sotto il governo di Napoleone e sotto quello della restaurazione. Egli era uno dei conservatori della Biblioteca di santa Genoveffa, quando morì a Parigi il 4 Giugno 1828.

Delle molte opere pubblicate da Halma si trova un elenco compiuto nell'articolo che lo riguarda nel *Supplemento* della *Biografia universale*; niuna però gli ha fatto tanto onore quanto la sua traduzione dell'astronomia antica di Claudio Tolomeo, intitolata dall'autore greco: *Composizione matematica*, e che gli Arabi nel medio evo hanno chiamata *Almagesto*. Non è questo il luogo di esporre tutte le cure usate da Halma per procurarsi una lezione corretta del testo greco e gli studj da lui fatti sui codici e sulle edizioni più accreditate; ci limiteremo perciò ad accennare che il primo volume di questo lavoro comparve nel 1813 col seguente titolo: *Composition mathématique de Claude Ptolémée, traduite pour la première fois du grec en françois sur les manuscrits de la bibliothèque impériale, avec le texte grec, et enrichie de notes de M. Delambre*, Parigi, in-4: il secondo venne alla luce nel 1816. A tale opera debbono andare unite le seguenti pubblicazioni che ad essa più o meno strettamente si riferiscono: I *Commentaires de Théon d'Alexandrie sur la composition mathématique de Ptolémée*, Parigi, 1821-22, 2 vol. in-4; II *Table chronologique des règnes, prolongée jusqu'à la prise de Constantinople par les Turcs*; *Apparition des étoiles fixes de C. Ptolémée, Théon*, ec., *et Introduction de Geminus aux phénomènes célestes, traduites pour la première fois du grec en français, et suivies de recherches*, ec., ivi, 1819, in-4; III *Hypothèse*

et époques des planètes de C. Ptolémée, et hypothèses de Proclus Diadochus, traduites pour la première fois du grec en français, ivi, 1820, in-4; IV *Commentaires sur les tables manuelles astronomiques de Ptolémée, jusqu'à présent inédites : Première partie, contenant les Prolégomènes de Ptolémée, les Commentaires de Théon, et les Tables préliminaires terminées par les Ascensions des signes du zodiaque dans la sphère droite*, ivi, 1822, in-4; V *Tables manuelles astronomiques de Ptolémée et de Théon, jusqu'à présent inédites : Seconde partie, contenant les Ascensions dans la sphère oblique, les mouvements du soleil, de la lune et des planètes, ec.*, ivi, 1823, in-4; VI *Tables manuelles astronomiques, ec. : Troisième partie, comprenant les latitudes des planètes, les stations, leurs phases, ec., suivies de la Construction des éphémérides, ou Almanach des Grecs, et des scholies d'Isaac Argyre*, ivi, 1825, in-4; VII *Table pascale, du moine Isaac Argyre, faisant suite à celles de Ptolémée et de Théon, traduite du grec en français*, ivi, 1825, in-4. Debbonsi ad Halma parecchi altri scritti sull'astronomia egiziana, sullo zodiaco di Dendera, sulla geografia, ec. Ha pure tradotto dall'inglese gli *Elementi di astronomia* di Vince, sulla seconda edizione del 1801, Parigi, 1819, e dal tedesco le *Tavole logaritmiche dei numeri, dei seni e delle tangenti disposte in un ordine nuovo con una introduzione* del prof. Prasse di Berlino, Parigi, 1814, in-8.

HARRIOT (Tommaso), celebre matematico inglese, nato nel 1560 ad Oxford, ottenne in età di diciannove anni il grado accademico per poter professare; insegnò in seguito le matematiche ad alcuni giovani signori, e tra gli altri al cavaliere Walther Raleigh, lo sventurato favorito della regina Elisabetta, che gli dimostrò dipoi una costante affezione. Fece parte della spedizione che Riccardo Grenville condusse alla Virginia, levò la carta di quel paese e pubblicò al suo ritorno a Londra la relazione di quel viaggio. Da quell'epoca si occupò esclusivamente delle matematiche; ma naturalmente modesto e abituato ad una vita solitaria e meditativa, non comunicò i suoi lavori, che tanto hanno contribuito ai progressi della scienza, che a pochi amici, e la loro pubblicazione non ha avuto luogo che dopo la sua morte. Harriot morì a Londra il 2 Luglio 1621.

È a lui dovuta l'importante scoperta della natura e della formazione delle equazioni, che Viète aveva già presentita, e ch'ei sviluppò con somma sagacità e notabile superiorità. Non si limitò a considerare le equazioni sotto la forma fino allora usitata, vale a dire eguagliando i termini che contengono la quantità incognita al termine noto; ma fa passare, quando n'ha occasione, quest'ultimo termine nello stesso membro degli altri, e dandogli un segno contrario a quello che aveva, eguagliò a zero tutta l'espressione. Non pare, come hanno osservato parecchi geometri, che Harriot abbia ben compreso tutto il vantaggio che poteva trarsi da questo modo di considerare le equazioni, perchè non lo rammenta per così dire che incidentalmente; e fuori che in un solo capitolo dell'opera in cui si trova esposta questa scoperta, fa sempre uso della forma ordinaria quando propone a risolvere un'equazione. Egli conobbe pure, sebbene in un modo imperfetto, l'uso delle radici negative. Ma la scoperta fondamentale di Harriot, quella che gli fa assegnare un posto distinto tra i matematici del suo tempo, consiste interamente nell'avere egli il primo osservato che tutte le equazioni degli ordini superiori sono prodotti di equazioni semplici. È noto come da questa generazione delle equazioni emani una moltitudine di verità che sono della più alta importanza in algebra. Noi siamo costretti però a rimandare il lettore desideroso di avere una più estesa cognizione di questa parte dei lavori di Harriot, all'opera stessa in cui questa scoperta è esposta, e che è intitolata: *Artis analyticae praxis ad aequationes algebricas resolvendas*, Londra, 1631, in-fol.

Wallis ha fatto un torto alla memoria di Harriot parlando con esagerazione delle sue scoperte, e attribuendogli senza fondamento quelle di Cartesio, di cui cerca sempre di deprimere l'ingegno per far risaltare quello del suo compatriotta. Montucla però nella sua *Storia delle matematiche* ha rilevato tutti gli errori commessi da Wallis, e ha ridotto al loro giusto valore i meriti del matematico inglese. Harriot era in commercio di lettere coi dotti più distinti del suo tempo, e tra gli altri con Keplero, col quale ebbe una discussione intorno alla teoria dell'arco baleno. Si conserva un trattato di Harriot intitolato: *Ephemeris chyrometrica*, nella biblioteca del collegio di Sion. Alcuni altri de' suoi manoscritti rinvenuti furono nel 1784 in un castello del duca di Northumberland nella contea di Sussex: ed uno di essi farebbe presumere che Harriot avesse scoperto le macchie del sole presso a poco nel tempo stesso di Galileo. Tal circostanza è notabile nella storia della scienza solo perchè se ne può trarre la conseguenza che Harriot o si era procurato un telescopio o ne aveva indovinata la costruzione. Faremo osservare che Drebbel, che il primo recò a Londra un microscopio e un telescopio ch' ei aveva acquistato da Zaccaria Jans, vi fu accolto dal re Giacomo nel 1618, e che è possibile che Harriot abbia ricevuto da quest' uomo, troppo a torto calunniato, la cognizione di quest' ultimo strumento. Contuttociò, secondo questo manoscritto, Harriot non avrebbe veduto le macchie del sole che nel 1610, cioè un mese dopo Galileo, il che male si accorderebbe coll'avvertita circostanza tanto più probabile però che in altre lettere posteriori al 1610 ei non parla di tale scoperta, mentre era naturalissimo che ne dovesse tener proposito con un astronomo come Keplero. Qui dunque deve esservi confusione o errore di data. Il barone di Zach, nelle sue *Effemeridi astronomiche* per l'anno 1788, aveva promesso di pubblicare l'accennato manoscritto e di fare precedere ad esso una vita dell' autore.

HARRISON (Giovanni), uno dei più celebri orologiari inglesi, nato nel 1693 a Foolby nella contea di York. Nell'esercitare l'arte del falegname, che quella era di suo padre, svilupparonsi nel giovane Harrison le più felici disposizioni per la meccanica e per l'arte dell'orologiaro. Dopo avere abitato alcun tempo a Barrow, andò a stabilirsi a Londra, ove nel 1726 costruì due orologi a pendolo di tal perfezione che non differivano tra loro che di un minuto secondo in un mese. Vivendo presso un porto di mare, Harrison potè ben presto conoscere che il moto dei vascelli in mare era una causa permanente che avrebbe sempre disturbata la regolarità degli orologi aventi per motori dei pesi, e che era per conseguenza necessario sostituire a tali pesi una molla ed un regolatore. Introdusse in seguito altri perfezionamenti nell' orologeria; ma la sua più celebre e più utile scoperta, quella che deve eternare il suo nome nell'arte dell'orologiero, fu il *compensatore* o pendolo composto di diversi metalli. Sorpreso dall'effetto della dilatazione de' corpi metallici per le variazioni della temperatura, del loro allungamento pel caldo, del loro accorciamento pel freddo, aveva inventato fino dal 1726 un pendolo a forma di gratella composto di lastre di rame e d' acciajo. Inventò in seguito una specie di termometro metallico, composto di una lama di rame e d' una d' acciajo fissate l' una sopra l'altra con chiodi ribaditi: essendo il rame assai più sensibile del ferro alle variazioni della temperatura, il compensatore diveniva convesso dalla parte del rame durante il caldo, e convesso dalla parte dell' acciajo durante il freddo. Una delle estremità di tale fascia metallica era fissa, e lo spirale passando tra le due punte dell' altro capo era in tal guisa disugualmente compresso secondo la lunghezza della fascia, il che era rimedio alla diseguale dilatazione dello spirale.

Nel 1735 cominciò Harrison ad applicarsi alla costruzione degli orologi marini coll' intento di ottenere il premio di ventimila lire sterline stabilito dalla

regina Anna; dopo averne lavorati varj di una perfezione fino allora non conosciuta, ne terminò finalmente uno ch'ei chiamò conserva-tempo (*time-keeper*), e che presentò nel 1761 all'Ufizio delle longitudini di Londra, domandando che venisse esperimentato in un viaggio marittimo. La prova fu fatta: e in una corsa di sessantun giorno, dal 18 Novembre 1761 al 19 Gennajo 1762, da Portsmouth a Porto Reale nella Giammaica, l'orologio non soffrì che una variazione di 5 in 6 secondi. Questa precisione, di gran longa maggiore a quella che veniva richiesta per il premio proposto, non soddisfece pienamente i partigiani della determinazione delle longitudini per mezzo delle tavole della luna. Si disse che un solo viaggio non era una prova sufficiente, si volle che l'orologio fosse esaminato scrupolosamente non solo dai membri dell'Ufizio delle longitudini ma ancora da Camus, Berthoud e Lalande, che a tale oggetto si recarono espressamente a Londra. Finalmente furono sborsate ad Harrison cinquemila lire, e fu stabilito di assoggettare ad un nuovo esperimento la sua macchina. Questa volta il viaggio fu assai più lungo: esso durò centocinquantasei giorni, e in questo tempo l'orologio non variò che di 15 secondi. Allora furono tolte tutte le difficoltà; il parlamento con atto de' 22 Marzo 1765 accordò ad Harrison l'intero premio, e gli furono pagate tosto altre cinquemila lire; mentre le rimanenti diecimila non gli vennero date che nel 1767, dopo cioè che ebbe data ai commissarj una compiuta e particolarizzata descrizione della sua macchina, e dopo che ebbe posto in grado un altro artista di costruirne delle simili; perchè a queste due condizioni era subordinata la collazione del premio. Larkum Kendall fu l'artefice scelto per essere istruito da Harrison, e i conserva-tempo ch'ei costruì furono adoperati nel secondo e nel terzo viaggio di Cook, e sostennero la fama del loro inventore. Questo valente ed ingegnoso artista morì a Londra il 24 Marzo 1776. I *Principj dell'orologio di Harrison colle stampe relative* pubblicati vennero in inglese a Londra nel 1767, per ordine dell'Ufizio delle longitudini, e furono tradotti in francese dal p. Pezenas, Avignone (Parigi), 1767, in-4.

HASSENCAMP (Giovanni Matteo), matematico tedesco, nato a Marburgo nel 1743, e morto nel 1797 a Rinteln, ove era professore di matematiche e di lingue orientali. Abbiamo di lui in tedesco: *Storia della ricerca delle longitudini in mare*, Rinteln, 1769, in-8; Lemgo, 1774, in-4.

HAUTEFEUILLE (Giovanni de), fisico e meccanico celebre, nato ad Orléans nel 1647 e morto nel 1724. È conosciuto per molte e importanti invenzioni nell'orologeria e nella meccanica: ma quella che più di tutte gli fa onore è l'applicazione della molla spirale al bilancieri degli orologi, molla che ne regola il moto e ne rende isocrone le oscillazioni. Dei molti scritti da lui pubblicati, e dei quali si legge un compiuto elenco nella *Biografia universale*, non citeremo che i seguenti: I *Problèmes de gnomonique*, Parigi, 1704, in-4; II *Problèmes d'horlogerie*, ivi, 1719, in-4; III *Inventions nouvelles*, ivi, 1717, in-4; IV *Machine loxodromique*, ivi, 1701, in-4.

HAYES (Carlo), dotto inglese, nato nel 1678 e morto nel 1760 a Londra. Ha pubblicato in inglese sotto il velo dell'anonimo le seguenti opere: I *Trattato delle flussioni*, 1704, in-fol. È opinione che sia il primo sopra tale argomento pubblicato in lingua inglese. II *Metodo nuovo e facile di trovare la longitudine mediante l'osservazione dell'altezza dei corpi celesti*, 1710, in-4.

HEATHCOTE (Ralf), ecclesiastico inglese, nato nella contea di Leicester nel 1721 e morto nel 1795, ha pubblicato: *Historia astronomiae, sive de ortu et progressu astronomiae*, Cambridge, 1746, in-8: opera assai stimata.

HEILBRONNER (Giovanni Cristofano), abile matematico di Ulma, studiò a Lipsia, e attese dapprima alla teologia; ma l'inclinazione sua chiamandolo piuttosto allo studio delle scienze esatte, si dedicò poco dopo interamente alle mate-

matiche, cui insegnò in seguito nell'università di quella città. Morì verso il 1747. Si hanno di lui le seguenti opere: I *Saggio di una storia delle matematiche e d'una storia dell'aritmetico* (in tedesco), Francfort, 1739, in 8; II *Specimen historiae aeris*, Lipsia, 1740, in-4; III *Historio matheseos universae*, ivi, 1742, in-4. Tale opera, nella quale l'autore ha voluto dare una maggiore estensione alla storia delle matematiche da lui pubblicata nel 1739, non giunge che al secolo XV, e quantunque vi si desideri maggior ordine, sarà sempre un libro utilissimo a consultarsi per le molte notizie che vi sono raccolte. Heilbronner aveva già in pronto un gran numero di materiali per comporre una storia moderna delle scienze matematiche che comprendere doveva parecchi volumi, ma la morte interruppe il suo lavoro; IV *Problemi geometrici colle loro soluzioni* (in tedesco), Lipsia, 1745, in-4.

HELL (Massimiliano), gesuita tedesco ed abile astronomo, nato nel 1720 a Schemnitz in Ungheria, si mostrò per tempo inclinatissimo allo studio delle scienze; ma la fisica e l'astronomia fermarono più specialmente la sua attenzione. Dopo avere insegnate le matematiche in varj luoghi dell'Ungheria, fu nel 1755 chiamato a Vienna ad esercitare l'ufizio di astronomo e di conservatore dell'osservatorio di quella città, impiego che tenne con lustro pel corso di trentasei anni. Dal 1757 in poi pubblicò tutti gli anni senza interruzione fino al 1786 delle effemeridi che formano una raccolta stimata dagli astronomi. Il conte di Bachoff, inviato di Danimarca a Vienna, sollecitò il p. Hell ad accettare la commissione di osservare in Lapponia il passaggio di Venere sul disco del sole. Egli partì infatti il 28 Aprile 1768, e non ritornò a Vienna che il 12 Agosto 1770. Nel viaggio e nel soggiorno penoso che fece in quelle regioni boreali, sì poco frequentate e sì poco note, non si limitò alle sole osservazioni astronomiche che erano l'oggetto principale del suo viaggio, ma studiò ancora tutto ciò che gli sembrò meritevole di attenzione: così la geografia, la storia naturale, le maree, le meteore, il caldo, il freddo, il barometro, l'altezza delle montagne, il declivio dei fiumi e ogni cosa che potesse interessare richiamò il suo sguardo scrutatore. Ei prometteva sopra ciascuno di tali oggetti delle cose affatto nuove; ma l'opera grande, nella quale aveva consegnato il frutto dei suoi studj e delle sue fatiche, e che comprender doveva non meno di tre volumi in-folio, non è venuta alla luce. Frattanto però l'osservazione del passaggio di Venere riuscì compiutamente, e fu giudicata di fatto come una delle cinque osservazioni fatte a grandi distanze, ed in cui la lontananza di Venere cambiando maggiormente la durata del passaggio ci fece conoscere la vera distanza del sole e di tutti gli altri pianeti dalla terra; epoca notabile nella storia dell'astronomia, colla quale sarà per giusto titolo collegato il nome del p. Hell, di cui il viaggio riuscì tanto utile, tanto difficile e tanto pericoloso, quanto quelli del mare del sud, della California e della baja di Hudson, intrapresi in occasione di quel celebre passaggio. Il p. Hell morì a Vienna il 14 Aprile 1792.

Le opere principali di questo dotto e laborioso astronomo sono: I *Elementa algebrae Joannis Crivelli magis illustrata, et novis demonstrationibus et problematibus aucta*, Vienna, 1745, in-8; II *Elementa arithmeticae numericae et literalis*, ivi, 1763, in-8, 8ª ediz.; III *Ephemerides astronomicae ad meridianum Vindobonensem*, ivi, 1757-1786, in-8. Le memorie che il p. Hell aveva inserite in questa raccolta furono riunite da L. A. Junguitz e pubblicate in tedesco, Breslavia, 1791-94, 4 vol. in-8. IV *Tabulae solares N. L. de la Caille, cum supplemento reliquorum tabularum*, ivi, 1763, in-8; V *Tabulae lunares Tob. Mayer, cum supplemento reliquarum tabularum lunarium D. Cassini, de la Lande, et suis*, ivi, 1763, in-8; VI *De satellite Veneris*, ivi, 1765, in-8; VII *Observationes astronomicae ab anno 1717 ad annum 1752 factae, et ab*

Augustino Hallerstein Peckini Sinarum tribunalis mathematici praeside et mandarino collectae, ad fidem authographi mss. edidit., ivi, 1768, in-4; VIII *De transitu Veneris ante discum solis die 3 Jun.* 1769, *Wardaehusii in Finnmarchia observato*, Copenaghen, 1770; Vienna, 1770, in-8. In tale dissertazione, tratta dalle *Effemeridi* di Vienna pel 1772, si rinvengono ancora le osservazioni di parecchi insigni astronomi sull' accennato notabile avvenimento, e tra le altre quelle di Messier, di la Caille, di Short, di Zanotti, di Poleni, di Ximenes, ec. IX *De parallaxi solis ex observationibus transitus Veneris anni* 1769, Vienna, 1773, in-8. Il p. Hell volle provare in tale opera che la parallasse media del sole è di 8'',70: la Lande trovò che era un poco minore; X *Methodus astronomica, sine usu quadrantis vel sectoris, aut alterius cujusvis instrumenti in gradus circuli divisi, item sine notitia refractionis, ope solius tubi instructi micrometro filari singula secunda indicante, et in apto ad hunc usum fulcro mobili applicati, elevationem poli cujusvis loci in continente siti accuratissimam definire*, ivi, 1774, in-8; XI *Monumenta aere perenniora inter astra ponenda, primum Seren. Regi Angliae Georgio III, altera viro cel. F. W. Herschel*, ivi, 1789, in-8; tradotto in tedesco da L. A. Jungnitz, ivi, 1789, in-8.

HENRION (Dionigi), matematico nato in Francia verso la fine del XVI secolo, entrò giovanissimo al servizio delle Provincie Unite in qualità d' ingegnere. Nel 1607 venne a Parigi, ove insegnò le matematiche, ed ebbe molti distinti allievi. Morì verso il 1640. Ecco la nota delle principali sue opere: I *Mémoires mathématiques recueillis et dressés en faveur de la noblesse française*, Parigi, 1612, in-4; II *Canon manuel des sinus*, ivi, 1619, in-16; III *Cosmographie, ou Traité général des choses tant célestes qu'élémentaires*, ivi, 1620, in-8; IV *Collection, ou Recueil de divers traités de mathématiques*, ivi, 1621, in-4; V *Notes sur les récréations mathématiques, et la fin de divers problèmes, servant à l'intelligence des choses difficiles et obscures*, ivi, 1627, in-8; VI *L'Usage du mécromètre, qui est un instrument géométrique pour mesurer les longueurs et distances visibiles*, ivi, 1630, in-8; VII *L' Usage du compas de proportion*, ivi, 1631, in-8 Henrion è pure autore di non poche traduzioni, per le quali potrà vedersi il di lui articolo biografico nel *Supplemento* alla *Biografia universale*.

HERMANN (Giacomo), dotto matematico, nato a Basilea nel 1678. Quantunque destinato al ministero ecclesiastico, applicossi con sommo studio alle scienze esatte, ed un opuscolo che scrisse contro Nieuwentydt intorno alle basi del calcolo integrale, le quali impugnate venivano dal suo avversario, lo fece vantaggiosamente conoscere al celebre Leibnitz, che gli procurò la cattedra di matematiche nell' università di Padova. Insegnò quindi la stessa scienza a Francfort sull' Oder, e poi a Pietroburgo, ove era stato chiamato dallo czar Pietro il Grande. Infine tornò in patria nel 1731, e vi morì l' 11 Luglio 1733, pochi giorni dopo aver ricevuto il diploma di socio dell' Accademia delle Scienze di Parigi: ei già lo era di quelle di Bologna, di Berlino e di Pietroburgo. Oltre un numero grande di memorie, che si leggono nel *Giornale dei letterati d'Italia*, nel *Giornale elvetico*, negli *Acta eruditorum* di Lipsia, e nelle *Memorie* delle accademie di Berlino e di Pietroburgo, questo dotto ha pubblicato separatamente: *De phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum*, Amsterdam, 1716, in-4. Era suo disegno di far susseguitare a questo lavoro un *trattato di dinamica*; ma l' opera di d' Alembert su tale soggetto non permette che rincresca ch' ei non abbia mandato ad effetto il suo divisamento.

HERSCHEL (*Astron.*). Nome che talvolta si dà al pianeta più comunemente conosciuto sotto quello di Urano, perchè è stato scoperto dal celebre astronomo Guglielmo Herschel.

HERSCHEL (Guglielmo), uno dei più celebri astronomi moderni, nacque ad Annover il 15 Novembre 1738. Le notizie che si hanno sopra la vita privata di quest'uomo grande sono poche ed incerte. Suo padre Giacobbe, professore di musica, lo iniziò per la stessa sua professione insieme con altri quattro figli, senza peraltro trascurare la consueta istruzione scientifica e letteraria. In età di quattordici anni si dice che il giovine Guglielmo entrasse come sonatore in un reggimento di guardie annoveresi, col quale passasse in Inghilterra tra il 1757 e il 1759. Altri dicono che si recasse solo in quel paese. Dopo il suo arrivo, si trattenne per qualche tempo a Durham, ove si narra che fosse incaricato della formazione di una banda militare, e che in seguito fosse per varj anni organista ad Halifax, ove si occupò nell'insegnare la musica e nello studiare le lingue. Molti sono i racconti che si fanno intorno alle sue occupazioni musicali, ma nessuno ha un sicuro fondamento. Quello che è certo si è che nel 1766 era organista nella cappella ottogona di Bath, nella qual città cominciò a rivolgere la sua attenzione all'astronomia. Ei non possedeva cognizioni matematiche molto profonde, ma era dotato della prespicacia e della pazienza tanto necessaria agli osservatori dei fenomeni celesti. Fino dal bel principio de' suoi studj astronomici, gli nacque il desiderio di avere un telescopio: ma la compra di un tale strumento essendo stata *fortunatamente* al di sopra de' suoi mezzi, risolvè di farsene uno da sè stesso. Dopo una moltitudine di tentativi e di saggi sopra le leghe metalliche che riflettono la luce con maggiore intensità, sui mezzi di dare agli specchi una figura parabolica, sulle cause che nel pulirli alterano questa figura, giunse a costruire nel 1774 un telescopio newtoniano di cinque piedi inglesi di fuoco. Tale successo lo incoraggì: telescopj di sette, di otto e fino di venti piedi di distanza focale furono il frutto di nuovi tentativi, di nuovi sforzi. E quasi per far tacere coloro che non avrebbero mancato di scorgere una superfluità di apparato, un lusso inutile nella grandezza dei nuovi strumenti e nelle cure ingegnose della loro esecuzione, la natura accordò al nuovo astronomo, il 13 Marzo 1781, l'onore inaudito d'incominciare l'arringo dell'osservazione colla scoperta di un nuovo pianeta posto ai confini del nostro sistema solare. Da quel momento la reputazione di Herschel si sparse per l'Europa tutta. Il re Giorgio III, gran protettore delle scienze, seppe scorgere tosto il genio di Herschel, gli assicurò una rendita vitalizia di trecento ghinee, e gli diede un'abitazione a Slough, presso il castello di Windsor. Qui termina la storia della vita privata di Herschel: egli non uscì più dal suo osservatorio che per andare ad esporre alla Società Reale di Londra i risultati sublimi delle continue sue veglie. Non ci rimane adunque che a far conoscere nel modo il più succinto le principali scoperte delle quali ha arricchito la scienza, e che formano il soggetto delle numerose memorie da lui inserite nella celebre collezione nota sotto il nome di *Transazioni filosofiche*.

I perfezionamenti introdotti da Herschel nella costruzione e nell'uso de' telescopj sono stati la fonte e la causa delle sue scoperte astronomiche, e meritano a questo titolo di essere rammentati i primi. È noto che i telescopj newtoniani e gregoriani non trasmettono i raggi luminosi all'occhio dell'osservatore che dopo due riflessioni, perciò l'assorbimento della luce, prodotto in generale dagli specchi metallici, è doppio in questi telescopj, e l'immagine dell'oggetto riesce tanto più debole. Di più, il piccolo specchio che manda all'occhio i raggi reflessi dallo specchio grande, essendo necessariamente situato tra questo e l'oggetto, intercetta una porzione più o meno grande dei raggi incidenti, e forma così una nuova causa di indebolimento nella immagine. Herschel soppresse lo specchio piccolo e inclinò leggermente lo specchio grande in modo che le immagini andassero a formarsi non nell'asse del tubo, ma in vicinanza della sua circonferen-

za. L'osservatore può allora vederle con un semplice oculare; e quantunque la sua testa intercetti una parte dei raggi incidenti, la perdita di luce che ne resulta in un gran telescopio è di gran lunga minore di quella che avverrebbe ove non fosse soppresso il piccolo specchio. Una tal costruzione però, nella quale l'osservatore posto all'estremità anteriore del tubo osserva direttamente nello specchio volgendo il dorso agli oggetti, non è applicabile che ai telescopj a grandi dimensioni. È per questo motivo che Herschel incominciò nel 1785 a lavorare il gigantesco e famoso suo cannocchiale, che fu terminato solo nel 1789. Questo strumento aveva un tubo cilindrico di ferro di 39 piedi e 4 pollici inglesi di lunghezza, e 4 piedi e 10 pollici di diametro; dimensioni enormi comparativamente ai telescopj eseguiti fino a quel tempo. Ma per muovere con facilità e prontezza questa macchina, vi voleva un apparato di travi, di corde, di puleggie, nell'immaginare il quale Herschel si mostrò non meno ingegnoso meccanico di quello che fosse valente osservatore. Qui non possiamo dispensarci dall'avvertire che poche persone, anco tra gli astronomi, conoscono quanto servisse ad Herschel ne' suoi lavori e nelle sue scoperte il gran telescopio di quaranta piedi: imperocchè sono egualmente in inganno quelli che pensano che l'osservatore di Slough si servisse continuamente di questo colossale strumento, come gli altri che col barone di Zach sostengono che non sia stato di alcuna reale utilità, che non abbia servito a nessuna scoperta, e che non debba considerarsi che come un semplice oggetto di curiosità. Queste asserzioni sono formalmente contradette dalle parole stesse di Herschel. Nel volume delle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1795 (pag. 350), così egli si esprime: » Il 28 Agosto 1789, avendo diretto il mio » telescopio (di quaranta piedi) verso il cielo, *scoprsi il sesto satellite di Saturno*, e vidi le macchie di questo pianeta meglio di quello che aveva potuto » fare fino allora ». E nel volume del 1790 (pag. 11) si legge » La gran luce » del mio telescopio di quaranta piedi era allora tanto utile, che il 17 Settem- » bre 1789 potei osservare il settimo satellite, situato in quel momento nella » massima sua elongazione occidentale ». Nel lavorare i suoi telescopj, Herschel aveva sostituito ad una pratica cieca dei metodi diretti e sicuri, che del mestiere dell'ottico hanno fatto un'arte e quasi una scienza. Deve rincrescere che tali metodi, e la teoria affatto speciali sulle quali probabilmente sono fondati, non siano stati pubblicati dal loro autore; ma nè gli uni nè le altre sono perduti, perche il figlio di Herschel, grand'astronomo anch'esso, gli conosce e gli esercita, ed è da sperarsi che voglia finalmente renderli di pubblica ragione.

Ma non sono le sole applicazioni dell'ottica che debbono ad Herschel il loro avanzamento: anco l'ottica teorica ha fatto grandi passi mercè le sue scoperte. Troppo lungo sarebbe il dare qui un conveniente sviluppo alle sue ricerche sulla refrangibilità del calorico raggiante, sulla diversa proprietà illuminante o intensità dei diversi raggi dello spettro, sugli anelli colorati concentrici che si formano tra due lenti soprapposte, ec. basterà il dire che in tutte le sue ricerche si manifesta l'ingegno suo perspicace nel combinare e nel variare con mirabile sagacità le esperienze come nel rintracciare la causa dei fenomeni. Anco la costituzione fisica del sole, le sue macchie, le sue fiaccole, la sua incandescenza prodigiosa, tanto superiore ai calori più forti e alle illuminazioni più vive colle quali sia giunto l'uomo a volatilizzare il platino e l'oro, hanno molto occupato la mente di Herschel; e se le sue congetture su tale argomento non sono state abbracciate da tutti i dotti non meritano meno di essere studiate e meditate.

Munito dei suoi potenti strumenti, Herschel esaminò ad uno ad uno tutti i corpi del nostro sistema planetario, non esclusi quelli scoperti al principio di questo secolo da Piazzi, Olbers e Harding. Fu egli il primo che sulla scabra superficie della luna seppe vedere le vestigie non dubbie di eruzioni vulcaniche: fu

egli il primo che richiamò l'attenzione degli astronomi alle macchie biancastre che si osservano verso i poli di Marte, macchie che scompariscono quasi del tutto dopo essere state esposte al sole, e che all'opposto giungono alla massima dimensione dopo le lunghe notti degl'inverni polari, che in quel pianeta si prolungano a più di undici de' nostri mesi; donde ne concluse con molta verisimiglianza non essere esse che grandi masse di neve che si accumulano quando il sole illumina l'emisfero opposto, e che tendono a fondarsi al ritorno della bella stagione. Passeremo sotto silenzio una moltitudine di osservazioni sopra Marte, sull'inclinazione del suo asse, sulla posizione de' suoi poli, sulla sua forma aferoidale, non meno che le altre osservazioni sopra Venere, sopra Mercurio, sopra i pianeti telescopici e sopra i satelliti di Giove: ma ciò non possiamo tacere si è che Herschel ebbe la fortuna di scoprire il primo nel 1789, e per lungo tempo fu il solo che potesse vantarsi di averli scorti, i due satelliti inferiori di Saturno, volgarmente detti il sesto e il settimo. Per distinguere queste due lune, che sfuggono all'osservazione non per la loro lontananza da Saturno, ma anzi per la loro stessa prossimità e per il loro movimento che si effettua nel piano medesimo dell'anello, ebbe bisogno del suo potente telescopio di quattro piedi di apertura: ed anco allora non potè scorgerli che una volta, nel tempo in cui l'anello sparisce nei telescopj ordinarj e si riduce nei più forti canocchiali ad un filo di luce più sottile di un capello: Herschel vide allora tali satelliti scorrere per questa linea come i grani di una corona, allontanarsi quindi, ma per brevissimo tempo, dalla estremità di questa retta, comparire staccati ed interi, e finalmente tornar a involarsi ai nostri sguardi secondo il consueto. Infatti per molti anni non sono stati più riveduti; e solo in questi ultimi tempi i dotti dell'osservatorio del collegio romano per mezzo del gran canocchiale di Cauchoix hanno potuto trovare novamente i due satelliti scoperti da Herschel. Del resto, sembra che la curiosità di questo grande astronomo forse particolarmente stimolata da questo immenso e singolare pianeta: la sua figura, la sua rapida rotazione, l'estrema diversità dei climi di un globo in cui il giorno dell'equatore non eccede le cinque ore, mentre ai poli è di quindici anni, le strane apparenze che debbono presentarvi le sue sette lune e il suo anello, offrendo un campo vastissimo alle congetture, hanno successivamente esercitato la sua pazienza di osservatore e la sua sagacità di teorico. Le *Transazioni filosofiche* non contengono meno di sette memorie di Herschel sopra Saturno.

Era giunto intanto il tempo che dovevano estendersi i confini del nostro sistema planetario. A una distanza quasi doppia di quella che separa Saturno dal sole, girava inosservato fino dal momento della creazione un globo di dodicimila leghe di diametro, il terzo, in volume, tra quelli che fanno le loro rivoluzioni intorno al sole, accompagnato da due e forse da cinque o da sei satelliti. Quest'astro immenso fu finalmente veduto nel 1781: Herschel l'osservò per la prima volta il 13 Marzo, e pieno di modestia quanto di gioja volle dare al suo pianeta il nome di Giorgio (*Georgium sidus*), in onore del re d'Inghilterra suo generoso protettore. La posterità non ha adottato questo nome, e il nuovo pianeta è oggi conosciuto soltanto sotto quello di *Urano*. Herschel scoprì ancora i sei satelliti che lo seguono nell'immenso suo giro: i primi due furono annunziati nel 1787: la loro esistenza è indubitata; essi impiegano l'uno meno di sei giorni e l'altro meno di nove a percorrere l'intera loro orbita. In quanto agli altri quattro, e soprattutto per l'ultimo, esistono tuttora dei dubbj sulla loro realtà, dubbj che il tempo non tarderà a dissipare. L'osservazione dei primi due satelliti di Urano ha fatto conoscere parecchi fenomeni straordinarj, tra i quali ci contenteremo di citare quello solo che i piani delle loro orbite, in opposizione all'analogia osservata in tutto il sistema solare, sono quasi perpendicolari all'eclittica, perchè la loro inclinazione su questo piano è di 78° 58'.

Nè lo studio delle comete, nè quello del sistema solare preso nel suo insieme furono trascurati da Herschel: ma la parte della scienza astronomica che a lui deve maggiori avanzamenti è quella che concerne le stelle fisse. Non solamente l'ha egli arricchita di una moltitudine di fatti nuovi, ma ne ha esteso altresì i confini, e aprendovi nuove vie rese la speranza, che Bessel ha realizzata, di determinare la distanza di qualche stella. Le nebulose non erano state prima di lui che imperfettamente studiate, e nel poco che ne dicevano gli astronomi regnava la massima confusione. Herschel, per facilitare, regolarizzandole, le osservazioni, ha ripartito le nebulose in tre classi: 1° ammassi di stelle in cui le stelle possono essere facilmente distinte; 2° nebulose probabilmente risolubili in stelle distinte, se si accrescesse la forza dei telescopj; 3° nebulose propriamente dette, delle quali può congetturarsi che la nebulosità non possa risolversi in stelle. Col soccorso de' suoi telescopj, ne contò non meno di duemilacinquecento nella sola parte del cielo visibile a Londra, numero che senza essere il limite di tutte le nebulosità del firmamento supera immensamente quanto si conosceva fino allora, e quanto poteva immaginarsi: ei pubblicò il catalogo del primo migliajo nel 1786, quello del secondo tre anni dopo, e quello delle ultime cinquecento nel 1802. Nè contento di lasciare così dietro di sè i cataloghi di Evelio e di Messier, Herschel descrisse e determinò le forme diverse, e talvolta tanto singolari, delle nebulose, e con arte infinita ne seppe notare ora le differenze ora le somiglianze, le quali possono dare qualche luce sull'organizzazione di questi sistemi curiosi, sulle leggi che regolano la loro esistenza, sulla loro natura e forse sulla loro origine. E coronò poi i suoi lavori sulle nebulose con una moltitudine d'ingegnose osservazioni intorno alla loro distribuzione nella volta celeste, e colle più ingegnose ipotesi sulle loro diverse apparenze.

Contemporaneamente a tali ricerche, Herschel ne faceva altre che lo condussero anch'esse ad un catalogo. Fu questo il catalogo quadruplo delle intensità relative delle stelle. Lo scopo speciale di questa laboriosa serie di osservazioni fu quello di preparare agli astronomi, con fissare in qualche modo lo stato fotometrico del cielo in generale e di ciascuna costellazione e di ciascuna stella in particolare, il mezzo di confrontare le variazioni che può presentare questo stato col andare dei secoli. Da lungo tempo eransi già notate delle stelle periodiche: e a *Mira*, e o della Balena, studiata da Fabricio fino dal 1596, e i cangiamenti della quale vanno dalla estinzione assoluta fino alla rivivificazione la più compinta, eransi aggiunte successivamente la 34 del Leone, la ψ del Cigno, la x del Sagittario, ec.; e per altra parte sospettavasi che quelle stelle temporarie, che, come quella dell'anno 125 av. G. C. (al tempo d'Ipparco), del 389, del 945, del 1572-74, del 1604-05, e del 1670, sono comparse subitamente, ed hanno poi cessato di mostrarsi, fossero pure stelle periodiche, ma a periodi estremamente lunghi. Herschel ponendo mente a tutti questi fatti, e riflettendo che se un gran numero di stelle menzionate nei cataloghi antichi non si scorgono più oggigiorno nel luogo assegnato, ciò non può esser sempre per errore dei cataloghi, ma perchè gli astri realmente osservati hanno realmente abbandonato la parte visibile del cielo, comprese che indubitatamente tali sparizioni periodiche, notate di tempo in tempo dalla storia, non possono non essere assai frequenti e passare spesso inosservate anco per gli astronomi, che per altra parte una stella non cessa di mostrarsi istantaneamente, ma il suo splendore va gradatamente decrescendo dal grado massimo fino all'estinzione totale, e che finalmente tali fenomeni non sono un'eccezione, ma una conseguenza necessaria di leggi analoghe a quelle che l'uomo ha potuto rilevare studiando il proprio sistema: e osò presentire che conoscendo bene l'accrescimento e il decrescimento periodico dell'intensità di splendore di un numero sufficiente di astri periodici o temporarj, i dotti sarebbero più prossimi a conoscere que-

ste leggi. A tal fine Herschel formò il suo quadruplo catalogo delle stelle fisse, che può veramente dirsi il processo verbale dello stato fotometrico della parte del cielo visibile alla latitudine di Londra, e vi aggiunse un'ampia esposizione del metodo da lui seguito per determinare le intensità. Questo catalogo giovò allo stesso Herschel, perchè col suo soccorso sottoponendo a scrupolosa investigazione lo splendore delle stelle fisse potè scoprire la periodicità di molte di esse, e particolarmente della α di Ercole, che nel periodo di 60 giorni e 6 ore si presenta ora di terza grandezza ed ora di quarta.

Le stelle multiple, quelle cioè che vedute ad occhio nudo o in cannocchiali di forza mediocre sembrano uniche, ma che i telescopj fortissimi sciolgono in due o in tre stelle, richiamarono in modo speciale tutta l'attenzione di Herschel. Fino dal 1678, Cassini aveva indicato come tale la più settentrionale delle tre stelle della fronte dello Scorpione, e in seguito n'erano state vedute altre da Bianchini, da Grischow e da Lalande. Ma il numero n'era sempre ristrettissimo, e nessuno aveva studiato le circostanze di questi curiosi fenomeni, e meno ancora n'erano state cercate le conseguenze e le cause. Herschel fu dunque il primo che se n'occupò seriamente, fondando così un intero ramo dell'astronomia stellare, avanzandosi assai lungi in questa nuova carriera, e gettando colla vera impronta del genio le basi e il disegno del magnifico edifizio che oggi innalzano i suoi successori. Le stelle doppie son divenute al presente l'oggetto dei più belli studj e de' più bei lavori dei moderni astronomi; ma prima che tale impulso fosse dato, Herschel dovette esser quasi solo a esplorare questa nuova provincia. Ei cominciò dall'accrescere prodigiosamente il numero delle stelle doppie che si conoscevano, e ne formò un catalogo che comparve in due memorie (1781 e 1782) e che ne contava già quattrocento quarantacinque; in seguito ne scoperse altre fino a contarne più di cinquecento, numero che di recente è stato portato da Struve a 3057. Herschel si fermò specialmente sopra questa particolarità, che cioè le stelle componenti non sono della stessa grandezza. A questo fatto se ne collega un altro assai curioso: non solamente le stelle componenti differiscono in intensità, ma differiscono pure in colore: in generale, i loro colori respettivi sono complementarj; la grande è bianca, rossa o gialla, la piccola turchiniccia o verdastra. Proseguendo così in tutti gli aspetti l'esame particolarizzato, minuzioso, delle stelle doppie, e preoccupato soprattutto dall'idea di determinare una parallasse di stelle fisse, ebbe la fortuna di scoprire, invece di quella oscillazione annuale di una intorno all'altra, quale dovrebbe produrla il moto annuo della terra, un cangiamento regolare e progressivo, sempre nello stesso senso, ora nella distanza ora nell'angolo di posizione. Così questi gruppi binarj o ternarj non avevano per componenti delle stelle indipendenti poste a caso sopra due linee visuali vicinissime! Così la loro riunione non era un semplice effetto di projezione o di prospettiva!

Questo fatto immenso, ammirabile non meno per la sua semplicità che per la sua bellezza, che palesava sistemi di stelle, stelle esterne aggirantisi attorno a stelle centrali come i nostri pianeti o le comete intorno al sole, non poteva presentarsi dapprima che come un semplice sospetto; e avanti di confermarlo occorrevano numerose verificazioni fatte a lunghi intervalli, perchè se le piccole componenti erano dotate di movimento, questo movimento era sì lento che non poteva divenir sensibile che nel corso di parecchi anni. Finalmente nel 1803, dopo ventitrè anni di osservazioni, Herschel non ebbe più dubbj ed annunziò ai dotti che tra le stelle doppie esistono dei sistemi stellari composti almeno di due stelle che girano l'una intorno all'altra in orbite regolari, sistemi che possono dirsi binarj. Citò da cinquanta a sessanta esempj di cangiamenti più o meno notabili negli angoli di posizione delle stelle doppie, cangiamenti per la maggior parte

troppo regolarmente progressivi perchè potesse rimanere il più piccolo dubbio sulla loro vera natura. Assegnò ancora approssimativamente la durata delle rivoluzioni periodiche di alcune di esse: Castore, per esempio, percorre la sua orbita in 334 anni, γ della Vergine in 708, γ del Leone in 1200; al contrario, ξ dell' Orsa compie il suo giro in 58 anni, η della Corona in soli 43. Quest' ultima ha già compiuto un' intera rivoluzione dalla prima scoperta che ne fece Herschel, ed è inoltrata assai nella seconda; nè vi è più luogo a dubitare dell' esattezza dei sublimi risultati di Herschel. Tutte le osservazioni posteriori ne confermano giornalmente non solo l' idea madre, ma tutte le sue più minute particolarità. Gli astronomi al presente non contano meno di trenta o quaranta sistemi binarj indubitati, e quasi tutti, meno quelli scoperti in questi ultimi tempi, erano stati o calcolati o additati da Herschel. Non occorre certamente d' insistere sull' importanza di questa scoperta, la più grande che sia stata fatta nell' astronomia siderale, che ha trasformato finalmente antichi romanzi in certezza, che ha mostrato dei soli satelliti di soli, che ha reso in certo modo la natura più maestosa per l' uniformità e la costanza delle sue vie, e Newton più ammirabile. Ma i lavori dell' infaticabile annoveresi erano tanto al di sopra del tempo al quale parlava, che non venne nemmeno il pensiero di estenderli. Appena furono essi menzionati nei trattati di astronomia di quell' epoca, ed anco per non meno di venti anni sono stati messi in ridicolo dagli uomini di cui dovevano ecclissare la gloria. I progressi della scienza avevano preparato la strada nella quale Newton e Laplace si sono illustrati, ma le scoperte di Herschel non avevano nessuna connessione con quelle de' suoi predecessori: egli è il creatore di una scienza affatto nuova, di cui nessuno intraveduto aveva i prodigj.

Herschel è morto a Slough il 23 Agosto 1822 in età di 83 anni, senza infermità e senza dolori. Era presidente della Società astronomica di Londra, membro dell' Istituto di Francia, e astronomo reale. Gli scritti di quest' uomo straordinario consistono in 71 memorie, che sono tutte inserite nella celebre collezione conosciuta sotto il nome di *Transazioni filosofiche*, e della quale formano oggi il più bell' ornamento. L' elenco dettagliato delle medesime si troverà nell' *Analisi storica e critica della vita e dei lavori di Herschel*, pubblicata dal celebre Arago nell' *Annuario* dell' Ufizio delle Longitudini di Parigi pel 1842, ed alla quale rimandiamo il lettore per ulteriori notizie sul dotto astronomo soggetto di questo succinto articolo biografico.

HODIERNA (Giovan Batista), celebre astronomo siciliano, nato a Ragusi nel 1597. Dopo aver fatto gli studi ecclesiastici, fu provveduto dell' arcipretura di Palma, e da quell' istante divise il suo tempo nell' adempimento dei suoi doveri e nella cultura delle scienze e in particolare dell' astronomia. Abilissimo nella meccanica pratica, costrusse da sè stesso gli strumenti di cui ebbe bisogno. Verificò la posizione delle stelle fisse, e determinò quella di parecchie che non erano ancora state calcolate. La sua fama non tardò a diffondersi per tutta l' Italia, godè la stima di parecchi principi italiani, e morì a Palma il 6 Aprile 1660 compianto universalmente. Sono dovute a Hodierna non poche osservazioni in fisica e in storia naturale; e se non precesse Newton nell' esame della luce, è certo almeno che conobbe l' uso del prisma.

Le opere di Hodierna sono numerosissime: noi ci contenteremo di citare le più importanti: I *Universae facultatis directorium physico-theoricum*, *opus astronomicum*, *in quo de promissorum ad significatores progressionibus physice agitur*, Palermo, 1629, in-4; II *Thaumantiae miraculum*, *seu de causis quibus objecta singula per trigoni vitrei transpicuam substantiam visa*, *elegantissima colorum varietate ornata cernuntur*, ivi, 1652, in-4: è un trattato di ottica, nel quale per la prima volta si trova descritto il prisma e una parte

delle sue proprietà; III *Medicoeorum Ephemerides nunquam opud mortales editoe*, ivi, 1656, 4 parti in-4. Sono esse delle tavole dei satelliti di Giove che allora chiamavansi *Stelle medicee*. IV *De systemate orbis cometici, deque admirandis coeli characteribus*, ivi, 1656, in-4; V *Protei coelestis vertigines, seu Saturni systema*, ivi, 1657, in-4. Più estese notizie su questo dotto e sui suoi scritti si troveranno nella *Bibliotheca sicula* di Mongitore.

HOLLAND (Giorgio Gionata), geometra, nato nel 1742 a Rosenfeld, e morto a Stuttgard l'11 Aprile 1784, ha lasciato in tedesco: I *Trattati sulle matematiche, sui principj generali del disegno, e sui differenti metodi di calcolo*, Tubinga, 1764, in-8; II *Esposizione succinta del parallelogrammo di Newton*, ivi, 1765, in-4.

HOOKE (Roberto), celebre meccanico e matematico inglese, nacque nel 1635 a Frishwater nell' isola di Wight. Fino dalla sua infanzia dimostrò un ingegno particolare per la meccanica, poichè era ancor fanciullo quando costruì da sè solo un orologio di legno e un vascello guarnito de' suoi alberi e sartiame. Terminati i suoi studj ad Oxford, cominciò ad applicarsi all' astronomia. Narrasi che colpito dalla imperfezione dei pendoli, cagionata dalla diseguale azione dei pesi che loro servono di motori, immaginasse di applicare una molla al bilanciere per rimediare a tale diseguaglianza: checchè però ne dicano i suoi compatriotti, l'ingegnosa invenzione dello spirale che regola le oscillazioni negli orologi è interamente dovuta ad Huygens, che il primo fu a renderla nota al pubblico (*Vedi* Huygens *e* Hautefeuille). Lo spirito sospettoso e diffidente di Hooke lo trattenne dal divulgare non poche delle sue invenzioni, le quali poi si vide rapire da altri. Tentò di determinare la parallasse annua delle stelle fisse: fece parecchie osservazioni sopra Giove, sopra Saturno e sopra Marte, nel quale gli parve di riconoscere delle macchie mobili (*Vedi* Herschel). Esaminò i rapporti che esistono tra il numero delle vibrazioni delle corde e i diversi loro tuoni, immaginò un quadrante di riflessione, o settore, per osservare gli astri in mare non ostante il moto del vascello, strumento poi perfezionato da Newton (*Vedi* Hadley). Propose una misura universale tratta dalla lunghezza del pendolo, e trovò un modo di determinare le longitudini in mare. È pure a lui dovuto uno strumento universale per delineare ogni sorta di orolugj solari, un nuovo micrometro, un orologio barometrografo, uno strumento per misurare la piuggia, un altro per misurare la velocità del vento, un compasso per descrivere le spirali ed altre curve, una bilancia di proporzione, ec. ec. Troppo lungo sarebbe il volere anco semplicemente accennare tutte le invenzioni di questo dotto e le ingegnose sue idee sulla fisica, sulla chimica, sull' astronomia, sulla meccanica: non possiamo però passare sotto silenzio i suoi pensieri sulla gravitazione universale. In niun luogo, prima di Newton, questo principio è più chiaramente enunziato e più sviluppato che nell' opera di Hooke intitolata: *An attempt to prove the motion of the earth*, Londra, 1674, in-4. Ecco infatti in quali precisi termini si esprime su tale proposito questo geometra: » Io spiegherò un sistema del mondo differente per molti rap- » porti da tutti gli altri, e che è fondato sulle tre seguenti proposizioni:

» 1.° Che tutti i corpi celesti hanno non solo un' attrazione o una gravita- » zione sul loro proprio centro, ma si attraggono scambievolmente gli uni verso » gli altri dentro la loro sfera di attività.

» 2.° Che tutti i corpi che hanno un moto semplice e diretto continuerebbe- » ro a muoversi in linea retta, se qualche forza non gli facesse continuamente di- » vergere, e non gli costringesse a descrivere un circolo, un' ellisse o qualche » altra curva più composta.

» 3.° Che l' attrazione è tanto più potente, quanto è più vicino il corpo che » attrae.

A questo Hooke aggiungeva che rispetto alla legge secondo la quale agiva una tal forza, doveva questa esser l'oggetto di meditazioni e di ricerche particolari alle quali non aveva potuto ancora applicarsi, ma che la sua idea meritava di essere studiata e poteva divenire utilissima agli astronomi. Questo libro comparve nel 1674, vale a dire dodici anni prima della pubblicazione dei *Principj* di Newton. Del resto è noto che l'opinione la quale considera la gravità come un effetto dell'attrazione scambievole dei corpi è anteriore ai lavori di questo grand'uomo, e si trova chiarissimamente esposta in una lettera di Pascal e di Roberval a Fermat, in data del 16 Agosto 1638 (*Vedi* Newton). Hooke morì nel 1703. Egli era membro della Società Reale di Londra, e professore di geometria nel collegio di Gresham. Le opere sue principali, tutte in inglese, sono: I *Discorso intorno ad uno strumento inventato per fare delle osservazioni astronomiche più esatte*, Londra, 1661, in-4; II *Osservazioni sulla cometa del* 1664; III *Metodo per misurare la terra*, 1665; IV *Micrografia*, o *Descrizione fisiologica dei più piccoli corpi*, Londra, 1665-67, in-fol.; V *Trattato degli elioscopj*, ivi, 1676: egli vi fa la descrizione di un telescopio a riflessione; VI *Tentativo per provare il moto della terra*, 1674, tradotta in latino da Guglielmo Nicholson, Londra, 1679, in-4; VII *Opere postume*, Londra, 1705, in-fol., raccolta pubblicata da Riccardo Waller.

HOPITAL (Guglielmo Francesco Antonio di L'), uno dei geometri più distinti della fine del secolo XVII. Di buon'ora manifestò le più felici disposizioni per la scienza, in favor della quale rinunziò ad una brillante esistenza ed all'arringo delle armi in cui eransi illustrati i suoi antenati. Non aveva che quindici anni quando risolvette un problema di Pascal sulla cicloide, che era sembrato difficilissimo ai più abili geometri di quel tempo. Quando la debolezza della sua vista gli ebbe somministrato, alcuni anni più tardi, un motivo onorevola di lasciare le file dell'armata, il marchese di L'Hopital si diede interamente allo studio delle matematiche. Era poco tempo che il celebre Leibnitz aveva annunziato negli *Atti* di Lipsia l'esistenza di una nuova geometria colla quale si risolvevano quasi scherzando i più difficili problemi; ma i cenni che ne aveva dato erano così oscuri che appena i primi dotti potevano intenderli. Giovanni Bernoulli, colla forza del suo ingegno, ne aveva già penetrato tutta la profondità; e allorchè si recò a Parigi nel 1692, L'Hopital lo accolse nel modo il più lusinghiero e lo indusse a passare quattro mesi nella sua terra di Oucques presso Vendôme, perchè gli comunicasse tutti i segreti della nuova geometria, di quella geometria straordinaria e sublime che aveva portato negli elementi le parti più elevate delle antiche cognizioni. L'Hopital non tardò a far conoscere quali progressi avesse fatto sotto tanto maestro. Bernoulli, reduce a Groninga, ove insegnava le matematiche, propose nel 1693, nel giornale di Lipsia, di determinare la natura e di dare la costruzione di una curva tale, che la parte dell'asse delle ascisse, compresa tra il punto d'intersezione e la tangente, sia sempre in un dato rapporto colla tangente. L'Hopital risolse tale problema anche nell'ipotesi in cui la relazione costante fosse incommensurabile, e vi furono tre soli geometri in Europa che poterono unire la loro soluzioni alle sue, Giacomo Bernoulli, Huygens e Leibnitz.

Giovanni Bernoulli fece nel 1696 una nuova sfida ai geometri dell'Europa, e propose loro il problema della brachistocrona, o linea della più celere discesa, problema tanto singolare che veniva considerato un paradosso: imperocchè si trattava di trovare la linea cui deve percorrere un corpo per andare da un punto all'altro nel tempo il più breve, supponendo che tali punti non siano situati nella stessa verticale: si crederebbe che tale linea fosse la retta; ma la nuova geometria ha scoperto che siffatta linea è una curva (la cicloide). Giovanni Bernoulli

aveva dapprima accordato ai geometri d' Europa soltanto sei mesi per risolvere tale problema; prolungò poi il termine a dieci mesi, in capo ai quali si videro comparire quattro sole soluzioni, di cui gli autori erano Newton, Leibnitz, Giacomo Bernoulli e L' Hopital. Questi mostrò altresì una sagacità grande determinando la forma cui bisogna dare ad un corpo immerso in un fluido, perchè provi la minima resistenza. Newton aveva già proposto e risoluto questo problema nel suo libro dei *Principj* nella ipotesi che il solido dovesse esser di rivoluzione e dovesse moversi uniformemente, ma non avea fatto conoscere il metodo di cui erasi servito: L' Hopital giunse a scioglierlo nel caso medesimo assunto da Newton. Bouguer ed altri geometri hanno poi tratto a maggior generalità tale problema. L' Hopital però non divise con nessuno la gloria di avere sciolto nel tempo prescritto da Giovanni Bernoulli il problema cui questi aveva proposto, di trovare la curva di eguale pressione. Siffatto problema presentava difficoltà tanto maggiori in quanto che L' Hopital si vide costretto a trovare in via preliminare una teoria compiuta della forza centrifuga dalla quale dipende.

Ma il più bel titolo di gloria di L' Hopital è la sua *Analyse des infiniment petits*, Parigi, dalla Stamperia Reale, 1696, in-4. Niun' opera fu mai accolta dai dotti con tanta premura. Essa racchiudeva quella geometria misteriosa che prometteva tante maraviglie ai moderni, e colla quale si otteneva la soluzione di problemi che in tutta l' antichità formato avevano il cruccio dei geometri. Questo libro segnò l' epoca di una grande rivoluzione nella scienza. I matematici si affrettarono ad iniziarsi nel calcolo dell' infinito: alcuni soltanto, troppo ligi alle loro antiche abitudini, mossero dubbj sull' aggiustatezza della nuova geometria. Essa aveva questa particolarità che tutto sembrava contrassegnato dal suggello dell' evidenza, purchè si seguisse una certa sfera di idee: ma, allontanandosene, pareva che una moltitudine di contraddizioni si affacciassero alla mente. Da tale lato i detrattori de' nuovi metodi mossero le loro offese, e molte furono le dispute che si suscitarono; ma finalmente la verità trionfò, e d'Alembert nella Enciclopedia, e Lagrange nella sua Teoria e nel suo Calcolo delle funzioni hanno messo al coperto da qualunque attacco la metafisica del calcolo dell' infinito. L' Hopital sopravvisse poco alla pubblicazione della sua opera. Giovanni Bernoulli, che ne aveva veduta la voga con una segreta gelosia, cessò di dissimolare quando l' autore fu morto, ed incominciò dal criticare uno dei metodi più importanti dell' opera, quello cioè in cui si parla delle frazioni di cui i due termini svaniscono colla sostituzione di uno stesso valore della variabile. Provò che tale metodo, cui diceva proprietà sua, era insufficiente, e ne pubblicò uno altro assai più generale. Non fece poscia difficoltà di rivendicare successivamente tutte le altre scoperte importanti contenute nell' *Analisi degl' infinitamente piccoli*. I geometri francesi cercarono di ribattere tali tardive recriminazioni; ma non può negarsi che L' Hopital si approfittasse delle scoperte del Bernoulli, tostochè nella prefazione della sua opera così si esprimeva: » Riconosco di dover » molto ai lumi dei Bernoulli, e soprattutto a quelli del giovane, presentemente » professore a Groninga. Io mi sono valso a dirittura delle loro scoperte e di » quelle di Leibnitz. Per questo acconsento che ne rivendichino quanto piacerà » loro, contentandomi di quanto mi vorranno lasciare ». Ed è da riflettersi, insieme con lo storico Montucla, che solo i motivi di riconoscenza pel modo col quale era stato ricevuto a Parigi poterono soffocare le querele di Giovanni Bernoulli, il quale si contentò di farle in confidenza a Leibnitz, allorchè comparve l' opera di L' Hopital. Essa ha avuto parecchie edizioni; e sono stati pubblicati varj comenti sulla medesima da Crousaz, Varignon, Paulian, Lefèvre, ec.

L' Hopital si prefiggeva di far succedere a tale opera un trattato di calcolo integrale; ma Leibnitz avendogli scritto che stava componendo un' opera intitolata:

Dello scienza dell' infinito, il geometra francese abbandonò il suo pensiero, persuaso che un sì grande geometra avrebbe disimpegnato meglio di lui un assunto tanto importante; ma tale opera non è mai venuta alla luce. Stona, geometra inglese, volle supplirvi pubblicando un trattato di *Calcolo integrale*, che è stato tradotto in francese da Rondet nel 1735. Stone fa un uso frequente delle serie, ma negli esempj numerici d' integrazione cui dà, non parla delle costanti che debbono compire gl' integrali, il che è una sorgente di errori. Senza questo non avrebbe detto che l' integrale del rapporto del differenziale alla variabile e infinito. Un' opera postuma del marchese di L' Hopital ha godato di gran credito, ed è il suo *Troité onalytique des sections coniques*, pubblicato a Parigi nel 1707, in-4. S' ignorava allora l' arte di dedurre immediatamente tutte le proprietà delle sezioni couiche dall' equazione generale delle curve del secondo ordine, e non si conoscevano la formule eleganti della geometria analitica, mercè le quali si dimostrano in un modo sì appagante tutte le proprietà di tale curve. Il *Trattoto delle sezioni coniche* non può dunque esser considerato per opera eccellente che riguardo al tempo in cui venne alla luce, quantunque anco adesso possa esser consultato con frutto. Questo dotto morì il 2 Febbrajo 1704 a Parigi, ove era nato nel 1661.

HOROLOGIUS. *Vedi* Dondi.

HORREBOW (Pietro), celebre astronomo danese, nato nel 1679, mostrò fino dall' infanzia molta inclinazione per le scienze. Dopo essersi dottorato in medicina cominciò a frequentare le lezioni di Olao Roemer, valente matematico, e si applicò interamente all' astronomia. Nel 1710 successe a Roemer nella cattedra che questi aveva nell' università di Copenaghen, e la occupò con lustro per oltre trent' anni: renunziò tale ufizio in favore di suo figlio Cristiano, passò poi a professare la fisica, e morì il 15 Aprile 1764 in età assai avanzata. Le sue opere sono: I *Determinotio apparentis diometri soloris*, negli *Acto Erudit. Lips.* nel Febbrajo 1717; II *Clavis astronomiae, seu astronomiae pars physico*, Copenaghen, 1725, in-4; III *Copernicus triumphons, sive de parolloxi orbis annui troctotus epistoloris*, ivi, 1727, in-4. L' autore vi dà una nuova dimostrazione del moto della terra per la parallasse annua delle stelle fisse; IV *Atrium astronomioe, sive troctatus de inveniendis refractionibus, obliquitote ecliptione atque elevotione poli. Schediasmo de orte interpolandi*, ivi, 1732, in-4; V *Bosis astronomioe, sive astronomioe pars mechonico*, ivi, 1735, in-4. È una continuazione dell' opera precedente. VI *Consilium de novo methodo pascholi nd perfectum stotum perducendo, ac deinceps omnibus christianis commendondo*, ivi, 1738, in-4; VII *Elemento philosophiae naturolis*, ivi, 1748, in-4. Le opere di Pietro Horrebow sono state raccolte e pubblicate a Copenaghen, 1740-41, 3 vol. in-4. Tale raccolta è molto stimata.

HORREBOW (Cristiano), figlio del precedente, morto nel 1776 in età di anni cinquantotto, ha pubblicato un trattato di trigonometria sferica in latino, e parecchie memorie delle quali citeremo soltanto: I *Repetita poralloxeos orbis onnui demonstrotio ex observotionibus ann.* 1742 *et* 1743 *deducto*, Copenaghen, 1744, in-4; II *De parolloxi fixarum onnuo et rectascensionibus quam post Roemerum et Parentem demonstrat auctor*, ivi, 1747, in-4.

HORROX (Geremia), astronomo inglese, nacque verso il 1619 a Toxteth, nella contea di Lancastre, da genitori poco agiati, ma che si assoggettarono alle più dure privazioni per fargli fare i suoi studj. Inviato a Cambridge, attese con passione alla fisica e alle matematiche, e al suo ritorno in famiglia, in età di quattordici anni, si diede allo studio dell' astronomia, senza maestro, e quasi senz' altro libro che i *Progymnasmato* di Lansberg, che per accidente erangli capitati nelle mani. Malgrado la sua penetrazione naturale, eragli impossibile di ri-

conoscere gli errori di quella guida ingannatrice, e da ultimo si sarebbe smarrito sulle sue tracce, ove non avesse avuto la fortuna di legare amicizia con Guglielmo Crabtree, giovine dell'età sua, e che coltivava esso pure l'astronomia. Questi gli prestò le opere di Ticone Brahé e di Kepler, di cui la lettura ingrandì le sue idee e le rettificò. Potè quindi procurarsi alcuni strumenti, e il primo uso che ne fece gli servì a rettificare la teoria della luna proposta da Kepler. Ma egli si è reso specialmente celebre per la prima osservazione che sia stata fatta del passaggio di Venere sul disco del sole, che accadde il 4 Dicembre 1639. Tale osservazione è stata in seguito di un gran vantaggio per l'astronomia. Ne scrisse un ragguaglio in un eccellente trattato intitolato: *Venus in sole visa*, che non ebbe il piacere di veder pubblicare, perchè morì improvvisamente il 3 Gennajo 1641, dopo avervi dato l'ultima mano: allora aveva egli soltanto ventidue anni, il che deve far riuscire ancora più lacrimevole la sua perdita. Evelio avendo ricevuto da Huygens una copia dell'opera di Horrox, la fece stampare in seguito al suo *Mercurius in sole visus*, Danzica, 1662, in-fol. (*Vedi* Evelio). Il dott. Wallis, divenuto possessore degli altri suoi scritti, li pubblicò nel 1672, in-4, a Londra col titolo: *Horoccii Opera postuma*. La stessa edizione ricomparve, con nuovi frontespizj, nel 1673 e 1678. Tale raccolta contiene la difesa di Kepler contro le impugnazioni di Lansberg; il carteggio di Horrox con Crabtree e le loro osservazioni; la teoria della luna rettificata, ed il calcolo dei movimenti lunari fatto da Flamsteed secondo tale teoria (*Vedi* Flamsteed). Crabtree morì anch'esso sul fiore dell'età nelle guerre civili che allora desolavano l'Inghilterra.

HORSBURGH (Giacomo), rinomato idrografo inglese, nacque nel 1762 a Elin in Scozia. I suoi genitori, in uno stato prossimo alla povertà, non poterono dargli che una meschina istruzione; ma le buone sue disposizioni supplirono a quanto avea gli negato la sorte. Di sedici anni salì sopra un vascello, e fino al 1805 la sua vita fu interamente occupata in continui viaggi nei mari delle Indie sopra bastimenti mercantili: in questo tempo trovò mezzo di perfezionarsi nell'astronomia nautica e nella idrografia, e le carte e le osservazioni da lui pubblicate avendogli acquistata grande reputazione, fu nel 1806 ricevuto membro nella Società Reale di Londra: nel 1809, alla morte di Dalrymple, fu nominato idrografo della compagnia delle Indie. Egli morì il 14 Aprile 1836. L'opera sua principale, quella che gli assicura un posto eminente tra i primi idrografi moderni, è il suo *Portolano per la navigazione delle Indie Orientali, della China, della Nuova Olanda, del Capo di Buona Speranza e dei porti intermedj*, Londra, 1809-11, 2 vol. in-4; e ivi, 1836, 2 vol. in-4 con atlante in-fol. 4ª ediz. Questo lavoro inestimabile, che fa autorità e serve presentemente di guida a tutti i navigatori delle Indie, è stato tradotto in francese da Le Prédour, capitano di fregata, con questo titolo: *Instructions nautiques sur les mers de l'Inde*, Parigi, 1836-39, 5 vol. in-8.

HORSLEY (Samuele), dotto prelato e geometra inglese, nato nel 1733, dopo aver fatto i suoi studj a Cambridge, si recò ad Oxford, ove pubblicò nel 1770 il ristabilimento da lui fatto dei due libri delle *Inclinazioni* di Apollonio. Divenuto nel 1767 membro, e nel 1773 segretario, della Società Reale di Londra, arricchì di parecchie belle memorie le *Transazioni filosofiche*. Nel 1783 si fece osservare pel calore col quale sostenne gl'interessi di quella società, opponendosi al presidente Banks che voleva esercitarvi una specie di dittatura. Poco dopo se ne ritirò affatto nella occasione che vi fu ammesso un eminente dignitario, ammissione ch'ei disapprovava altamente: egli fece il suo addio in questi termini: » Io abbandono questo tempio, ove una volta presedeva la filosofia, ed ove fu » Newton il suo ministro ». Morì a Brighton il 4 Ottobre 1806. Le più importanti

delle numerose sue produzioni sono: I Un' edizione delle *Opere d' Isacco Newton*, 1779-85, 5 vol. in-4. Tale edizione, che è arricchita di pregiabile comento, è molto stimata; II *Apollonii Pergaei Inclinationum libri duo*, Oxford, 1770, in-4; III *Euclidis Elementorum libri priores XII ex Commandini et Gregorii versionibus latinis*, ivi, 1802, in-8; IV *Euclidis Datorum liber cum additamentis nec non tractatus alii ad geometriam pertinentes*, ivi, 1803, in-8; V *De Polygonis Area vel Perimetro*, ivi, 1775, in-4.

HOSSFELD (Giovanni Guglielmo), dotto geometra tedesco, nato nel 1768 a Oepfershausen, e morto nel 1837 a Dreyssigacker, ove era professore di matematiche. I suoi scritti principali sono: I *Trattato dell' anello di Saturno*; memoria coronata dall' Accademia delle Scienze di Copenhagen; II *Corso completo di matematiche elementari per tutte le condizioni*, Gotha, 1818-25, 4 vol. in-8; III *Elementi di stereometria*, ivi, 1812.

HOSTE (Paolo L'), gesuita e matematico francese, nato nel 1652 a Pont-de-Vesle nella Bresse, attese specialmente all' arte di costruire i vascelli. Era professore reale di matematiche alla scuola di Tolone, quando morì il 25 Febbrajo 1700. Ha lasciato: I *Recueil des traités de mathématiques les plus nécessaires à un officier*, Parigi, 1692, 3 vol, in-12; II *L'art des armées navales avec le traité de la construction des vaisseaux*, Lione, 1697, in-fol.; e ivi, 1727, 2 vol. in-fol., ediz. aumentata. Opera assai stimata, e che oltre gli eccellenti precetti teorici che vi sono esposti contiene una buona storia della marineria francese nel secolo XVII.

HUDDE (Giovanni), nato in Amsterdam nel 1640 e morto nel 1704, deve essere annoverato tra i buoni matematici del suo tempo, quantunque, occupato continuamente nei pubblici affari della sua patria, non abbia potuto attendere alla composizione di opere importanti. Francesco Van Schooten, professore di matematiche a Leida, pubblicò nel 1659, due opuscoli di Hudde col titolo di *Epistola prima, De reductione aequationum*; — *Epistola secunda*, *De maximis et minimis*, in seguito alla *Geometria* di Cartesio, edizione di Amsterdam di detto anno, tom. I, pag 407-516. Il *Giornale letterario*, Luglio e Agosto del 1713, inserì un sunto di una lettera di Hudde sul metodo delle tangenti. Questi tre opuscoli formavano parte di un trattato: *De natura, reductione, determinatione, resolutione, atque inventione aequationum*, cui già verso il 1660 Hudde si era proposto di dare in luce. La filosofia di Cartesio ebbe in lui uno de' primi suoi promotori in Olanda. Era pure profondo nell'economia politica, per quanto poteva permetterlo lo stato di questa scienza nel tempo in cui viveva; ed applicò con molto talento la scienza del calcolo alla teoria delle assicurazioni, a quella delle rendite vitalizie, e alla determinazione delle probabilità della durata della vita umana. Leibnitz in questo rapporto gli rese piena giustizia, e il professore Van Swinden ne diede un giudizio non meno lusinghiero. Niccola Witsen, nel suo *Trattato della costruzione dei vascelli*, pubblicò degli utili calcoli di Hudde sulla stazzatura de' navigli. Rincresce che nessuno degli scritti cui lasciò sia stato pubblicato.

HUTTON (Carlo), matematico inglese, nato a Newcastle il 14 Agosto 1737. Suo padre, ispettore delle miniere, avendolo destinato alla stessa sua professione, volle che allo studio della lingua inglese e della latina accoppiasse quello delle scienze esatte. E quantunque tale educazione non venisse data che in un villaggio, lo zelo e l' ottima disposizione del giovinetto supplirono all' imperfezione del suo maestro, al quale successe non avendo ancora che diciotto anni. Ben presto la sua scuola di matematiche nel villaggio di Jesmond acquistò un certo nome. Ed egli non limitandosi al circolo ristretto delle materie del suo insegnamento s' innoltrò nel vasto campo delle matematiche sublimi, lesse le più notabili pro-

duzioni che la scienza deve alle nazioni antiche e moderne, e famigliarizzandosi così coi principj e colle teorie feee un corso di storia delle matematiche. In quel tempo solevano proporsi in alcuni giornali inglesi dei problemi di matematiche: Hutton cominciò a farsi conoscere al mondo dotto con varie soluzioni al sommo ingegnose ch' ei ne diede. La sua fama a mano a mano estendendosi, fu incaricato nel 1771 dal magistrato di Newcastle di levare la pianta della città e della contea. Nell' anno seguente ottenne in concorrenza di altri nove competitori la cattedra di matematiche nell' accademia militare di Woolwich. Alcuni anni dopo (1776) divenuto membro della Società Reale di Londra, vi adempì dal 1779 al 1783 le funzioni di segretario, finchè la specie di lega che formossi nel seno di quell' accademia contro i matematici non determinò i Maskelyoe, gli Horsley e i loro amici ad allontanarsene. In questo breve periodo avea però letto nelle pubbliche adunanze parecchie memorie importanti. Quantunque dotato dalla natura di un temperamento robustissimo e di una grande attività di spirito, Hutton inoltrandosi negli anni dove successivamente dimettersi dai molti impieghi che dal governo gli erano stati affidati, e morì in età di ottantasei anni il 27 Gennajo 1823.

Ecco l' elenco delle principali sue opere, scritte tutte in inglese: I *Trattati di matematiche e di fisica*, 1786, in-4. Gli articoli più notabili di questo volume sono una dissertazione sulla natura e sul valore delle serie infinite; un nuovo metodo per la valutazione delle serie numeriche infinite, i cui termini sono alternativamente positivi e negativi; un altro metodo per sommare le serie che convergono lentamente; una dimostrazione del teorema del binomio nel caso dell' esponente frazionario; un' esposizione di alcune proprietà curiose delle sezioni comuni del cono e della sfera; la divisione geometrica del circolo e dell' ellisse in un numero di parti eguali tanto in superficie che in perimetro; II *Trattati su diversi soggetti di matematiche e di fisica*, Londra, 1812, 3 vol. in-8; tra i diversi opuscoli interessanti contenuti in questa raccolta si nota un saggio storico delle scoperte fatte in algebra. III Diverse *Memorie* nelle *Transazioni filosofiche*, di cui le principali sono: 1° *Nuovo metodo generale per trovare delle serie convergenti semplici e che convergano rapidamente*, 1779. Il metodo di Hutton è preferibile a quelli di Maclaurin, di Eulero e di Simson in quanto che è più generale, abbraccia tutte le loro serie, e ne somministra inoltre un gran numero di rapida convergenza; 2° *Calcoli tratti dalle osservazioni fatte e misure prese sul monte Shichallin nella contea di Perth per ottenere la densità media della terra*, 1778. Le osservazioni astronomiche erano state fatte sotto la direzione di Maskelyne, che lasciò ad Hutton la gloria di eseguire i laboriosissimi calcoli necessarj per trovare la densità della terra. La cifra trovata fu di 4,5, prendendo per unità la densità dell' acqua: in seguito però avendo avuto da Playfair dei dati geologici più esatti, trovò per l' incognita cercata 4,95. Fu a motivo di questo suo lavoro che nel 1819 e 1820 entrò in corrispondenza col celebre Laplace per reclamare contro l' omissione del suo nome sulla lista dei matematici che avevano tentato di calcolare la densità della terra, ed ebbe la sodisfazione di vedere Laplace, nella *Connaissance des temps* pel 1823, render giustizia al sapere e al talento da lui spiegato in quel difficile problema. Nel 1821 prese pure a verificare i calcoli di Cavendish sullo stesso argomento, e in una nota inviata alla Società di Londra e stampata nelle *Transazioni filosofiche* del 1821 rilevò alcuni errori di quel fisico; 3° *Sulle equazioni cubiche e sulle serie infinite*: memoria piena di vedute originali e importanti; IV *Dizionario delle scienze matematiche e fisiche*, Londra, 1796, 2 vol. in-4; e ivi, con grandi aggiunte, 1815, 2 vol. in-4; opera di molto pregio. V *Nuovo corso di matematiche ad uso dei cadetti dell' Accademia militare di Wool-*

wich, Londra, 1798, 2 vol. in-8. Trattato classico in Inghilterra, ove ha avuto moltissime edizioni. VI *Trattato teorico e pratico di agrimensura*, Newcastle, 1770, in-4. Questo trattato, uno dei più compiuti che si conoscano, contiene una moltitudine di metodi per determinare le altezze e le distanze, per la misura delle figure rettilinee e curvilinee, dei prismi, delle piramidi, della sfera, per la rettificazione, quadratura e cubatura delle sezioni coniche, ec. VII *Elementi delle sezioni coniche, seguiti da una scelta di esercizj matematici e fisici*, Londra, 1787, in-8; VIII *Principj della costruzione dei ponti*, Newcastle, 1772, in-8. Sono dovute pure ad Hutton parecchie *Tavole matematiche* importanti, delle traduzioni e delle edizioni accurate di opere scientifiche.

HUYGENS DE ZUYLICHEM (Cristiano). Uopo sarebbe di abbracciare la storia tutta della scienza nel brillante periodo del secolo XVII per poter presentar qui un'analisi, anco succinta, della lunga serie delle invenzioni e delle produzioni dovute all'ingegno straordinario che ha reso questo nome tanto celebre e tanto illustre. In un gran numero di articoli di questo Dizionario abbiamo avuto già l'occasione, che si presenterà di sovente anco in seguito, di rammentare i suoi lavori, di esporre le sue teorie, di citare le sue opinioni; non ci resta dunque che a far conoscere le particolarità principali di una vita sì rimarchevole e sì intimamente connessa con tutti i progressi che si sono effettuati in tutti i rami del sapere umano, all'epoca in cui ha fatto la sua comparsa sulla scena di questo mondo.

Huygens nacque all'Aja il 14 Aprile 1629. Suo padre, Costantino Huygens, segretario e consigliere dei principi di Orange, che ha percorso una carriera onorata nelle più alte funzioni pubbliche e nelle lettere, conobbe per tempo il suo ingegno e volle essere il suo primo precettore. Il giovine Huygens palesò specialmente disposizioni straordinarie per le scienze esatte; e i migliori maestri furono incaricati di svilupparle. Studiò successivamente a Leida e a Breda, e i primi suoi saggi attirarono l'attenzione del sommo Cartesio, che fin d'allora pronunziò su questo giovane un giudizio di cui ha egli realizzato tutte le previsioni e che la posterità ha confermato.

Nel 1651, Huygens pubblicò a Leida la prima sua opera intitolata: *Teoremi sulla quadratura dell'iperbolo, dell'ellisse e del circolo, supponendo dato il centro di gravità di certe delle loro parti*, nella quale inserì una critica dell'opera del padre Gregorio da San Vincenzo (*Vedi* Gregorio) sullo stesso argomento. Poco tempo dopo pubblicò nella stessa città le sue *Scoperte sulla grandezza del circolo*. Queste due opere erano piene della più bella geometria; vi si scopriva tra le proprietà del circolo e dell'iperbola analogie curiose e singolari; e tutto annunziava un ingegno elevato e di grande speranza. Ritornato dal suo primo viaggio in Francia, cioè verso il 1655, cominciò ad occuparsi dell'arte di formare e di lavorare le lenti dei grandi canocchiali. Giunse a costruire un objettivo di dodici piedi di fuoco, e col soccorso di questo strumento scoprì un satellite di Saturno, che è il sesto a contare dal pianeta: ma non fu che alcuni anni dopo che perfezionando il suo telescopio potè portare a compimento la sua scoperta della costituzione singolare di quell'astro. Verso la stessa epoca, nel 1657, inviò a Schooten, suo antico maestro, l'opera che scritta aveva di recente, in lingua olandese, sull'applicazione del calcolo ai giuochi d'azzardo, e che era il primo trattato su tale teoria nuova, dovuta a Pascal e a Fermat, ma che esisteva allora soltanto nel loro dotto carteggio. Dopo una breve prefazione, in cui l'autore riconosce la priorità dei due geometri francesi, pone in 14 proposizioni le fondamenta dei suoi proprj metodi; ne deduce, tra le altre, le soluzioni dei quesiti già trattati, e termina con cinque problemi non poco difficili, cui

risolve senza dichiarare le sue dimostrazioni. Tale scritto, veramente originale, unisce tanta concisione a tanta eleganza, che un mezzo secolo dopo, Giacomo Bernoulli tenne di non poter far meglio che di collocarlo come introduzione alla sua *Ars conjectandi*, corredandolo di un comento non poco esteso. Tale fatto basta per l'elogio dell'opera, la quale comparve altronde tradotta in latino da Schooten col titolo, *De ratiociniis in ludo aleae*, in fine alle sue *Exercitationes mathematicae*, Leida, 1657, in-4. Non era questa la prima volta che quel geometra arricchiva i suoi scritti dei frutti dell'ingegno di Huygens: già nel 1649, nella sua eccellente edizione della *Geometria* di Cartesio, cui aveva commentata, aveva inserito varie note del suo allievo.

In pari tempo Huygens comunicava a Schooten la rettificazione della parabola cubica, supponendo data la quadratura dell'iperbola; a Wallis la misura dell'area totale della cissoide; a Sluze la valutazione della superficie curva della conoide parabolica, la quantità dipendenti dalla quadratura del circolo; a Pascal una determinazione simile per la conoide iperbolica, per le sferoidi in generale, e per la quadratura di una porzione della cicloide. Ma tali studj di pura teoria non rallentavano lo zelo che spingeva un sì ardente ingegno a proseguire resultati di vero pregio per la società. Galileo, meditando sull'isocronismo delle oscillazioni del pendolo, aveva intraveduta tutta l'importanza della sua applicazione agli orologi; ma era morto senza che fosse riuscito ad effettuarla. Nel 1657, Huygens ebbe la gloria di pubblicare tale scoperta, sì grande nella storia dell'astronomia e della fisica. Prima di lui, e conformemente alle idee di Galileo, uopo vi era di una persona sempre attenta a dare la scossa ad un peso sospeso per una corda, e a contare esattamente tutte le vibrazioni cui procurava di rendere eguali in estensione; mentre, pel moto eguale e continuo del suo orologio, Huygens risparmiava agli astronomi tale fatica, e arricchiva la scienza di una macchina atta a misurare i menomi intervalli di tempo, regolare nel suo andamento, e suscettiva di una perfezione indefinita. L'idea di applicare tali orologi alla ricerca delle longitudini non poteva sfuggirgli; quindi non tardò a pubblicare un'*Istruzione*, in olandese, destinata a far conoscere tale uso; e la speranza di condurre siffatto metodo ad una compiuta esattezza, anche in mare, lo tenne occupato, dicesi, tutta la sua vita. Nel 1659, essendo venuto a capo di costruire un objettivo di ventidue piedi di fuoco ed avendovi adattato una combinazione di due oculari, fu in grado di determinare con maggior precisione le sue prime osservazioni sopra Saturno, e pubblicò il *Sistema* di questo pianeta. Le apparenze singolari cui tale astro presenta si erano affacciate a Galileo da gran numero di anni; ma il debole effetto del suo canocchiale, che ampliava solo trenta volte gli oggetti, non gli permise di scoprirne la vera natura. Huygens col nuovo suo telescopio, che ingrossava l'oggetto fino a cento volte, si accertò che erano il resultato di un anello sottilissimo che attorniava Saturno, e di cui le posizioni diverse, rispetto alla terra che lo riguarda o al sole che l'illumina, alteravano considerabilmente la sua forma apparente, a tale da farlo talvolta sparire del tutto. Un diligente studio di tali fenomeni gliene fece conoscere sì bene la chiave, che pubblicando la loro spiegazione osò predire una sparizione dell'anello per l'anno 1671; e dodici anni dopo gli astronomi poterono applaudire alla sua felice arditezza. Il suo *Sistema di Saturno* racchiudeva inoltre varie altre osservazioni non meno nuove che interessanti; quelle, per esempio, della nebulosa di Orione, e delle fasce che solcano i dischi di Giove e di Marte; e l'importanta asserzione che le stelle fisse non hanno diametro apparente. Conteneva infine la descriziona dell'ingegnoso metodo usato dall'autore per misurare i diametri dei pianeti.

A quell'epoca, la gloria e la celebrità di Huygens, appoggiate a questi e a tanti

altri lavori di cui non possiamo dar qui che un'esposizione incompleta, non avevano rivali nel mondo. Ei trovavasi pressochè solo in questo nobile arringo in cui Keplero, Galileo, Cartesio e Fermat avevano cessato di brillare, e in cui Newton e Leibnitz non erano per anco entrati. Dal 1660 al 1663 quest'uomo grande viaggiò in Inghilterra e in Francia, e spiegò in questi due paesi le brillanti teorie delle quali era giunto al possesso. Vi fu accolto con quell'entusiasmo che dovunque ispirano i talenti e l'ingegno, e divenne membro della Società Reale delle Scienze di Londra, e dell'Accademia Reale delle Scienze di Parigi. Luigi XIV e il suo ministro Colbert, gelosi della gloria che i lavori di un tant'uomo potevano dare alla nascente Accademia, nulla trascurarono per legarlo più intimamente alla Francia. Tocco più dalla benevolenza che dalla munificenza reale colla quale fu accolto, Huygens venne a stabilirsi a Parigi. Quivi pubblicò i suoi Trattati sulla diottrica e sul moto resultante dalla percussione, e quivi perfezionò e raccolse le sue più belle scoperte nel suo *Horologium oscillatorium*. Questa grand'opera fu pubblicata a Parigi nel 1673, e non è certamente un'esagerazione il dire che se si eccettuano i soli *Principj* di Newton, è dessa la più bella produzione delle scienze esatte del secolo XVII. Il suo piano era per verità semplice assai, poichè non consisteva che nella descrizione compiuta degli orologi a pendolo, e nell'esposizione delle leggi del movimento dei pendoli semplici e composti; ma era stato uopo di creare diverse teorie importanti per la sua esecuzione, quelle cioè della curva tautocrona, delle evolute, e dei centri di oscillazione: per la prima volta vi si trovava fatto uso del gran principio della dinamica, quello della conservazione delle forze vive: la misura della forza acceleratrice della gravità vi si deduceva dalla lunghezza del pendolo a secondi e dalla durata delle sue vibrazioni, e reciprocamente; vi si trovavano alla fine, e come in appendice a tante scoperte, tredici teoremi sulla forza centrifuga nel movimento circolare, presentati senza dimostrazione. Se egli avesse applicato tali teoremi alle rotazioni della terra sul suo asse e della luna intorno alla terra, avrebbe scoperto la legge della forza che tiene quest'astro nella sua orbita; se gli avesse in seguito combinati colle sue ingegnose ricerche sulle evolute, avrebbe potuto determinare le leggi delle forze centrali in una curva qualunque; poteva, primo, dedurre a *priori* le famose leggi di Keplero . . . ; ma tali ravvicinamenti gli sfuggirono, ed altri colse una palma cui poca fatica sarebbe costata ad Huygens il conseguire. Noi siamo costretti a passare sotto silenzio un gran numero di lavori e di scoperte delle quali arricchì in quell'epoca le teorie della scienza: il suo perfezionamento non era però il solo oggetto delle sue meditazioni; ei mirava pure a trarne dei resultati pratici di un'utilità generale. A tal fine appunto applicò agli orologi da tasca la teoria del pendolo, adattandovi la molla spirale per regolare le oscillazioni del bilanciere.

Tante fatiche avevano sensibilmente alterata la salute di questo grand'uomo. Più volte aveva già voluto cercare il riposo e la solitudine nella sua patria, e cedendo sempre alle pressanti sollecitudini di cui era l'oggetto aveva acconsentito a tornare a Parigi: ma nel 1681 eseguì definitivamente il progetto da lunga pezza concepito di ritirarsi in Olanda, ove lo richiamavano l'interesse della sua salute e i legami di famiglia che furono sempre potentissimi sul suo cuore. Ma egli non aveva però abbandonato la Francia senza lasciarvi nuove tracce del suo ingegno sì potente e sì universale. Egli aveva perfezionato la costruzione del barometro, inventato un livello a canocchiale di una facile verificazione, cercata la dimostrazione rigorosa dei principj della statica, e dell'equilibrio della leva e dei poligoni funicolari.

Il ritiro di Huygens non fu per la sua parte un addio alla scienza e alle ricerche delle sue applicazioni di utilità: i lavori di quest'ultimo periodo della

sua vita non sono nè meno importanti nè meno notabili di quelli che fino allora avevano illustrato la sua corsa. Costrusse in quell' epoca un automa planatario per rappresentare i movimenti reali dei corpi planetarii. Lavorando intorno a questo ingegnoso meccanismo, entrò nella via d'una delle sue più belle scoperta, quella dell' uso delle frazioni continue, che erano state considerate già da Bronuker e da Wallis, senza che questi geometri avessero nemmen sospettato le loro principali proprietà. Volendo riuscire a rappresentare esattamente i movimenti e i periodi dei pianeti, siccome non si possono adoperare ruote di cui i numeri dei denti siano precisamente nelle stesse relazioni che tali periodi, de' quali l'esatta aspressione si fa soltanto mediante grandissimi numeri, bisogna contentarsi di un' approssimazione. La difficoltà consiste dunque nel trovare relazioni espresse in numeri minori, i quali si avvicinino per quanto è possibile alla verità, e più che non potrebbero fare altre relazioni qualunque che non fossero concepite in termini maggiori. Tale fu il problema che Huygens risolse col mezzo delle frazioni continue, additando il modo di formarle per divisioni continue; e dimostrò in seguito le principali proprietà delle frazioni convergenti che ne risultano, senza dimenticare nemmeno le frazioni *intermedie*. Verso lo stesso tempo riprese le sue ricerche sull'ottica: costrusse due grandi lenti, l'una di cento settanta e l'altra di dugento dieci piedi di distanza focale, delle quali fece dono alla Società Reale di Londra. E siccome un canocchiale di tal dimensione non sarebbe stato nè facile a costruire, nè comodo a maneggiarsi, propose di alzare in aria l'obiettivo solo, sopprimendo il tubo; l'osservatore si collocava allora al fuoco, tenendo in mano l'oculare conveniente, e mutava sito secondo che il moto dell'astro traslocava il fuoco dei raggi. Tale modo di osservare fu messo in pratica non ostante i gravi inconvenienti che gli sono inseparabili; ma in seguito fu abbandonato affatto quando l'uso dei telescopj a reflessione permise di fare a meno di que' canocchiali smisurati. Poco dopo, per farsi un' idea approssimativa della distanza delle stelle, immaginò di costruire un canocchiale per cui il diametro apparente del sole era ridotto a quello di Sirio, la più luminosa delle fisse. Trovò in tal guisa che siffatto diametro ridotto era 27664 volte più piccolo del diametro apparente, donde seguiva che se la grossezza di Sirio è almeno eguale a quella del sole, la sua distanza dalla terra è almeno 27664 volte più grande. Le recenti osservazioni di Bessel, hanno peraltro condotto a resultati assai più soddisfacenti. *Vedi* DISTANZA DELLE STELLE FISSE.

Mentre tali ricerche sull' ottica tenevano assorta l'attenzione di Huygens, una gran rivoluzione preparavasi nella scienza: Leibnitz pubblicava la scoperta del *Calcolo differenziale*, e Newton il libro dei *Principj*. Huygens passò in Inghilterra per conoscere personalmente l'autore di quest' ultima opera. Ei conosceva da lungo tempo Leibnitz, di cui aveva incoraggito i primi saggi, ma dobbiamo dire che non rese immediatamente giustizia all'importanza grande della sua scoperta. Leibnitz, per risvegliare la curiosità dei geometri e fermare l'attenzione loro sul nuovo calcolo, aveva loro proposto, negli *Atti* di Lipsia, la ricerca della curva isocrona, della curva cioè che descriver deve un corpo pesante per allontanarsi o avvicinarsi egualmente, in tempi eguali, ad un piano orizzontale: Huygens giudicò il problema degno di essere studiato; ma senza darsi la briga d'internarsi nel nuovo metodo, risolse il quesito con quelli dei quali si era valso tanto fino allora. Al suo ritorno in Olanda, nel 1690, pubblicò a Leida in francese due dei suoi scritti i più degni dell' ammirazione della posterità, cioè il *Trattato della luce* e il *Discorso sulla cagione del peso*, cui terminano alcune belle ricerche sullo schiacciamento e sulla figura della terra, e varj teoremi curiosi sulla logaritmica e sugli spazj e sui solidi che essa genera. Le proprietà di tale curva gli avevano servito a determinare il movimento dei corpi in un

mezzo resistente; ma non pubblicava che i risultati: le loro dimostrazioni, alla foggia degli antichi, sono state in seguito supplite dal celebre geometra italiano Guido Grandi (*Vedi* GRANDI), e formano da sè sole una voluminosa opera che si trova in seguito all'edizione latina degli stessi trattati. Per giungere alla conoscenza e alla determinazione della figura della terra, Huygens si parte dall'accorciamento del pendolo osservato da Richer presso l'equatore; e tale fatto gli prova che la gravità vi è diminuita dalla forza centrifuga: scopre in seguito che la combinazione di questa forza che varia colla latitudine, e della sfericità della terra, non lascerebbe ai gravi una tendenza perpendicolare alla superficie del globo; e ne inferisce che avendo essi, pel fatto, tale direzione, la terra è necessariamente schiacciata verso i poli. Calcola dopo questo i due assi che ne resultano; ma per non adottare con Newton la gravitazione reciproca di tutte le particelle della materia, e per aver considerata tale forza come operante unicamente verso il centro della terra, trova tali assi nella relazione di cinquecanto settantasette a cinquecento settantotto: relazione troppo piccola di circa la metà.

Da tali meditazioni passò Huygens al problema della catenaria, cui aveva di recente proposto Giacomo Bernoulli, già profondo nell'analisi leibniziana. Si trattava di trovare la curva formata da un filo pesante, flessibile e inestensibile, sospeso a due punti fissi alle sue estremità. Huygens riuscì a risolverlo servendosi dei soli metodi antichi, il che era certamente un grande sforzo d'ingegno; ma non bisogna dimenticare che le soluzioni che possono dedursi da tali metodi non sono il più delle volte che soluzioni *particolari*. Condorcet osserva con ragione che esse non ammettono la generalità cui introduce l'ammissione delle costanti arbitrarie nelle equazioni rese compiute dopo la integrazione. Frattanto la repugnanza di Huygens pel calcolo differenziale cominciava a diminuire; carteggiava con Leibnitz, gli proponeva le sue objezioni e i suoi dubbj, e finalmente comprese tutta la grandezza e tutta la potenza di quella maravigliosa invenzione. Egli scriveva a Fontenelle » che con sorpresa e con ammirazione scorgevà l'e- » stensione e la fecondità di quest'arte; che dovunque volgesse lo sguardo ne » scopriva nuovi usi; che alla fine v'intravedeva un progresso infinito, una » speculazione senza limiti. » Scrisse anzi negli *Atti* di Lipsia (1693), inviando la soluzione di un problema di Giovanni Bernoulli sulla curva di cui le tangenti e le parti dell'asse sono in una data ragione, che non avrebbe potuto trovarla senza un'equazione differenziale. » Bisogna osservare in tale problema, » aggiungeva, un'analisi nuova e singolare, che apre il cammino a quantità di » cose sulla teoria delle tangenti, siccome ha egregiamente osservato l'illustre in- » ventore di un calcolo senza il quale con gran fatica saremmo ammessi in una » sì profonda geometria ». Fino da tale momento si dedicò ai progressi del nuovo metodo; e Leibnitz attendeva i più grandi resultati da un tale uomo, quando le sue forze esauste prima del tempo lo abbandonarono ad un tratto. Nel principio del 1695 infermò pericolosamente, il suo intelletto venne meno, e ricuperò l'uso delle sue facoltà soltanto per disporre de' suoi beni e de' suoi manoscritti. Morì poco dopo all'Aja, il dì 8 Luglio 1695, in età di settantasei anni e tre mesi.

Questo grand'uomo era dotato di quella bontà e di quella giojalità che tanto accresce il merito dei talenti; con premurosi riguardi riceveva i dotti che andavano a consultarlo, e soprattutto i giovani che entravano nella carriera. Egli aveva conosciuto l'ingegno di Leibnitz, come Cartesio, pel quale conservò sempre il culto il più profondo di rispetto e di ammirazione, aveva compreso il suo. L'illustre inventore del calcolo differenziale si è compiaciuto di far conoscere tutti gli obblighi di cui andava debitore alle sue conferenze con questo sommo geometra: lo vide di frequente negli anni 1672 e 1673; e fin d'allora, raccon-

tava in seguito, un nuovo mondo erasi aperto per lui, ed erasi sentito un altr' nomo. Imprimere ad un genio di questa tempra una direzione tanto feconda non era un rendersi nuovamente benamerito della società? esclama un biografo di Huygens nel rammentare questa particolarità della sua vita privata. Le opere di Huygens sono state raccolte dopo di lui e pubblicate per cura di S' Gravesande in un' edizione assai stimata: ci limiteremo ad indicarla, senza risalire alle edizioni originali che non si trovano quasi più oggigiorno. Eccone il titolo: *Christiani Hugenii Zulichemii Opera varia, astronomica et mathematica, cum posthumis, cura Guil. Jac. S' Gravesande, in quatuor tomos distributa*, Leida, 1724, 4 vol. in-4; *Opera reliqua, in duo volumina, quorum secundum, in duos tomos distributum, continet opera posthuma*, Amsterdam, 1728, 2 vol. in-4. Tale raccolta contiene tutti gli scritti stampati di Huygens, eccettuate tredici memorie inserite nelle *Transazioni filosofiche* (dal n° 45 al n° 121), tra le quali se ne possono osservare due sopra alcune esperienze fatte nel vuoto, siccome scritte in comune con Papin, inventore della macchina di tal nome.

I

IADI (*Astron.*). Stelle disposte a forma di Y nella costellazione del Toro. Esse appariscono nella stagione delle pioggie, e perciò i poeti supposero che ne fossero la causa e seco ognora le traessero. Per tal ragione furono chiamate *Iadi* dalla parola greca ὕειν, *piovere*.

Ora micant Tauri septem radiantia flammis,
Nauta quos Hyadas Grajus ab imbre vocat.

OVID. FAST. *lib.* V, *vers.* 165.

E Virgilio disse: *Arcturum pluviasque Hyadas.* In latino si chiamano ancora *Succulae*, e la principale, che è situata nell'occhio del Toro ed è di prima grandezza, è conosciuta sotto il nome particolare di *Aldebaran*, *Fulgens succularum*. Finsero i poeti esser le *Iadi* le figlie di Atlante e di Plejone, le quali piansero tanto la morte del loro fratello Iade sbranato da una leonessa, che gli Dei mossi da compassione le trasportarono nel cielo ove piangono ancora.

IBN-EL-A'LAM (ALY BEN AL HASSAN), celebre astronomo arabo, è autore di una *Tavola astronomica*, oggi perduta, la quale conteneva numerose osservazioni fatte a Bagdad sotto il regno di Adadb ed-daulab. Quest'astronomo, della cui dottrina faceva gran conto Ibn-Younis, morì ad Osaila il giorno 8 di Moharrem 375 dell'egira (985 di G. C.).

IBN-YOUNIS (ALY BEN ABDELRAHMAN), uno dei più celebri astronomi arabi, nato nel 369 dell'egira (979 di G. C.), era di una famiglia ragguardevole per la sua nobiltà, e di cui l'origine si perdeva nell'antichità dei tempi. Il califfo A'ziz padre di Hakembi-Amrillab fu quegli che diresse gli studj di Ibn-Younis verso l'astronomia, agevolandogli i mezzi d'imparare e di coltivare tale scienza. Le buone intenzioni del principe rimasero perfettamente soddisfatte; poichè l'esattezza delle sue osservazioni e il tempo che v'impiegò lo resero il più celebre e il migliore degli astronomi arabi. Egli osservava in un luogo presso il Cairo denominato l'*Osservatorio*; ed inserì il resultato dei lunghi suoi lavori nella Tavola detta *Zydj Ibn-Younis* (Tavola d'Ibn-Younis), o *Zydj Hakemy* (Tavola hakemita). È la più completa di tutte le opere cui gli Arabi posseggano col titolo di *Zydj*. È composta: 1° di un preambulo in cui Ibn-Younis indica parecchi errori commessi dagli astronomi suoi predecessori, e combatte alcune false idee ricevute a' suoi tempi; 2° di una prefazione; 3° di ottanta capitoli. Sulla scorta del manoscritto che si conserva nella Biblioteca Reale di Parigi, Caussin, assistito dall'astronomo Bouvard, e valendosi della traduzione di una parte delle suddette tavole fatta per uso del celebre geografo Delisle, inserì un sunto della tavola di Ibn-Younis nel Tomo VII delle *Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque du Roi*. Ibn-Younis morì il giorno 4 di Chewal 399 dell'egira (31 Maggio 1008 di G. C.).

ICARO (*Astron.*). Nome dato qualche volta alla costellazione più nota sotto quello di Boote. *Vedi* BOOTE.

ICNOGRAFIA. (*Geom.*) (da *ἴχνος*; *traccia* e da *γράφω io descrivo*). Piano geometrico di un edifizio o traccia di un oggetto qualunque sul piano orizzontale che gli serve di base. *Vedi* Piano.

ICOSAEDRO (*Geom.*). Solido regolare terminato da venti triangoli equilateri ed eguali tra loro. Esso è uno dei cinque corpi regolari. *Vedi* Solido.

IDENTICO. (*Alg.*). Si chiama *equazione identica*, quella i cui due membri sono i medesimi, ovvero si riducono alla medesima quantità. Se ne può vedere un esempio, in $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$, il quale dopo avere eseguito i calcoli indicati diviene $a^2-x^2=a^2-x^2$; donde facendo passare tutto nel primo membro, $a^2-x^2-a^2+x^2=0$, vale a dire $0=0$. Quest' equazioni non possono fare scoprire che le differenti forme della *generazione* delle quantità, ma esse non potrebbero condurre ad alcun risultamento nella soluzione dei problemi.

IDI (*Calend.*). Nel calendario romano si dava questo nome al giorno 15 nei mesi di Marzo, Maggio, Luglio e Ottobre, e al 13 negli altri mesi dell'anno.

IDRA (*Astron.*). L' Idra femmina, *Hydra*, è una costellazione meridionale che si stende al di sopra del Leone, della Vergine e della Bilancia: essa vien chiamata ancora *Serpens aquaticus*, *Asina coluber*, *Echidna* o *Vipera*. Le stella principale di questa costellazione è chiamata *Cuore dell' Idra*, e in arabo *Alfrad*. L' origine sua mitologica è, secondo Ovidio, comune con quella delle due costellazioni della Tazza e del Corvo:

> *Dixit et antiqui monumenta perennia facti,*
> *Anguis, Avis, Crater, sidera juncta micant.*
>
> Ovid. Fast. *lib.* II, *vers.* 265.

Infatti, volendo Apollo sacrificare a Giove, inviò, dicesi, il corvo con una tazza per prendere dell'acqua: questo si fermò sopra un fico per attendere la maturità del frutto, e poscia per iscusarsi del suo ritardo prese un serpente che accusò di avergli fatto ostacolo quando voleva attinger l' acqua. Ma Apollo per punire il corvo cambiò le sue penne di bianche in nere, lo collocò avanti alla tazza e incaricò il serpente d' impedire che bevesse. Altri vogliono che questa costellazione rappresenti l' Idra uccisa da Ercole.

L' Idra maschio, *Hydrus*, è una costellazione più meridionale, che non comparisce sul nostro orizzonte. È situata tra il Toucan e il Dorado, e la sua stella principale è di terza grandezza.

IDRAULICA (*Mec.*). Scienza che ha per oggetto il moto dell' acque, e la costruzione delle macchine proprie a condurle. Questa è, a parlar propriamente la parte pratica dell' *idrodinamica*. (*Vedi* questa parola).

Le macchine che sono necessarie per ciò che riguarda il condurre e l' elevare l' acqua, prendono in generale il nome di *macchine idrauliche*. *Vedi* Fontana, Gatto di acqua, Tromba, Ruota e Sifone.

L' acqua in moto può considerarsi in quattro modi differenti: 1° scorrendo in un letto (*Vedi* Corrente di acqua); 2° uscendo da un serbatoio (*Vedi* Sgorgo dei fluidi); 3° Quando agisce come motore (*Vedi* Acqua motrice); 4° finalmente in uno stato passivo elevata da macchine.

Si dà il nome generico di *macchine idrauliche* a due classi di macchine differentissime nei loro effetti e nel loro scopo: la prima comprende diversi apparecchi per i quali l' acqua è l' agente motore, la *potenza*; la seconda si compone di organi meccanici destinati ad *elevare* l' acqua, che costituisce allora la *resistenza*. Si potrebbe formare una terza classe di macchine, in cui l' acqua fosse nel medesimo tempo e *potenza* e *resistenza*, vale a dire in cui la forza di una corrente di acqua fosse impiegata ad elevare una porzione di quest' acqua,

come l'*ariete idraulico*, la *colonna oscillante*, ec. Ma, osservando che l'azione di queste macchine esige il concorso di una forza estranea, l'elasticità dell'aria atmosferica, si vede che esse debbono essere poste nella seconda classe.

La prima classe delle macchine idrauliche si suddividerebbe in tre generi, se si potesse stabilire dei limiti assoluti tra l'azione dell'acqua considerata rapporto al suo urto, al suo peso e alla sua forza centrifuga; ma, siccome nella maggior parte di queste macchine, l'acqua giammai agisce in un solo modo, quindi non si potrebbe assegnare il genere delle macchine, che considerando il modo di azione predominante. Sia però come si voglia, le macchine di questa prima classe sono le *ruote a pale*, le *ruote a cassette*, le *ruote a tazze* o *ciotole*, i *turbini*, le *ruote a reazione*, i *turbini* o *ruote a forza centrifuga*, e la *macchina a colonna d'acqua* (*vedi* queste diverse parole); l'ultima si distingue da tutte le altre per la natura del suo moto, che è *alternativo*; nel mentre che quello delle prime è un moto continuo di rotazione. Esistono ancora molte altre macchine di questa classe, progettate o eseguite, ma quelle che abbiamo citate sono le più usuali. Frattanto, quando tratteremo di ciascuna macchina in particolare, daremo l'indicazione del suo affetto utile.

La seconda classe delle macchine o *organi* idraulici presenta un grandissimo numero di apparecchi, poichè non esiste problema che abbia maggiormente occupato l'immaginazione dei pratici, quanto quello dell'elevazione dell'acqua. Tra queste macchine, quelle il cui uso è il più frequente sono le *secchie*, le *trombe*, le *norie*, i *cappelletti*, le *rote a timpano*, e la *vite d'Archimede*. Negli articoli particolari saranno esaminate, come lo saranno ancora alcune altre meno usuali, ma le di cui disposizioni ingegnose ne reclamano l'attenzione. (*Vedi* Fontana).

IDRODINAMICA (*Mec.*). Uno dei rami della meccanica. Esso ha per oggetto le leggi del moto dei fluidi.

Questa scienza si suddivide in due parti, la prima delle quali considera le leggi del moto dei liquidi; e questa è propriamente l'Idraulica, e la seconda quella del moto dei gas, ed è la *Pneumatica*. (*Vedi* questa parola).

L'idrodinamica è la parte la più difficile e la meno avanzata della meccanica; le sue leggi fondamentali sono interamente sconosciute, e le poche leggi particolari, delle quali essa componesi presentemente, non sono per ora che un resultamento dell'esperienza; tutti i tentativi fatti fin qui per renderle generali o per ottenerne la deduzione matematica a priori sono stati senza successo, e possiamo prevedere che seguirà il medesimo di tutti i tentativi ulteriori, fintantochè la costituzione intima dei *fluidi* o generalmente quella della *materia* non sarà conosciuta.

1. Si conosce dall'esperienza, che quando un fluido pesante contenuto in un vaso sgorga da un'apertura praticata nel fondo di questo, la superficie esterna del fluido conserva sensibilmente una situazione orizzontale. Se s'immagina perciò che la massa del fluido sia divisa in strati orizzontali, questi strati potranno considerarsi a misura che essi si abbasseranno, e che il vaso si vuoterà come paralelli, e le molecole che gli compongono saranno considerate discendere verticalmente. Quest'ipotesi è sicuramente lontana dall'essere rigorosa, poichè le molecole saranno sottoposte a movimenti orizzontali, ma essa è almeno sufficiente per darci una soluzione approssimata del problema dello *sgorgo dei fluidi*.

Sia EFCD, (*Tav.* CXLIII, *fig.* 2) un vaso la cui superficie interna è data dall'equazione $\varphi(x, y, z) = 0$; immaginiamo un piano orizzontale AB, e prendiamo l'ordinata $ex = z$ per misurare la distanza di uno degli strati del fluido da questo piano. Con l'aiuto dell'equazione $\varphi(x, y, z)$, conosceremo l'area s,

dello strato che corrisponde all'ordinata z, e, l'altezza dello strato supponendosi infinitamente piccola, moltiplicando quest' area per la differenziale dz di z, avremo sdz pel volume dello strato. Ora, siccome nell' ipotesi che ci serve di base, tutte le molecole di questo strato giungono nel medesimo tempo per una strada verticale al piano orizzontale che gli serve di base, è evidente che queste molecole saranno animate dalla medesima velocità. Ma se consideriamo due strati differenti, la velocità cesserà di essere costante. Infatti il fluido essendo incompressibile, uno strato qualunque non può discendere dall' altezza dz, nel tempo dt senza che non esca dall' orifizio CD una quantità di fluido eguale al volume di questo strato. Così, se indichiamo con v la velocità che ha luogo all' orifizio CD, con a l' area di questo orifizio; siccome la velocità è generalmente eguale allo spazio diviso per il tempo (*Vedi* Velocità), lo spazio verticale percorso nell' istante dt sarà eguale a vdt; dunque moltiplicando l'area a per quest' altezza verticale vdt, avremo $avdt$ per la quantità di fluido sgorgato dall' orifizio CD nell' istante dt. Questa quantità di fluido dovendo essere eguale allo strato scomparso, avremo l' equazione

$$sdz = avdt \ldots\ldots\ldots (1),$$

donde dedurremo

$$av = s\cdot\frac{dz}{dt} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Se indichiamo con u la velocità dello strato dopo il tempo t, avremo $u = \frac{dz}{dt}$ (*Vedi* Velocità); sostituendo questo valore nell' equazione (2), si otterrà

$$av = su \ldots\ldots\ldots (3),$$

equazione che c' insegna che le velocità v ed u debbono essere in ragione inversa dell' aree a ed s. Il che del resto è evidente.

Dopo l' istante dt, la velocità u diventerà du, ovvero $\frac{du}{dt}dt$; ma se le molecole del fluido non agissero le une sopra delle altre, la forza acceleratrice o la gravità che le sollecita essendo espressa con g, avremmo

$$\frac{du}{dt} = g, \quad e \quad du = gdt.$$

Ora, per l' azione reciproca delle molecole, ciascuno strato perde tutta la velocità che esso avrebbe se queste molecole fossero libere, meno quella che gli resta effettivamente; così la velocità perduta da una molecola dello strato s sarà

$$gdt - \frac{du}{dt}dt,$$

e, per conseguenza, la forza acceleratrice dovuta a questa velocità avrà per espressione

$$g - \frac{du}{dt}.$$

Ma, dal principio del D' Alembert (*Vedi* Statica) il fluido rimarrebbe in equilibrio, se ciascuno dei suoi strati fosse sollecitato da forze motrici capaci d' im-

primergli la velocità che esso perde a ciascun istante; supponiamo dunque questi strati sollecitati da *simili forze*, e l'equazione dell'equilibrio del fluidi incompressibili

$$dp = \delta g dz,$$

nella quale p indica la pressione e δ la densità del fluido (*Vedi* IDROSTATICA, n.° 9) diventerà, in quest' ipotesi,

$$dp = \delta \left(g - \frac{du}{dt} \right) dz \ldots\ldots (4).$$

Sostituendo invece di du, il suo valore trovato differenziando l'equazione (3), $av = su$, cioè:

$$du = \frac{asdv - avds}{s^2},$$

e eliminando quindi $\frac{ds}{dt}$ per mezzo dell'equazione (1), l'equazione (4) diventerà

$$dp = \delta \left[gdz - a \frac{dv}{dt} \frac{dz}{s} + a^2 v^2 \frac{ds}{s^3} \right] \ldots (5).$$

Integrando rapporto a z, siccome le quantità v e $\frac{dv}{dt}$ debbono considerarsi come costanti, poichè esse sono i valori particolari che prendono le quantità u e $\frac{du}{dt}$ all'orifizio, avremo

$$p = \delta \left[gz - a \frac{dv}{dt} \int \frac{dz}{s} - \frac{a^2 v^2}{2s^2} \right] + C \ldots (6)$$

Il valore della costante C, che in generale è una funzione del tempo t, dipende dalla pressione che sopporta la superficie superiore del fluido. Per maggior semplicità supporremo che questa pressione sia quella dell'atmosfera e l'indicheremo con π. Indichiamo allora con z' il valore dell'ordinata z relativo al livello del fluido nel vaso, e con s' la superficie di questo livello ovvero ciò che diviene s quando si fa $z = z'$; se prendiamo l'integrale $\int \frac{dz}{s}$ in modo che si annulli per questo valore di $z = z'$ avremo ancora per questo medesimo valore

$$\pi = \delta \left[gz' - \frac{a^2 v^2}{2s'^2} \right] + C \ldots (7).$$

Eliminando C nell'equazione (6) con l'aiuto del suo valore preso dall'equazione (7), quest'ultima equazione diventa definitivamente

$$p = \pi + \delta \left[g \left(z - z' \right) - a \frac{dv}{dt} \int \frac{dz}{s} - \frac{a^2 v^2}{2s^2} + \frac{a^2 v^2}{2s'^2} \right] \ldots (8),$$

e dà il valore della pressione esercitata sopra un punto qualunque del vaso.

2. Per ottenere la pressione che ha luogo all'orifizio, indichiamola con ϖ, e

siccome in questo caso z riceve un valore determinato, che è la distanza costante del piano AB all' orifizio, rappresentiamo con l questo valore; di più si chiami h l' altezza del livello al di sopra dell' orifizio, avremo $h = l - z$; e indichiamo finalmente con N l' integrale $\int \frac{dz}{s}$ presa in tutta l'estensione di h, cioè da $z = z'$ fino a $z = l$. Sostituendo questi valori nell' equazione (8), otterremo

$$\varpi - \pi = \delta \left[gh - a\mathrm{N}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2v^2}{s'^2} - v^2\right)\right] \ldots . (9),$$

osservando che quando $z = l$ si ha $s = a$.

Quest' ultima equazione fa conoscere il valore della pressione ϖ all' orifizio. Se si suppongano le pressioni ϖ e π eguali, come ciò segue quando esse sono esercitate solamente dal peso dell' atmosfera, $\varpi - \pi$ si riduce a zero, il fattore comune δ sparisce e l'equazione (9) diventa

$$gh - a\mathrm{N}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2v^2}{s'^2} - v^2\right) = 0 \ldots . (10).$$

3. Il moto di un fluido che sgorga da un orifizio orizzontale presenta due casi: quello in cui il fluido è costantemente trattenuto al medesimo livello, e quello in cui il livello si abbassa a misura che il fluido sgorga. Nel primo caso, h, N, ed s' sono quantità costanti; e possiamo senza difficoltà integrare l'equazione (10), ma nel secondo, h diviene variabile e quest' integrazione non può effettuarsi sotto una forma finita che in un piccolissimo numero di casi. Non possiamo in questo punto esaminare che i risultamenti più generali di questa teoria.

Se si suppone l' orifizio CD piccolissimo rapporto alla capacità del vaso, si potrà trascurare, senza errore sensibile, i termini moltiplicati da a nell' equazione (10), e essa diventerà

$$gh - \frac{1}{2}v^2 = 0,$$

donde otterremo

$$v = \sqrt{2gh} \ldots . (11).$$

Paragonando quest' espressione con la formula (6), del moto accelerato (*Vedi* Accelerato), e osservando che in quest' ultima la quantità g è la stessa cosa che qui $\frac{1}{2}g$, si scuopre il teorema importantissimo di cui ecco l'enunciato.

La velocità di un fluido che esce da un vaso per un piccolissimo orifizio è eguale a quella di un corpo pesante, che fosse caduto da tutta l' altezza del livello al di sopra dell' orifizio.

Questo teorema ha luogo nei due casi del livello costante o variabile.

4. La velocità v può servire a trovare la quantità di acqua sgorgata nel tempo t, ovvero ciò che si chiama l' *efflusso del serbatojo.* Infatti se indichiamo con de lo spazio percorso nel tempo dt, abbiamo

$$de = v dt$$

e, conseguentemente $aodt$ esprime il piccolo filo che è sgorgato nel tempo dt, dunque

$$\int aodt$$

è la quantità di acqua sgorgata nel tempo t o l' *efflusso*. Invece di o sostituendo il suo valore (11) e integrando, otterremo

$$efflusso = a\sqrt{2g}\int dt\sqrt{h} \ldots\ldots (12)$$

5. Se l' altezza h del livello è costante, si ha semplicemente

$$efflusso = at\sqrt{2gh},$$

ovvero, indicando l' efflusso con D,

$$D = \sqrt{2g} \cdot at\sqrt{h} \ldots\ldots (13),$$

per Parigi, ove la quantità g è $9^m,80867$, avremo,

$$D = (4,42916)\, at\sqrt{h} \ldots\ldots (14),$$

espressione nella quale t dev' essere un numero di secondi.

Quando l' orifizio è circolare, l' espressione (13) può ancora rendersi più semplice; poichè, indicando con r il raggio di quest' orifizio e con π la semi-circonferenza il cui raggio è 1, si ha $a = \pi r^2$, e siccome $\pi = 3,1415926 \ldots$, si ottiene, eseguendo il calcolo delle quantità costanti,

$$D = (13,9145)\, r^2 t\sqrt{h} \ldots\ldots (15),$$

formula nella quale inseguito metteremo i valori di r, di t e di h i quali converranno al caso particolare, che vorremo esaminare. Il valore di D sarà dato in metri cubi, e siccome il peso di un metro cubo di acqua è di 100 chilogrammi, si conoscerà immediatamente il peso dell' efflusso.

6. Se consideriamo un secondo vaso che, come il primo, si mantenga sempre pieno, e che si chiami D' il suo efflusso, a' il suo orifizio ed h' l' altezza del suo livello al di sopra dell' orifizio, l' equazione (13) diventerà per questo caso

$$D' = \sqrt{2g} \cdot a't\sqrt{h'}$$

e paragonando D a D', otterremo la proporzione

$$D : D' :: a\sqrt{h} : a'\sqrt{h'};$$

così quando $a = a'$, o quando gli orifizj hanno la medesima apertura, *gli efflussi di acqua sono come le radici quadrate delle altezze.*

7. L' altezza h' da cui un mobile cade in un tempo t, è data dall' equazione (*Vedi* ACCELERATO).

$$h' = \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{donde} \quad t = \sqrt{\frac{2h'}{g}},$$

mettendo questo valore nell' equazione (13), avremo

$$D = 2a\sqrt{hh'} \ldots\ldots\ldots (16),$$

donde si vede che l' efflusso, nel caso del livello costante, è eguale al doppio del volume di un cilindro il cui orifizio a fosse la base, e che avesse per altezza una media proporzionale tra l' altezza del livello, e l' altezza dalla quale un corpo grave discende nel tempo t.

8. L' efflusso di acqua calcolato per mezzo delle formule precedenti non si accorda con quello che resulta dall' esperienza, e lo supera sempre in grandezza, in un rapporto il quale non varia nè con la larghezza dell' orifizio, nè con l' altezza del livello. Si valuta questo rapporto costante a 0,62; dimodochè bisogna, nelle applicazioni moltiplicare per 0,62 (*Vedi* la memoria del Prony *sopra la stazzatura delle acque correnti*), i valori di D dati dalle formule 13, 14, 15, e 16. L' equaziona (15) diventa così

$$D = (8,627)\, r^2 t \sqrt{h} \ldots\ldots (17).$$

Si attribuisce questa differenza tra la teoria e l' esperienza alla *contrazione*, che il fluido prova nell' uscire dall' orifizio, contrazione che pare essa stessa resultare dalle direzioni concorrenti, che prendono le molecole avvicinandosi all' orifizio, il che produce un ristringimento nella larghezza della vena fluida.

9. I teoremi dei numeri 3 e 6 trovano molte e numerose applicazioni nella pratica dell' idraulica, la quale felicemente è molto più avanzata della teoria. *Vedi l' Idrodynamique* del Bossut, e *la nouvelle Architecture hydraulique* del Prony. *Vedi* ancora in questo Dizionario la parola IDROSTATICA.

IDROGRAFIA. (*Geografia*) da ὕδωρ, *acqua*, e da γράφω, *io descrivo*). Parte della Geografia che ha per oggetto la conoscenza dei mari. Alcuni autori hanno esteso questa parola all' arte del navigatore.

IDROMETRI. (*Idraul.*). Nome generico che vien dato agli istrumenti destinati a misurare la velocità delle correnti di acqua.

L' idrometro il più semplice e forse il più sicuro è un *galleggiante*. Questo consiste in un pezzo di legno, ovvero in un altro corpo di una gravità specifica quasi eguale a quella dell' acqua, e il quale, situato nella corrente, ne prende la velocità. Subito che il moto è bene stabilito, si conta il numero dei secondi che il galleggiante impiega per percorrere una distanza precedentemente misurata; questa distanza, divisa per il numero dei secondi, fa conoscere lo spazio percorso in un secondo, ossia la velocità. I migliori galleggianti sono delle palle vuote di latta o di rame, nelle quali s' introduce una quantità di pallini di piombo, in modo che esse s' immergano quasi interamente nell' acqua; si deve situarla nel punto più forte della corrente ovvero al filo dell' acqua, e abbastanza al di sopra del punto ove si comincia a contare, perchè nel giungervi, si possa esser sicuri che esse abbiano, la velocità del liquido che le circonda. Questa maniera di operare, che bisogna ripetere molte volte per prendere un medio, fa conoscere con molta esattezza la velocità del filo dell' acqua, ma non può impiegarsi per i fili più prossimi alla ripa, perchè il galleggiante non si manterrebbe in una medesima direzione.

Il *volante ad ale* o *pale* può essere impiegato vantaggiosamente per determinare la velocità di un filo qualunque. Questa è una piccola ruota a pale moltissimo mobile sul suo asse e costruita con legno leggerissimo; si pone sulla corrente, nel punto in cui si vuol conoscere la velocità, in modo che una pala sia im-

mersa nell'acqua, il suo centro di percussione prende bentosto, presso a poco, la velocità del filo.

Il *pendulo idrometrico* serve egualmente per determinare la velocità di un filo qualunque. Esso si compone di una palla vuota, di avorio o di metallo, sospesa con un filo al centro di un quarto di circolo graduato. Si pone quest' apparecchio sul punto che vogliamo riconoscere, il quarto di circolo fissato fuori dell' acqua, e la palla immersa nel liquido (*Tav.* CXLIII, *fig.* 3); la corrente trasporta la palla, il filo s' inclina, e quando l' angolo d' inclinazione è divenuto costante, dalla grandezza di quest' angolo si calcola la velocità. Ecco la teoria di quest' operazione.

Sia P il peso della palla A, ed OA la inclinazione costante del filo, misurata sul quarto di circolo dall' angolo EOA $= i$. Si costruisca il rettangolo ABDC, nel quale AD $=$ P, CAD $=$ EOA $= i$. I lati AB ed AC saranno le componenti di AD, ed avremo

$$AC = P\cos i, \quad AB = P\operatorname{sen} i.$$

Così $P\cos i$ esprime il peso effettivo o la forza con la quale la palla tende a scendere, e $P\operatorname{sen} i$ la parte del peso assoluto, che fa equilibrio all'azione della corrente, e misura il suo sforzo. Lo sforzo della corrente, comparativamente al peso effettivo, sarà perciò

$$\frac{P\operatorname{sen} i}{P\cos i} = \operatorname{tang} i,$$

vale a dire che esso è proporzionale alla tangente d' inclinazione. Ma questo medesimo sforzo è egualmente proporzionale al quadrato della velocità della corrente (*Come si rileva dalla teoria dell'acqua motrice*); dunque, indicando con v questa velocità, il rapporto delle due quantità v^2, $\operatorname{tang} i$ dev' essere un numero costante, e, esprimendo con n^2 quest' ultimo, avremo

$$v = n\sqrt{\operatorname{tang} i}.$$

Il coefficiente costante n avrà un valore particolare per ciascuna palla, che possiamo determinare direttamente per mezzo dell' esperienza, tentando il pendulo sopra una corrente, la cui velocità sarà stata determinata tanto per mezzo di un galleggiante, quanto con un volante a pale. La velocità conosciuta, divisa per la radice quadrata della tangente d' inclinazione osservata, darà il valore di n.

I precedenti idrometri non fanno conoscere che la velocità alla superficie della corrente; per misurare le velocità al disotto della superficie, bisogna ricorrere ad altri istrumenti.

Il più semplice, chiamato *tubo del Pitot*, dal nome del suo inventore, è un tubo di vetro ricurvo, nel foro inferiore (*Tav.* CXLIII, *fig.* 4), s' immerge nella corrente, fino a tanto che l' orifizio di questo foro, voltato verso l' insù dal fiume, sia a livello del filo del quale vogliamo avere la velocità; questo filo pressa il liquido, lo fa salire nel ramo verticale, e l' altezza della colonna di acqua, al di sopra della superficie della corrente, indica approssimativamente l' altezza dovuta alla velocità. Il Dubuat ha trovato che dando all' orifizio la forma di un imbuto, di cui si chiude l' ingresso con una piastra forata da un piccolo buco al centro, i due terzi solamente dell' altezza nel tubo erano l' altezza dovuta alla velocità della vena fluida, vale a dire che indicando con h l' altezza nel tubo, la velocità cercata sarebbe

$$v = \sqrt{2g \times \frac{2}{3} h}.$$

Sono stati fatti diversi perfezionamenti a questo istrumento, che è poco impiegato, ma che fa epoca nella scienza, perchè per mezzo di questo il Pitot scoperse il fatto importantissimo del decrescimento graduale della velocità dei fili fluidi dalla superficie fino al fondo.

Le bilance o romane idrometriche sono capaci di una maggiore esattezza: il principio sul quale esse sono fondate è che, se si espone direttamente una piastra di metallo all'urto di una vena di acqua, il peso che bisogna impiegare per mantenerla in equilibrio contro lo sforzo della corrente dà la misura di questo sforzo, donde possiamo concludere la velocità. La bilancia adoprata dal Brünings, e alla quale esso ha dato il nome di *tacometro*, è rappresentata dalla (*Tav.* CXLIII, *fig.* 5); essa si compone di una piastra A fissata all'estremità di un fusto AB, che si muove in una picca *m* perpendicolarmente alla sbarra DE, la cui estremità E riposa sul fondo del letto del fiume. Un cordone DB è attaccato all'estremità B del fusto AB, e va, passando sopra una puleggia di rinvio C, all'estremità di un piccolo braccio di una romana, di cui l'altro braccio porta il peso P. Quando quest'istrumento è posato, la vena fluida che agisce sulla piastra A la pressa verso B, e bisogna allora fare stornare il peso P fintantochè esso la mantenga in equilibrio; le divisioni del gran braccio della romana fanno conoscere il peso assoluto che misura lo sforzo della corrente, e, per conseguenza, la sua velocità.

Gli idraulici tedeschi considerano come il più perfetto degli idrometri inventati finqui il *molinello idrometrico del Woltmann* Questo è un albero che gira (*Tav.* CXLIII, *fig.* 6) il quale porta quattro piccole ale disposte come quelle di un mulino a vento. Quando esse son mosse dalla corrente, il numero delle loro rivoluzioni in un tempo determinato, indicato dal medesimo istrumento, fa conoscere la velocità.

Qualunque sia l'istrumento che si adopra per misurare la velocità di una vena fluida, non è possibile di determinare la velocità media della sezione di un gran fiume che mediante un'enorme serie di esperienze; poichè bisogna decomporre questa sezione in strati verticali, misurare la velocità di un gran numero di punti presi verticalmente gli uni al di sotto degli altri in ciascuno strato; onde concludere con una media la velocità media dello strato; poi dalla velocità media di tutti gli strati, dedurre la velocità media della sezione. Si vede quindi quanto sarebbe importante di conoscere la legge del decrescimento della velocità, e di potere ottenere la velocità media da quella del filo dell'acqua, sempre facile a misurarsi esattamente; ma ancora non si conosce neppure il rapporto che può esistere tra la velocità del filo superiore, e la velocità media della verticale alla quale esso appartiene. (*Vedi* Corrente di acqua).

IDROSTATICA. (*Mec.*). Uno dei rami della meccanica. Questo ramo è la scienza dell'equilibrio dei fluidi.

La parola Idrostatica, formata da *ὕδωρ acqua*, e da στατικός, *che arresta*, indica propriamente la *statica dell'acqua*, o la scienza dell'equilibrio delle acque; ma presentemente si applica alla statica di tutti i fluidi, tanto liquidi, quanto gassosi: tuttavia si dà il nome particolare di *Aereostatica*, alla statica dell'aria (*Vedi* questa parola). Questa scienza ha avuto la sua fondazione da Archimede, il quale ne ha date le prime nozioni nel suo trattato *De insidentibus humido.*

Dal geometra di Siracusa, fino al geometra Fiammingo Stevin, vale a dire, sino alla fine del decimosesto secolo, l'Idrostatica rimase senza sviluppo, e neppure in questo lungo periodo si trova alcuna traccia di tentativi fatti per perfezionarne la teoria. Il primo trattato metodico sopra questa materia, è quello *dell'equilibrio dei liquori* del Pascal, mentre l'opera dello Stevin si riduce

quasi esclusivamente alla dimostrazione delle proposizioni fondamentali trovate da Archimede. Il Pascal non si contentò di stabilire in un modo rigoroso e uniforme le proprietà dell' equilibrio dei fluidi, esso risolvette ancora molte importanti difficoltà, e certamente si debbono a questo grand' uomo i primi progressi reali di questa scienza, la quale inseguito ben presto sviluppò per conseguenza dei lavori del Torricelli, del Guglielmini e del Mariotte.

Quando le leggi principali dell' Idrostatica furono stabilite empiricamente in un modo incontestabile, la loro deduzione matematica divenne lo scopo degli sforzi dei più gran geometri. Giovanni e Daniele Bernoulli, il Newton, il Maclaurin, il D' Alembert, il Clairaut, il Lagrange se ne occuparono successivamente più o meno felicemente. Ma siccome la natura o la costituzione intima dei fluidi, è ancora interamente incognita, tuttociò che finqui abbiamo potuto fare, si è di stabilire la teoria matematica delle leggi idrostatiche, sul principio sperimentale *dell' eguaglianza della pressione in tutti i sensi*. Questa teoria, che esporremo, è dunque ancora ben lontana dall' essere definitiva; e se essa sembra sufficiente per rendere ragione dei fenomeni conosciuti, non possiamo però sperarne ulteriori scoperte.

1. Ammetteremo come un fatto constatato dall' esperienza, che ogni pressione esercitata alla superficie di un fluido qualunque, è trasmessa egualmente in tutti i sensi. Per rendere esatta quest' ipotesi fondamentale, ed esprimerla numericamente, consideriamo un vaso AF (*Tav.* IV, *fig.* 3) della forma di un parallelepipedo, e ripieno di un fluido incompressibile che comincieremo dal supporre senza gravità. Se immaginiamo che alla superficie *mnop* del fluido, si applica uno stantuffo che copra esattamente questa superficie sopra tutti i suoi punti, e che si faccia agire un peso P perpendicolarmente allo stantuffo, la base del vase ABCD sarà pressata come se il peso P gli fosse applicato immediatamente, e ciascuna delle sue parti sopporterà una pressione proporzionale alla sua estensione. Così indicando con A la superficie ABCD e con a una parte $Abca$ di questa superficie, avremo

$$A : a :: P : p,$$

p indicando la pressione che sopporta a. Se prendiamo dunque a per l' unità di superficie, avremo

$$p = \frac{P}{A} \dots\dots (1),$$

e, per conseguenza una parte $Ab'c'a'$ della superficie ABCD la quale conterrà ω volte l' unità di superficie, sopporterà una pressione P' data dall' equazione

$$P' = p\omega \dots\dots (2).$$

Ma la pressione che il peso P esercita alla superficie superiore del fluido si trasmette per il suo intermediario, non solamente sulla base del vaso, ma ancora sopra tutte le altre pareti che sono egualmente pressate: dunque se la superficie ω in luogo di esser presa sulla base, fosse situata sopra una delle pareti laterali, essa sopporterebbe ancora la pressione $p\omega$.

2. Considerando la superficie ω come infinitamente piccola, essa può rappresentarsi col rettangolo elementare $dxdy$ (*Vedi* QUADRATURA), e allora $pdxdy$ diviene la pressione esercitata contro un elemento del vaso, in qualunque parte questo elemento sia situato, e quando ancora la superficie del vaso fosse curva.

3. Finqui abbiamo considerato il fluido contenuto nel vaso come se esso fosse

senza gravità: ora, quando questo fluido è pesante, esso certamente trasmette sempre nella medesima maniera la pressione che si esercita alla sua superficie, ma esso esercita inoltre contro le pareti del vaso una pressione dovuta al suo proprio peso, la quale è variabile da un punto a un altro di queste pareti. Segue ancora il medesimo quando le molecole di una massa fluida, contenuta in un vaso chiuso da tutte le parti, sono sollecitate da forze acceleratrici date, in modo che le pareti del vaso siano necessarie per mantenere l'equilibrio, e che non si possa farvi un'apertura senza che il fluido ne esca. Allora ciascun punto di queste pareti prova una pressione particolare diretta dal di dentro al di fuori, pressione la cui grandezza dipende dalle forze acceleratrici date, e dalla posizione del punto. Indicando con p' quest'ultima pressione, è evidente che non possiamo supporla costante che in un'estensione infinitamente piccola ω. Così p essendo la pressione totale dell'unità di superficie, della quale ciascun elemento possiamo concepire che provi la pressione p', si ha l'equazione

$$p' = p\omega \ldots\ldots (3).$$

La quantità p è in questo caso ciò che si chiama *la pressione a ciascun punto del vaso riferita all'unità di superficie.*

4. Premesso ciò, nel caso in cui la parete superiore del vaso, o solamente una delle sue parti, fosse sostituita da uno stantuffo, perchè l'equilibrio sussista sempre, bisogna evidentemente applicare allo stantuffo una forza eguale e contraria alla pressione, che la superficie del vaso provava in questo luogo; poichè allora le condizioni rimangono le medesime. L'equilibrio non verrà per niente turbato, se a questa prima forza se ne aggiunge una seconda P; solamente la pressione esercitata da essa sopra la superficie del fluido a contatto con lo stantuffo, sarà egualmente trasmessa dal fluido in tutti i sensi, e per conseguenza la pressione p si troverà aumentata in ciascun punto del vaso di una quantità costante ed eguale a $\frac{P}{M}$; M indicando l'estensione della superficie del fluido che riceve la pressione P. (*Vedi* qui sopra n.° 1). Così la pressione totale che sopportano le pareti di un vaso, allorquando esso contiene un fluido in equilibrio, si compone della somma di due specie differenti di pressioni, una variabile da un punto all'altro, dovuta alle forze motrici delle molecole elementari del fluido, l'altra costante per tutti questi punti, dovuta alla pressione esercitata alla superficie del fluido e trasmessa egualmente in tutte le direzioni per l'intermedierio del fluido.

5. Cerchiamo ora l'equazione generale dell'equilibrio, riportando la posizione di una molecola fluida a tre piani rettangolari coordinati. (*Vedi* APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA) e a quest'effetto supponiamo che il piano delle x, y sia orizzontale e situato al di sopra del fluido (*Tav.* IV, *fig.* 5) del quale concepiremo il volume diviso in un numero infinito di parallelepipedi elementari da piani paralelli ai tre piani coordinati. Indichiamo con m la massa del fluido; dm sarà quella di uno di questi elementi, il cui volume sarà espresso da $dxdydz$, x, y, z essendo le coordinate dell'elemento. Ora, indicando con δ la densità, supposta costante nella molecola del fluido, la massa essendo eguale al prodotto del volume per la densità (*Vedi* DENSITA'), avremo

$$dm = \delta\, dxdydz \ldots\ldots (4).$$

Indichiamo con X, Y, Z le somme delle componenti paralelle agli assi delle x, delle y e delle z, delle forze acceleratrici che agiscono sulla molecola. Que-

sti risultamenti dovranno considerarsi come costanti in tutta l'estensione dell'elemento dm; i prodotti

$$Xdm,\quad Ydm,\quad Zdm$$

rappresenteranno le forze motrici di dm, paralelle agli assi. (*Vedi* Forza morta e Meccanica). Queste forze debbono contrabbilanciare le pressioni, che il fluido circondante esercita sopra le sei facce dell'elemento dm.

Indicando, come sopra con p, la pressione riferita all'unità di superficie, la pressione sopportata dalla superficie superiore mq o $dxdy$ della molecola, sarà $pdxdy$, ma allorchè l'ordinata $am=z$ diviene $am+mn=z+dz$, la pressione p che varia con z, diviene

$$p+\frac{dp}{dz}dz;$$

e quest'ultima quantità esprime la pressione dell'unità di superficie sulla base np del paralellepipedo; questa base proverà dunque una pressione

$$\left(p+\frac{dp}{dz}dz\right)dxdy.$$

La differenza delle pressioni verticali alla superficie superiore e alla base del paralellepipedo, cioè la differenza tra la pressione che tende ad elevare la molecola, e quella che tende ad abbassarla sarà dunque

$$\frac{dp}{dz}.dxdydz;$$

e siccome questa differenza deve fare equilibrio con la forza motrice verticale Zdm, avremo

$$\frac{dp}{dz}dxdydz=Zdm,$$

ovvero, semplicemente

$$\frac{dp}{dz}=\delta Z \ldots\ldots (5),$$

sostituendo invece di dm il suo valore (4).

Si otterrà egualmente, indicando con q ed r le pressioni laterali esercitate sopra l'unità di superficie; e le quali agiscono contro le facce $nz=dxdz$, $mo=dydz$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq}{dy}&=\delta Y\\ \frac{dr}{dx}&=\delta X\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Ma le pressioni q ed r non possono differire dalla pressione p, poichè la pressione $pdxdy$ che ha luogo sopra la faccia $dxdy$ dovendo esser trasmessa in tutti i sensi, le pressioni delle facce verticali $dxdz$, $dydz$ saranno composte delle pressioni $pdxdz$, $pdydz$ aumentate delle pressioni particolari dovute alle forze

motrici Xdm, Ydm, Zdm. Così le pressioni totali $qdxdz$, $rdydz$ saranno respettivamente

$$qdxdz = pdxdz + M,$$
$$rdydz = pdydz + N,$$

M ed N essendo le pressioni dovute alle forze motrici. Ora, M ed N sono evidentemente quantità infinitamente piccole del terz'ordine, come la massa dm; così esse sono nulle rapporto alle quantità infinitamente piccole del second'ordine, le quali entrano nelle precedenti equazioni (*Vedi* DIFFERENZIALE) e sottraendole si trova $q = p$ ed $r = p$. L'espressioni (5) e (6) si riducono perciò a

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dz} &= \delta Z \\ \frac{dp}{dy} &= \delta Y \\ \frac{dp}{dx} &= \delta X\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (7),$$

donde si deduce l'equazione generale

$$dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz) \ldots\ldots\ldots (8).$$

Il valore di p che si otterrà integrando quest'equazione, esprime la pressione, riferita all'unità di superficie, che il fluido esercita in un punto qualunque, le cui coordinate sono x, y, z. Quando il fluido è chiuso in un vaso, basterà di mettere in p il valore delle coordinate di un punto della sua superficie, per conoscere la pressione che questo vaso prova in questo punto, e che sarà sempre distrutta dalla resistenza della parete, fintantochè questa resistenza sarà sufficiente. Nei luoghi ove il vaso è aperto, siccome niente distruggerebbe la pressione del fluido, l'equilibrio non può sussistere, se il valore di p non diventa nullo da se stesso, per tutti i punti della superficie libera del fluido; condizione che non può essere adempita che per fluidi incompressibili, e allorchè la superficie libera è la superficie superiore del fluido. Nei fluidi elastici, la pressione essendo proporzionale alla densità (*Vedi* ARIA), questa pressione non può mai diventar nulla fintantochè la densità non lo è, e per conseguenza un tal fluido non può rimanere in equilibrio, se esso non è contenuto in un vaso chiuso da tutte le parti.

6. Applichiamo le precedenti considerazioni al caso dei fluidi incompressibili, e consideriamo un tal fluido, omogeneo in tutte le sue parti, rinchiuso in un vaso capace di opporre alla pressione una resistenza indefinita. La densità δ essendo allora costante, la possibilità di determinare il valore di p per un punto le cui coordinate sono x, y, z dipenderà da quella dell'integrazione della formula

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

integrazione alla quale possiamo sempre giungere, quando questa formula è una differenziale esatta delle variabili x, y, z. Se una parte della superficie superiore del fluido è libera, la pressione p dev'esser nulla in questa parte perchè l'equilibrio possa sussistere; l'equazione (8) diventa

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \ldots\ldots (9).$$

Quest' ultima equazione avrebbe ancora luogo se la pressione p fosse costante. Tale è il caso in cui l' atmosfera, per esempio, comprime egualmente tutti i punti della superficie libera. Infatti la differenziale di una quantità costante è zero.

7. Ma nel caso in cui l' espressione (9) è una differenziale esatta, e che $dp=0$, vale a dire quando la pressione, se essa esiste, è costante, perchè il fluido possa restare in equilibrio, bisogna necessariamente che la resultante della forze acceleratrici che agisce dal di fuori al di dentro, sia normale alla superficie del fluido; poichè nel caso contrario si potrebbe decomporla in due forze, una normale e l' altra tangente alla superficie, e nulla impedirebbe a quest' ultima di fare strisciare la molecola dm. Resulta da questa considerazione, che quando il fluido non è sollecitato che da forze acceleratrici diretta verso un centro fisso, la sua superficie esterna dev' essere sferica. Infatti prendendo il centro d' attrazione per l' origine delle coordinate, la distanza del punto x, y, z, a quest' origine, avrà per espressione

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Indicando con r questa distanza, e con φ la forza di attrazione che agisce sopra dm; questa forza farà con gli assi coordinati degli angoli che avranno per coseni $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, avremo dunque

$$X=\varphi\frac{x}{r},\quad Y=\varphi\frac{y}{r},\quad Z=\varphi\frac{z}{r}$$

e questi valori sostituiti nell' equaziona (9) daranno, per l' equazione della superficie del fluido,

$$\frac{\varphi}{r}(xdx+ydy+zdz)=0,$$

ovvero semplicemente

$$xdx+ydy+zdz=0$$

il di cui integrale

$$x^2+y^2+z^2=C$$

è l' equazione di una sfera (*Vedi* questa parola). Così la superficie del fluido è necessariamente sferica.

8. Se il centro di attrazione è lontanissimo dalla superficie del fluido, come per esempio, il centro della terra rapporto alla superficie superiore di un' acqua stagnante, la curvatura diventando insensibile in una piccola estensione, possiamo per quest' estensiona, considerarla come piana.

9. Nel caso in cui le forze acceleratrici che agiscono sopra un fluido si riducano alla sola forza della gravità, avremo

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=g,$$

g indicherà la forza della gravità alla superficie della terra.

L' equazione di equilibrio per una massa fluida rinchiusa in un vaso aperto nella sua parte superiore, e che riposa sopra un piano orizzontale, diventerà dunque, sostituendo questi valori nell' equazione (8)

$$dp=\delta g dz \quad \ldots . \ (10).$$

La superficie superiore del fluido, che sarà orizzontale, come l' abbiamo veduto di sopra, prendendosi per il piano delle x, y.

L' integrazione di quest' equazione, considerando δ e g come quantità costanti, ci darà

$$p = \delta g z \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

Non vi è bisogno di aggiungere la costante, perchè la pressione dev' essere nulla alla superficie del fluido, cioè quando $z = 0$.

10. Sia h la distanza compresa tra il livello del fluido e un punto della superficie interna o della base del vaso. Per questo punto, z divenendo h, avremo

$$p = \delta g h \; . \; . \; . \; . \; . \; (12),$$

e tale sarà la pressione che sopporta l' unità di superficie della base.

Ma si chiami P la pressione che sopporta la base totale del vaso eguale ad un dato numero m di unità di superficie; P conterrà m volte p, e si avrà

$$P = pm \; . \; . \; . \; . \; . \; (13),$$

ciò che diventa, sostituendo a p il suo valore (12)

$$P = \delta g m h \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Osservando che mh esprime il volume di un prisma che ha m per base e h per altezza; e che moltiplicando il volume per la densità, si ottiene la massa del prisma (*Vedi* Densità); la quale alla sua volta moltiplicata per la gravità g dà il peso (*Vedi* questa parola), se ne concluderà che la base m sopporta una pressione eguale al peso del volume del prisma del fluido che riposa sopra questa base. Così questa pressione è indipendente dalla figura del vaso. Si ottiene in questo modo un risultamento osservabilissimo e riconosciuto per mezzo dell' esperienza, ed è che, qualunque sieno le capacità di più vasi aventi basi eguali, e di cui gli uni vanno allargandosi dalla base al vertice e gli altri diminuendo (*Vedi* Tav. IV, fig. 7), se tutti si riempiano del medesimo fluido pesante fino ad una medesima altezza, le basi proveranno pressioni eguali, quantunque le quantità di fluido contenute in questi vasi sieno interamente differenti.

11. Per trovare la pressione che il vaso prova sopra le sue superficie laterali, si chiami $d\omega$ l' elemento di questa superficie; la pressione p che sopporta l' unità di superficie dell' elemento $d\omega$ sarà data dall' equazione (11), dando a z per valore la distanza di $d\omega$ al livello del fluido; mettendo questo valore nell' equazione (13) e osservando che ad m deve sostituirsi la superficie elementare $d\omega$, otterremo $\delta g z d\omega$ per una delle forze elementari paralelle che compongono P, così

$$P = \int \delta g z d\omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15).$$

Quando la superficie ω è data, le due variabili z ed ω che entrano in quest' equazione, si riducono facilmente ad una sola e l' integrazione può sempre effettuarsi. Non possiamo entrare in ulteriori particolarità.

12. La pressione provata dalla superficie inferiore di un vaso, che contiene più fluidi pesanti di densità differenti e soprapposti gli uni sopra gli altri, si trova senza difficoltà con i principj precedenti; poichè ammettendo che si sia versato sopra l' acqua in equilibrio nel vaso (*Tav.* IV, *fig.* 6) EFGH, un nuovo fluido

più leggero, che abbia la sua superficie superiore EF orizzontale; come quella dell'acqua e che si elevi ad un'altezza h' al di sopra della superficie EF dell'acqua, questi due fluidi resteranno in equilibrio nel vaso, e il nuovo fluido eserciterà una pressione eguale sopra tutti i punti della superficie dell'acqua che forma la sua base; così quest'ultima superficie essendo rappresentata da m' e la densità del fluido da δ', la pressione totale dall'area m', sarà $\delta' g m' h'$ in virtù della formula (14) Ma questa pressione è trasmessa, per l'intermediario dell'acqua, sul fondo GH del vaso, e ne risulta sopra questo fondo la cui area è m, una nuova pressione eguale a $\delta' g m h'$; donde segue che la pressione totale che i due fluidi riuniti esercitano sulla base orizzontale del vaso, è eguale a

$$P = \delta g m h + \delta' g m h'.$$

Un terzo fluido, di una densità ancora minore δ'', versato sulla superficie del secondo fino all'altezza h'' al di sopra di questa forza, produrrebbe sopra questa superficie CD, della quale indicheremo l'area con m'', una pressione $\delta'' g m h''$; questa pressione trasmessa dal secondo fluido sulla superficie superiore del primo diventerà $\delta'' g m' h''$, e quest'ultima trasmessa sulla base del vaso per il primo fluido sarà finalmente $\delta'' g m h''$; dunque la pressione totale dei tre fluidi riuniti, sulla base del vaso sarà

$$P = \delta g m h + \delta' g m h' + \delta'' g m h''$$

e così di seguito per un numero qualunque di fluidi.

13. Esaminiamo attualmente le condizioni di equilibrio dei fluidi contenuti in più vasi, che comunicano dall'uno all'altro per mezzo di aperture laterali. Siano, per quest'oggetto, due vasi M ed N (*Tav.* XLI, *fig.* 1) di una capacità qualunque, riuniti nelle loro parti inferiori per mezzo di un condotto *mn*. Se questi due vasi contengono un solo fluido omogeneo e incompressibile, è che essi siano aperti alle loro estremità superiori, bisognerà necessariamente che il fluido si elevi alla medesima altezza, ovvero che esso abbia il medesimo livello nell'uno e nell'altro di questi vasi; poichè l'equilibrio non potrebbe sussistere se la pressione esercitata nel primo vaso dalla massa AomB del fluido, sopra lo strato oEFp del medesimo fluido comune ai due vasi, non è contrabbilanciato dalla pressione esercitata nel secondo vaso dalla massa fluida CnpD, sul medesimo strato comune; ora queste pressioni dipendono unicamente dalle altezze Ao e Cn (*Vedi* il n.° 10); dunque, nel caso dell'equilibrio, queste altezze sono eguali.

14. Se immaginiamo che sopra una delle superficie libere del fluido, sopra AB, per esempio, si sia situata una parete mobile, qualunque pressione esercitata sopra questa parete forzerà una parte del fluido del vaso M ad andare nel vaso N, e conseguentemente il livello AB si abbasserà, nel mentre che il livello CD si eleverà. L'equilibrio non potrà stabilirsi che quando il livello CD sarà giunto ad un'altezza sufficiente, perchè la pressione dovuta a quest'altezza possa contrabbilanciare la somma delle pressioni, esercitate nel vaso M dal fluido restante e dal peso che agisce sulla sua superficie superiore. L'equilibrio avrà ancora luogo senza che il livello AB si abbassi, se si dà al fluido del vaso N un'altezza conveniente al di sopra di questo livello, aumentando la sua quantità.

Indichiamo con P la superficie che pressa la superficie AB, e con h l'altezza, al di sopra del livello ABCD, della quantità di fluido che bisogna aggiungere per conservare l'equilibrio. La pressione esercitata da questa nuova quantità di fluido sulla superficie del livello CD sarà $\delta g m h$, m essendo l'area di questa su-

perficie. Così M essendo l'area della superficie AB, si avrà per la pressione dell'unità di superficie dello strato comune oEFp, da una parte $\frac{P}{M}$ e dall'altra $\frac{\delta gmh}{m} = \delta gh$, e per conseguenza nel caso di equilibrio

$$\frac{P}{M} = \delta gh,$$

donde

$$h = \frac{P}{M\delta g}.$$

Resulta da quest' espressioni che h è interamente indipendente dalla forma e dalla capacità del vaso N; dimodochè nel caso in cui questo vaso fosse un cilindro di un piccolissimo diametro, basterebbe una piccola quantità di fluido per giungere a quest' altezza, e conseguentemente per fare equilibrio a P, qualunque sia la grandezza di questo peso. Ed è sopra questo principio che riposano la costruzione e le proprietà della *pressa idrostatica*. (*Vedi* PRESSA).

15. La pressione che l'atmosfera esercita sopra le due superficie libere AB e CD del fluido non può in alcuna maniera turbare l'equilibrio, poichè questa pressione, riportata all'unità di superficie, è la medesima pertutto; ma se si sottrae una di queste superficie all'azione atmosferica, facendo il vuoto nella parte superiore del vaso, è evidente che l'equilibrio non potrà più sussistere, e che il fluido si eleverà al di sopra del livello, in quello dei vasi in cui esso non prova più la pressione dell'aria. Per trovare in questo caso le condizioni del ristabilimento dell'equilibrio, supponiamo che il vuoto sia stato fatto nel vaso N, e che quindi si sia esattamente chiuso il suo orifizio. La pressione atmosferica non agendo più che sopra la superficie AB del fluido, nel vaso M, forzerà il fluido a salire nel vaso N, al di sopra del livello ABCD nel medesimo tempo che essa si abbasserà nel vaso M al di sotto di questo livello; l'equilibrio non avrà luogo che quando l'altezza acquistata nel vaso N sarà sufficiente per contrabbilanciare la pressione che ha luogo nel vaso M. Supponiamo che questa condizione sia adempita, e che ab sia divenuto il livello del fluido nel vaso M, e $c'd'$ il suo livello nel vaso N. Si chiami h l'altezza di $c'd'$, al di sopra di cd, presa nel piano orizzontale del livello ab. Per quello che precede, è l'altezza h che contrabbilancia la pressione dell'atmosfera; così la pressione esercitata sulla superficie cd, dal fluido la cui altezza è h, essendo $\delta gh(cd)$, o semplicemente δgh, riportando questa pressione all'unità di superficie, se indichiamo con Π la pressione dell'atmosfera, egualmente riportata all'unità di superficie, avremo:

$$\Pi = \delta gh \quad \ldots\ldots (16).$$

16. Quest' espressione conduce a diverse conseguenze che meritano di essere osservate. Prima di tutto si vede che l'elevazione del fluido non dipende, nè dall'estensione della superficie che riceve la pressione atmosferica, nè dalla forma dei vasi nei quali il fluido è contenuto, ma solamente dalla densità di questo fluido, e che essa è in ragione inversa di questa densità. La pressione dell'atmosfera sopra l'unità di superficie essendo eguale al peso di tutta la colonna atmosferica, che ha questa superficie per base (*Vedi* il n.° 10), e la pressione δgh essendo egualmente il peso della colonna del fluido di cui questa medesima unità di superficie è la base, basterà di conoscere quest' ultimo peso, il che per

mezzo dell' esperienza è sempre possibile, per conoscere quello della colonna atmosferica. Finalmente conoscendo l' elevazione dovuta alla pressione dell' atmosfera di un fluido qualunque, si potrà calcolare l' elevazione di qualunque altro fluido dovuta alla medesima causa, quando si conosce il rapporto della sua densità e quella del primo.

17. Si sa, per esempio, che l'altezza del livello mn (*Tav.* XLI, *fig.* 2) dell' acqua, nel vaso chiuso e privato d' aria, al di sopra del livello $abcd$ dell' acqua nel vaso aperto, è di circa 10,4 metri. Se prendiamo dunque il metro quadrato per unità di superficie, il volume del prisma di acqua, la cui base è un metro quadrato e l' altezza 10,4 metri, essendo 10,4 metri cubi, e il peso di un metro cubo di acqua essendo di 100 chilogrammi, il peso totale del prisma sarà di 1040 chilogrammi. Così, il peso di tutta la colonna atmosferica che ha per base orizzontale un metro quadrato, è egualmente di 1040 chilogrammi.

18. L' elevazione dell' acqua nel vaso privato di aria va a farci conoscere quella di qualunque altro fluido. Pel mercurio, per esempio, la cui densità, paragonata a quella dell' acqua come unità, è 13,598, h essendo l' altezza del mercurio, avremo:

$$10^m,4 : h :: 13,598 : 1,$$

donde

$$h = \frac{10,4}{13,598} = 0^m,76.$$

Tale è, infatti, l' altezza media del mercurio nei barometri.

19. L' elevazione dei fluidi dovuta alla pressione atmosferica è più grande alla superficie della terra; essa decresce a misura che ci si eleva al di sopra di questa superficie, perchè allora la colonna d' aria diminuendo, il suo peso diminuisce egualmente. Ed è sopra questo decrescimento che è fondato il metodo di calcolare le altezze delle montagne con l' aiuto della differenza delle altezze barometriche (*Vedi* Altimetria). Tutte le influenze atmosferiche che possono tendere a cangiare il peso della colonna di aria, tendono egualmente a cangiare l' elevazione dovuta a questo peso.

20. Terminiamo questo articolo esaminando le condizioni di equilibrio quando un corpo solido è immerso in un fluido.

Si chiami v il volume del fluido spostato dal solido, v' il volume di questo solido, δ la densità del fluido, e δ' la densità del solido. I pesi respettivi dei volumi v e v' saranno δgv e $\delta' gv'$.

Nel caso in cui il corpo sia interamente immerso nel fluido, siccome allora $v = v'$, la condizione di equilibrio è

$$\delta g = \delta' g,$$

vale a dire, che bisogna che la densità del corpo sia la medesima di quella del fluido.

Se il volume del corpo è più leggero di quello del fluido spostato, si avrà:

$$\delta' gv' < \delta gv$$

il corpo risalirà, e la forza che lo farà muovere sarà eguale a

$$\delta gv - \delta' gv'.$$

Se, al contrario, si ha

$$\delta' g v' > \delta g v$$

il corpo scenderà, e la forza che lo presserà sarà eguale a

$$\delta' g v' - \delta g v.$$

Tutte queste conseguenze resultano immediatamente dai principii che abbiamo esposti precedentemente. Infatti, il solido è spinto dall'alto in basso pel suo peso, ovvero, ciò che significa il medesimo, da una forza verticale eguale al suo peso, e applicata al suo centro di gravità. Questa forza non può essere distrutta che dalle resultanti delle pressioni normali, che il fluido esercita in tutti i sensi contro il solido. Così la resultante generale di tutte le pressioni normali è verticale, e agisce in senso inverso della forza dovuta al peso del corpo; donde segue che le pressioni orizzontali si distruggono. L'equilibrio non può dunque esistere tra un corpo e il fluido, nel quale esso è immerso, che quando i centri di gravità del corpo e del fluido spostato sono sopra la medesima verticale, e che allorchè il peso del liquido spostato è eguale al peso totale del corpo.

Questi principii troveranno in altre parti numerose applicazioni. *Vedi* Gravità, Superficie, Teorema, Resistenza dei fluidi, Sifone.

IGINO, poeta ed astronomo latino, viveva verso il secondo secolo dell'era cristiana. Ci ha lasciato una descrizione del cielo in un poema diviso in quattro libri, intitolato: *Poeticon astronomicon*, di cui la prima edizione fu pubblicata a Ferrara nel 1475. Ci rimangono di lui altri scritti l'indicazione dei quali potrà vedersi nella *Biografia universale*.

IGROMETRIA. Sotto il nome di *igrometri* s'indicano gl'instrumenti destinati a misurare la quantità del vapore di acqua contenuto nell'aria atmosferica, e, per conseguenza, sotto quello d'*igrometria*, la parte della fisica, che ha per oggetto i principii fondamentali sopra i quali riposa la loro costruzione.

Tutto il mondo sa che, quando si mette dell'acqua in un vaso aperto e si espone all'aria libera, essa a poco a poco diminuisce e finalmente sparisce in totalità. Questo fenomeno, che si chiama *evaporazione*, e che continuamente si effettua alla superficie dei mari e dei fiumi, è il motivo per cui l'aria non è giammai completamente secca, ma essa sempre contiene una data quantità di acqua in dissoluzione, la cui presenza ne modifica la sua elasticità e la sua densità.

Per molto tempo è stata attribuita l'evaporazione dell'acqua e quella di molti altri liquidi ad un'*affinità* o azione elettiva delle molecole integranti dell'aria sopra le molecole integranti di questi liquidi; l'aria era allora dotata di una *forza dissolvente* tanto maggiore, quanto la sua temperatura e la sua densità erano maggiori. Questa teoria non è più ammissibile dopo che è stato provato che l'evaporazione si effettua nella medesima quantità e molto più prontamente in uno spazio vuoto che in uno pieno di aria; o nella trasformazione dei liquidi in vapori non dobbiamo vedere che un effetto repulsivo del calorico interposto tra le loro molecole.

Il Dalton ha riconosciuto: 1° che i vapori che si sviluppano nei gas non saturano istantaneamente lo spazio occupato dal gas; dimodochè passa sempre un dato tempo dall'istante in cui il liquido è introdotto nella capacità occupata dal gas, fino a quello in cui non si formano più vapori; 2° che la forza elastica di una mescolanza di gas e di vapori è eguale alla forza elastica del gas, più a quella del vapore che si svilupperebbe nel vuoto; 3° che la quantità del vapore che si forma in un gas è eguale a quella che si formerebbe in uno stesso

spazio vuoto alla medesima temperatura. Resulta da questi fatti, verificati da tutti i fisici, che i vapori si sviluppano nei gas come nel vuoto, e che la mescolanza dei gas e dei vapori si effettua come quella dei gas permanenti. Solamente, i gas oppongono all' evaporazione uno ostacolo meccanico che la ritarda.

Si chiama *stato igrometrico* dell'aria il rapporto tra la quantità del vapore di acqua che essa contiene, e quello che si troverebbe se essa fosse completamente saturata, ovvero, ciò che significa la medesima cosa, il rapporto della tensione del vapore nell'aria alla sua tensione maximum (*Vedi* FORZA ELASTICA) alla medesime temperatura. La determinazione di questo stato igrometrico è il problema principale dell'igrometria; poichè, quando esso è conosciuto, possiamo dedurre facilmente, come lo vedremo inseguito, il peso del vapore di acqua rinchiusa in un volume di aria dato.

Di tutti i mezzi proposti per misurare il grado di umidità dell'aria, il più rigoroso è quello di mettere un volume conosciuto di aria in contatto con una sostanza la cui affinità per l'acqua sia tale, che essa possa togliere la totalità del vapore contenuto nel volume dato. Quando la disseccazione è affettuata completamente, si pesa la sostanza, e la differenza del suo peso col peso che essa aveva avanti l'operazione fa conoscere il peso dell'acqua assorbita, e, per conseguenza, la densità del vapore di acqua primitivamente mescolata con l'aria; ma questo metodo esige un'estrema esattezza nelle particolarità, e ne rende perciò difficilissima la sua applicazione. Le sostanze che presentano maggiore affinità per l'acqua sono il cloruro di calce, la potassa caustica, e la calcina viva.

I cangiamenti delle forme o delle dimensioni che le diverse sostanze provano per l'umidità, sembrano offrire un mezzo molto più semplice per determinare il grado di umidità dell'aria. Si è osservato che quasi tutte le sostanze organiche, immerse nell'aria umida, assorbiscono una data quantità di vapore acquoso la quale dipende dalla loro natura propria e dallo stato igrometrico dell'aria. Quando l'aria diviene più umida, esse assorbiscono una nuova quantità di vapore, che restituiscono quando essa diviene più secca. Questo assorbimento o quest'emissione di vapore è sempre accompagnata da un cambiamento in tutte le dimensioni del corpo; ma le sostanze composte di filamenti provano sempre maggiore aumento nel senso del loro diametro che in quello della loro lunghezza; così le corde, le quali sono formate di fibre torte, si gonfiano si addirizzano e si accorciscono per mezzo dell'umidità.

Da questa proprietà ne è stato tirato partito per costruire degli istrumenti destinati a far conoscere, per mezzo della semplice vista, l'umidità dell'aria, e questi sono gl'istrumenti che si chiamano *igrometri*. Quello impiegato più anticamente si compone di una corda storta, lunga 5 a 6 centimetri, fissata in una delle sue estremità e portante nell'altra un piccolo peso per tenderla. Una scala gradnata indica le diminuzioni di lunghezza che subisce la corda storcendosi per l'effatto dell'umidità, ovvero gli accrescimenti che essa prova diventando più secca. Quest'apparecchio, proprio tutto al più a far conoscere che l'aria è più umida in un momento che nell'altro, non può somministrare alcuna indicazione utile sopra il suo stato igrometrico.

L'igrometro del Saussure, al giorno d'oggi il più usato, consiste in un quadro di ottone ABCD (*Tav.* CXLIV, *fig.* 1) nel quale un capello *ab*, spogliato di tutte le sostanze grasse, per mezzo dell'ebullizione in una cenere un poco alcalina, è sospeso in *a* ad una piccola pinzetta che possiamo far salire o discendere con una vite; esso è fissato per l'altra estremità ad una piccola puleggia mobile sul suo asse, e provvista di un ago *mn* la cui punta percorre un arco di circolo *pq*; un filo avvolto nel medesimo senso sopra un'altra puleggia avente il medesimo asse della prima, e facente corpo con essa porta un piccolo peso *c* che cer-

ca di stendere il capello. Il capello, che ha la proprietà di allungarsi all' umidità, restando sempre teso per mezzo del piccol peso, fa girare le puleggie nelle sue variazioni di lunghezza, e la strada dell' ago indica sull' arco di circolo il numero dei gradi corrispondenti all' umidità.

L' arco di circolo è diviso in 100 parti eguali, zero risponde al punto della perfetta siccità, e 100 a quello della completa saturazione dell' aria. Per determinare questi due limiti della scala igrometrica, si comincia dal mettere l' istrumento sotto un recipiente che contiene delle materie proprie a disseccare l' aria; e quando, dopo più giorni, l' ago rimane fisso ad un punto del quadrante, s' indica zero a questo punto. Ciò fatto, si trasporta l' igrometro in un altro recipiente le cui pareti siano inumidite e di cui l' aria si trovi ben tosto saturata di umidità. L' ago cammina con rapidità e finisce per diventare stazionario in un punto che s' indica 100, e che è quello dell' umidità estrema. L' intervallo da 0 a 100 essendo diviso in cento parti eguali, l' igrometro è compito.

Quest' istrumento, quando è stato ben costruito, dà sempre delle indicazioni identiche nelle medesime circostanze; e, di più, qualunque sia la temperatura dell' aria, esso indica sempre 0° nell' aria secca, e 100° nell' aria saturata di acqua, dimodochè l' influenza della temperatura sopra la lunghezza del capello è sensibilmente nulla nei limiti di temperatura dell' atmosfera, ma i gradi di umidità che esso indica non sono proporzionali alle quantità reali di vapore di acqua contenuto nell' aria; e per poter dedurre dall' osservazione di questo istrumento la forza elastica del vapore, bisognerebbe conoscere la relazione che esiste tra i gradi dell' igrometro e le tensioni corrispondenti del vapore per ciascun grado di temperatura.

In mancanza di questa relazione che finquì non è stata scoperta. Il Gay-Lussac ha reso le indicazioni dell' igrometro del Saussure proprie a determinare la quantità assoluta di acqua racchiusa in un volume dato di aria umida, osservando, concorrentemente con i gradi indicati dall' igrometro, le tensioni del vapore di acqua contenuto in un dato volume di aria secca, per la temperatura particolare di 10 gradi centigradi. I suoi resultamenti sono consegnati nelle seguenti tavole, di cui la prima dà i gradi dell' igrometro, quando si conosce la tensione del vapore di acqua esistente nell' aria; e la seconda, la tensione di questo vapore, quando si conoscono i gradi dell' igrometro. La tensione del vapore, per la saturazione completa è rappresentata da 100; dimodochè, quando vogliamo esprimere le tensioni più piccole in frazioni decimali di questa tensione *maximum*, bisogna considerare i numeri di queste tavole come esprimenti dei *centesimi* della tensione *maximum* presa per *unità*.

TAVOLA

DEI GRADI DELL' IGROMETRO CORRISPONDENTI ALLE TENSIONI DEL VAPORE, ALLA TEMPERATURA DI 10° CENTESIMALI.

Tensione del vapore	Gradi corrispondenti dell' Igrometro	Tensione del vapore	Gradi corrispondenti dell' Igrometro	Tensione del vapore	Gradi corrispondenti dell' Igrometro	Tensione del vapore	Gradi corrispondenti dell' Igrometro
0	0,00	27	48,86	54	75,14	81	91,05
1	2,19	28	50,18	55	75,87	82	91,55
2	4,37	29	51,49	56	76,54	83	92,05
3	6,56	30	52,81	57	77,21	84	92,54
4	8,75	31	53,96	58	77,88	85	93,04
5	10,94	32	55,11	59	78,55	86	93,52
6	12,93	33	56,27	60	79,22	87	94,00
7	14,92	34	57,42	61	79,84	88	94,48
8	16,92	35	58,58	62	80,46	89	94,95
9	18,91	36	59,61	63	81,08	90	95,43
10	20,91	37	60,64	64	81,70	91	95,90
11	22,81	38	61,66	65	82,32	92	96,36
12	24,71	39	62,69	66	82,90	93	96,82
13	26,61	40	63,72	67	83,48	94	97,29
14	28,51	41	64,63	68	84,06	95	97,75
15	30,41	42	65,53	69	84,64	96	98,20
16	32,08	43	66,43	70	85,22	97	98,69
17	33,76	44	67,34	71	85,77	98	99,10
18	35,43	45	68,24	72	86,31	99	99,55
19	37,11	46	69,03	73	86,86	100	100,00
20	38,78	47	69,83	74	87,41		
21	40,27	48	70,62	75	87,95		
22	41,76	49	71,42	76	88,47		
23	43,26	50	72,21	77	88,99		
24	44,75	51	72,94	78	89,51		
25	46,24	52	73,68	79	90,03		
26	47,55	53	74,41	80	90,55		

Se le tensioni fossero state osservate in colonne di mercurio, il che si pratica generalmente, bisognerebbe riportarle in centesimi della tensione *maximum*, per poter servirsi di questa tavola; la tensione osservata essendo, per esempio, di $0^{mm},534$, siccome si sa che la tensione *maximum* del vapore di acqua alla temperatura 10° è di $9^{mm},475$ (*Vedi* VAPORE), si stabilirebbe la proporzione

$$9,475 : 0,534 = 100 : x = 5,63;$$

donde si vede che per ottenere la tensione in centesimi bisogna moltiplicare la tensione espressa in millimetri per 100, e dividere il prodotto per la tensione *maximum* espressa in millimetri. Il numero 5,63, non si trova nella colonna delle tensioni, la quale cammina per differenze eguali ad un centesimo, e ciò non è che un'interpolazione tra i numeri 10,94 e 12,93 i quali esprimono i gradi dell'Igrometro; corrispondenti respettivamente alle tensioni 5 e 6, tra le quali è compresa la tensione data 5,63, da cui possiamo determinare il grado dell'igrometro corrispondente a quest'ultima. Ma, siccome le tensioni non sono proporzionali ai gradi, bisogna regolarsi, per interpolare, con le indicazioni della seconda tavola, le quali c'insegnano che l'undecimo grado dell'Igrometro corrisponde alla tensione 5,05, e il tredicesimo alla tensione 6,00; così la prima tavola prova che il grado cercato è tra 10,94 e 12,93, e la seconda tavola, che questo grado non può essere che tra 11 e 13, ma più vicino a 11 che a 13; donde dobbiamo concludere che l'igrometro situato nell'aria, contenendo una quantità di vapore la cui tensione sarebbe 5,63, indicherebbe 11 gradi, più una piccola frazione di grado.

Sia ancora la tensione osservata $= 4^{mm},24$. Riducendo in centesimi della tensione *maximum*, si avrà

$$\frac{4,24 \times 100}{9,475} = 44,75.$$

Cercando nella colonna delle tensioni i numeri che più si avvicinano a 44,75, cioè a 44 e 45, e osservando inseguito che per la seconda tavola, il 68mo grado dell'igrometro corrisponde alla tensione 44,49, se ne concluderà che il grado cercato è tra 68 e 68,24.

Quantunque i numeri di queste tavole non si riferiscano esattamente che alla temperatura di 10°, possiamo estenderne il loro uso alle temperature vicine a 10° gradi, senza timore di commettere un errore sensibile, poichè sembra che le variazioni di temperatura esercitino poca influenza sopra l'affinità del capello per il vapore.

TAVOLA

DELLA FORZA ELASTICA DEL VAPORE CORRISPONDENTE AI GRADI DELL' IGROMETRO ALLA TEMPERATURA DI 10° CENTESIMALI.

Gradi dell' Igrometro	Tensioni corrispondenti del vapore	Gradi dell' Igrometro	Tensioni corrispondenti del vapore	Gradi dell' Igrometro	Tensioni corrispondenti del vapore	Gradi dell' Igrometro	Tensioni corrispondenti del vapore
0	0,00	27	13,14	54	30,97	81	62,89
1	0,45	28	13,69	55	31,76	82	64,57
2	0,90	29	14,23	56	32,66	83	66,24
3	1,35	30	14,78	57	33,57	84	67,92
4	1,80	31	15,36	58	34,47	85	69,59
5	2,25	32	15,94	59	35,37	86	71,49
6	2,71	33	16,52	60	36,28	87	73,39
7	3,18	34	17,10	61	37,31	88	75,29
8	3,64	35	17,68	62	38,84	89	77,19
9	4,10	36	18,30	63	39,36	90	79,29
10	4,57	37	18,92	64	40,39	91	81,09
11	5,05	38	19,54	65	41,42	92	83,08
12	5,52	39	20,16	66	42,58	93	85,08
13	6,00	40	20,78	67	43,73	94	87,07
14	6,48	41	21,45	68	44,49	95	89,06
15	6,96	42	22,12	69	46,04	96	91,25
16	7,46	43	22,79	70	47,19	97	93,44
17	7,95	44	23,46	71	48,51	98	95,63
18	8,45	45	24,13	72	49,82	99	97,81
19	8,95	46	24,86	73	51,14	100	100,00
20	9,45	47	25,59	74	52,45		
21	9,97	48	26,32	75	53,76		
22	10,49	49	27,06	76	55,25		
23	11,01	50	27,79	77	56,74		
24	11,53	51	28,58	78	58,24		
25	12,05	52	29,38	79	59,73		
26	12,59	53	30,17	80	61,22		

Questa tavola fa conoscere la tensione del vapore contenuto nell' aria corrispondente al grado osservato nell' igrometro. Per esprimere questa tensione in millimetri di mercurio, basta moltiplicare il numero dato dalla tavola, per il fattore $9^{mm},475$, e dividere il prodotto per 100. Se, per esempio, il grado dell' igometro fosse 70, numero al quale corrisponde, nella tavola, la tensione 47,19, si avrebbe, per questa tensione in millimetri,

$$\frac{47,19\times 9,475}{100}=4^{mm},471.$$

Per determinare, per mezzo di queste tavole, il peso del vapore contenuto in un volume di aria dato, ad una temperatura egualmente data, e di cui si conosce il grado igrometrico, bisogna sapere che la densità del vapore di acqua ad una temperatura t è sotto una tensione p, è eguale alla densità *maximum* che essa può avere alla medesima temperatura, moltiplicata per la sua tensione *attuale* p, espressa in frazione della tensione *maximum* presa per unità; così, intendendo con δ la densità *maximum*, e con d la densità sotto la tensione p, si ha la relazione

$$d=\delta p\ldots\ldots(1).$$

Ora, moltiplicando la densità d per il peso di un volume di acqua eguale a quello del vapore, si ottiene il peso del volume di vapore; dunque, prendendo il metro cubo per unità di volume, e osservando che il peso di un metro cubo di acqua è di 1000 chilogrammi o di 1000000 grammi, si vede che il peso di un metro cubo di vapore è espresso con

$$1000000^{g}\,\delta p\ldots\ldots(2).$$

Sia, per esempio, 72 il grado dell' igrometro al quale corrisponde, nella seconda tavola, la tensione 49,82; scriveremo questa tensione come segue 0,4982, per riportarla alla tensione *maximum* presa come unità; la densità *maximum* del vapore essendo 0,00000974 alla temperatura di 10° (*Vedi* Vapore), faremo

$$\delta=0,00000974,\qquad p=0,4982,$$

ed avremo dalla formula (2), per il peso del vapore di acqua contenuto in un metro cubo di aria, nelle circostanze date,

$$1000000^{g}\times 0,00000974\times 0,4982=4^{g},85.$$

Si è osservato che, negli strati inferiori dell' atmosfera, l' igrometro indica assai raramente 100°, ancora quando piove. La sua indicazione media in tutte le stagioni è 72°, donde possiamo concludere che la quantità media di vapore acqueo che contiene l' aria atmosferica è la metà di quello che corrisponde alla saturazione. Il limite di siccità secondo Saussura è di 40°, il quale giammai non ha veduto sul vertice dell' Alpi l' igrometro al di sotto di questo limite. Ciò non ostante, quando ci si eleva ad altezze molto grandi, s' incontrano degli strati di aria molto meno umidi; poichè nel viaggio aereostatico del Signor Gay-Lussac, l' igrometro è disceso a 26°; il termometro indicava allora —10° (*Vedi* il *Trattato di Fisica matematica*. del sig. Biot.)

IGROMTERO. (*Idrod.*). Istrumento il quale serve a misurare il grado di siccità o di umidità dell' aria. (*Vedi* Igrometria).

IMMAGINARIO. (*Alg.*) Si chiamano, *quantità immaginarie*, molto impropriamente, le radici pari delle quantità negative la cui forma generale è

$$\sqrt[2m]{-A}.$$

Queste quantità non hanno, per verità, che un' esistenza, o per meglio dire, che una *realtà ideale*, ma la loro generazione, che esamineremo, non ha assolutamente niente di comune con i prodotti della facoltà psicologica chiamata *immaginazione*.

1. Abbiamo veduto (ALGEBRA n.° 38), che i numeri detti *immaginari* hanno la loro origine dal ramo inverso del terzo ed ultimo modo dalla generazione elementare delle quantità, e che si poteva riportare la loro considerazione a quella di una radice pari di (-1), poichè si ha in generale

$$\sqrt[2m]{-A}=M\sqrt[2m]{-1},$$

M essendo la quantità *reale* $\sqrt[2m]{A}$. Dobbiamo perciò occuparci solamente della generazione di $\sqrt[2m]{-1}$.

Ora la generazione per POTENZA dell' unità *positiva* o *negativa*, prendendo per *base* l' unità negativa, è evidentemente della forma

$$(-1)^{\mu}=\pm 1,$$

cioè $(-1)^{\mu}=+1$, quando μ è pari, e $(-1)^{\mu}=-1$, quando è impari; μ essendo d' altra parte un numero intero qualunque. Così per concepire questa generazione nella *continuità indefinita* di cui essa è capace, dobbiamo considerare il numero μ come *infinitamente grande*, e allora la base (-1) diviene il *fattore elementare* (*vedi* questa parola) della potenza -1. Ma per non occuparci in questo punto che dell' unità negativa, indichiamo con ∞' un numero impari infinitamente grande, avremo

$$(-1)^{\infty'}=-1.$$

Non deve far maraviglia che si distinguano i *numeri infiniti* in *pari* ed *impari*, poichè se questi numeri appartengono ad una sfera di grandezza o piuttosto ad un ordine di conoscenze interamente differente da quello dei numeri finiti (*Vedi* DIFFERENZA), la RAGIONE facoltà superiore dell' intelligenza, della quale essi sono il prodotto, può stabilire tra essi tutte le relazioni che esistono tra questi ultimi numeri, e non è che con l' aiuto di queste relazioni che essa può giungere al suo scopo matematico, quello di portare l' ultima unità intellettuale nella generazione, non della quantità finita essa stessa, ma della *conoscenza* che abbiamo di questa quantità.

Partendo da questa generazione indefinita dell' unità negativa, diviene evidente che quando tratteremo di prendere una radice a esponente pari di questa unità, l' operazione sarà *impossibile* in realtà e tuttavia essa sarà *possibile* coll' idea, e questa è l' opposizione trascendentale, ovvero l' *antinomia* che presentano le

quantità dette immaginarie le quali, non potendo essere nè *positive* nè *negative*, sembrano implicare un' assurdità, smentita però dall' esattezza rigorosa di tutti i resultamenti che si ottengono impiegandole. Infatti, ci contenteremo in questo punto di riportare le proprie parole dell' autore della *Filosofia delle matematiche*, » si vede che prendendo una parte dell' esponente ∞', per esempio $\frac{\infty'}{2m}$, m essendo un numero intero qualunque, si avrà per la radice $2m$ dell' unità negativa una parte del fattori elementari (-1) della forma universale $(-1)^{\infty'}=-1$, espressa da $\frac{\infty'}{2m}=\infty''+\frac{p}{2m}$, ∞'' essendo il nu-
» mero intero il più grande contenuto in $\frac{\infty'}{2m}$, e p un numero impari e più
» piccolo di $2m$; in modo che dopo aver preso ∞'' fattori elementari (-1)
» rimarrà da prendere una parte $\frac{p}{2m}$ di fattori elementari del second' ordine,
» che compongono uno dei fattori elementari (-1) del prim' ordine. *Possia-*
» *mo dunque ricominciare la medesima operazione ideale sul fattore rima-*
» *nente del prim' ordine* (-1), e *possiamo continuare così indefinitamente.*

« Ora sono i numeri corrispondenti a questa generazione *ideale possibile*, e il
» cui carattere consiste esattamente in questa possibilità di generazione ideale,
» che formano i numeri, che inesattissimamente si chiamano *numeri immaginari.*

» Tale è la deduzione metafisica di questi numeri veramente straordinari i
» quali formano uno dei fenomeni intellettuali i più osservabili, e i quali danno
» una prova non equivoca dell' influenza che la facoltà legislatrice della natura
» esercita sul sapere dell' uomo, di cui questi numeri sono un prodotto di qua-
» lunque siasi sorte malgrado l' intendimento. Vediamo attualmente che lungi
» dall' essere *assurdi*, come gli considerano i geometri, i numeri detti imma-
» ginari sono eminentemente *logici*, e, per conseguenza, benissimo conformi alle
» leggi del sapere; e ciò perchè essi emanano, e in tutta purità, dalla facoltà
» medesima che dà delle leggi all' intelligenza umana. Da ciò viene la possibi-
» lità d' impiegare questi numeri, senza alcuna contradizione logica, e in tutte
» le operazioni algoritmiche, di trattargli come esseri privilegiati nel dominio
» del nostro sapere, e di dedurne risultamenti rigorosamente conformi alla ragio-
» ne. (Wronski. *Introd. à la philosoph. des math.*).

2. Resulta da ciò che precede che tutte le quantità dette *immaginarie*, sono della medesima natura, poichè esse non differiscono tra loro che dal valore dell' esponente, e che esse sono rigorosamente identiche in ciò che concerne la loro generazione ideale; queste quantità debbono dunque avere la medesima forma nella loro espressione, o potere esprimersi per mezzo di una tra loro. Effet-

tivamente è riconosciuto che possiamo avere l'espressione algebrica di una quantità *immaginaria* qualunque con l'aiuto della più semplice di queste quantità, cioè $\sqrt{-1}$. Questo è ciò che dimostreremo.

La forma generale delle quantità immaginarie essendo

$$\sqrt[2m]{-1}$$

per maggior generalità, diamo un esponente qualunque n a questa quantità, ed avremo

$$\left(\sqrt[2m]{-1}\right)^n = \left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Ora, qualunque sia A, si ha sempre $A = 1 - (1 - A)$; così possiamo mettere la quantità proposta sotto la forma di un binomio e ottenerne lo sviluppo con le formule conosciute (*Vedi* BINOMIO DEL NEWTON). Abbiamo dunque

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{n}{m}} = \left[1 - \left(1 - \sqrt{-1}\right)\right]^{\frac{n}{m}},$$

e per conseguenza

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{n}{m}} = 1 - \frac{n}{m}\left(1 - \sqrt{-1}\right) +$$

$$+ \frac{n(n-m)}{m^2 . 1 . 2}\left(1 - \sqrt{-1}\right)^2 - \text{ec.} \ldots \ldots (1).$$

Ma le potenze successive $\left(1 - \sqrt{-1}\right)$, $\left(1 - \sqrt{-1}\right)^2$, ec. che entrano in questo sviluppo possono mettersi sotto una medesima forma, poichè generalmente si ha, p essendo un numero intero qualunque,

$$\left(1 - \sqrt{-1}\right)^p = 1 - p\sqrt{-1} - \frac{p(p-1)}{1 . 2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 . 2 . 3}\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 . 2 . 3 . 4} - \text{ec.} \ldots \ldots \ldots \ldots,$$

espressione nella quale i termini sono alternativamente reali, e *immaginari*. Indicando con a_p la somma dei termini reali

$$1 - \frac{p(p-1)}{1 . 2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 . 2 . 3 . 4} - \text{ec.},$$

e con b_p quella dei coefficienti di $\sqrt{-1}$, avremo

$$\left(1-\sqrt{-1}\right)^p = a_p + b_p\sqrt{-1}.$$

Dunque, nei casi particolari di $p=1$, $p=2$, $p=3$, ec., le potenze di $\left(1-\sqrt{-1}\right)$ avranno le forme

$$a_1+b_1\sqrt{-1},\ a_2+b_2\sqrt{-1}, a_3+b_3\sqrt{-1},\ \text{ec.} \ldots\ldots$$

Sostituendo queste quantità nello sviluppo generale (1), esso diverrà

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{n}{m}} = 1 - \frac{n}{m}\left(a_1+b_1\sqrt{-1}\right) + \frac{n(n-m)}{m^2\,.\,1\,.\,2}\left(a_2+b_2\sqrt{-1}\right)$$

$$- \frac{n(n-m)(n-2m)}{m^3\,.\,1\,.\,2\,.\,3}\left(a_3+b_3\sqrt{-1}\right) + \text{ec.} \ldots\ldots$$

Effettuando le moltiplicazioni indicate, il secondo membro di quest' egnaglianza sarà composto di due serie di termini, gli uni reali e gli altri *immaginari*; e finalmente indicando con A la somma dei termini reali

$$1 - \frac{n}{m}a_1 + \frac{n(n-m)}{m^2\,.\,1\,.\,2}a_2 - \frac{n(n-m)(n-2m)}{m^3\,.\,1\,.\,2\,.\,3}a_3 + \text{ec} \ldots\ldots,$$

e con B la somma dei coefficienti reali di $\sqrt{-1}$,

$$-\frac{n}{m}b_1 + \frac{n(n-m)}{m^2\,.\,1\,.\,2}b_2 - \frac{n(n-m)(n-2m)}{m^3\,.\,1\,.\,2\,.\,3}b_3 + \text{ec.} \ldots\ldots$$

giungeremo all' espressione finale

$$\left(\sqrt[2m]{-1}\right)^n = \text{A} + \text{B}\sqrt{-1},$$

nella quale A e B sono quantità reali positive o negative.

Rimane dunque dimostrato che qualunque quantità detta *immaginaria* $\sqrt{-1}$, ed egualmente che qualunque potenza di questa quantità può esprimersi per mezzo della sola radice seconda di -1, e che la forma di questa generazione è $\text{A}+\text{B}\sqrt{-1}$.

3. Abbiamo riconosciuto (*Vedi* Elevazione alle potenza) che una *radice* dell' unità poteva ammettere più valori differenti, ed abbiamo dato (*Vedi* Equa-

ziona) l'espressione generale di questi valori il cui numero è esattamente eguale a quello dell'esponente della radice. Ci rimane da esaminare la possibilità di questa pluralità di valori; questo è quello che faremo partendo dalla generazione medesima dell'unità.

μ essendo un numero intero qualunque, compresovi lo zero, 2μ può rappresentare tutti i numeri pari, $2\mu+1$ tutti i numeri impari, ed abbiamo

$$(-1)^{2\mu}=+1 \quad \text{e} \quad (-1)^{2\mu+1}=-1.$$

Una radice del grado qualunque n sarà perciò

$$\sqrt[n]{+1}=(-1)^{\frac{2\mu}{n}},$$

$$\sqrt[n]{-1}=(-1)^{\frac{2\mu+1}{n}},$$

ovvero

$$\sqrt[n]{+1}=(-1)^{p}\cdot(-1)^{\frac{p'}{n}},$$

$$\sqrt[n]{-1}=(-1)^{q}\cdot(-1)^{\frac{q'}{n}},$$

p' e q' indicando i resti delle divisioni di 2μ o di $2\mu+1$ per n, e p e q i quozienti di queste divisioni. Ora μ essendo un numero arbitrario e per conseguenza p' e q' essendo ancora numeri arbitrari compresi tra i limiti o ed n, è evidente che le radici in questione hanno tanta generazioni differenti quanti numeri differenti possiamo prendere per p' e q'. Cominciando subito dall'unità positiva, se n è un numero pari, p' dev'esser pari ancora, poichè in questo caso si ha

$$2\mu=pn+p',$$

p' può dunque essere indifferentemente uno degli $\frac{n}{2}$ numeri 0, 2, 4, 6, ec., fino ad $n-2$, e siccome inoltre esso può essere positivo o negativo, ne segue che $\sqrt[n]{+1}$ ammette n valori differenti, corrispondenti agli n valori differenti del fattore $(-1)^{\frac{p'}{n}}$, fra questi n valori ve ne sono $\frac{n}{2}$ che sono dati dai valori positivi di p', ed $\frac{n}{2}$ dai suoi valori negativi, vale a dire, che si ha

$$\sqrt[n]{+1}=(-1)^{p}\cdot(-1)^{+\frac{p'}{n}},$$

$$\sqrt[n]{+1}=(-1)^{p}.(-1)^{-\frac{p'}{n}},$$

p potendo d'altra parte esser pari o impari.

Facendo p pari, $(-1)^{p}$ diviene $(+1)$, e facendolo impari, $(-1)^{p}$ diviene (-1). Ciascuna di qneste supposizioni somministra però n valori per $\sqrt{+1}$; ma essi sono i medesimi, e $\sqrt{+1}$ non ammette realmente che n valori differenti.

Se n è uo numero impari, p' può ancora essere un numero pari qualunque più piccolo di n, positivo, negativo o zero; allora p è necessariamente pari e si ha

$$\sqrt[n]{+1}=(-1)^{+\frac{p''}{n}},$$

$$\sqrt[n]{+1}=(-1)^{-\frac{p''}{n}}.$$

Il che ancora non dà che n generazioni differenti per $\sqrt{+1}$, poichè degli $\frac{n+1}{2}$ valori che risultano da ciascuna di queste espressioni, qoelli che corrispondono a $+p'=0$, e a $-p'=0$ sono identici ed eguali a $+1$.

Quanto alle radici dell' unità negativa, si presentano egualmente due casi, cioè: quando l' esponente n è pari, e quaodo esso è impari; nel primo, q' può essere un numero impari qualuoque, positivo o negativo, più piccolo di n, donde

$$\sqrt[n]{-1}=(-1)^{q}\cdot(-1)^{+\frac{q'}{n}},$$

$$\sqrt[n]{-1}=(-1)^{q}.(-1)^{-\frac{q'}{n}},$$

q potendo essere indifferentemente pari o impari; nel secondo caso, q' può essere un numero pari qualunque, positivo, negativo o zero, doode

$$\sqrt[n]{-1}=-(-1)^{-\frac{q'}{n}},$$

$$\sqrt[n]{-1}=-(-1)^{+\frac{q'}{n}}$$

q essendo necessariamente impari. È evidente che nell' uno e nell' altro caso $\sqrt{-1}$ riceve n generazioni differenti.

Di tutti questi valori delle radici dell' unità positiva e negativa, evidentemente non vi sono reali che i valori $+1$ e -1; tutti gli altri sono *immaginari*. Così, quando n è pari, $\sqrt{+1}$, ha *due* radici reali $+1$ e -1 e $n-2$ radici *immaginarie*; e $\sqrt{-1}$ ha tutte le sue radici *immaginarie*; quando n è impari, $\sqrt{+1}$ ha *una* sola radice, $+1$, reale, e $n-1$ radici *immaginarie*; e $\sqrt{-1}$ ha una radice reale -1, e $n-1$ radici *immaginarie*. Questo è ciò che con facilità si riconosce dall' ispezione delle forme generali che precedono.

4. Le quantità $(-1)^{\frac{p'}{n}}$ e $(-1)^{-\frac{p'}{n}}$ potendo sempre riportarsi alla forma

$$A \pm B\sqrt{-1},$$

poichè

$$(-1)^{\frac{p'}{n}} = (\sqrt{-1})^{+\frac{2p'}{n}},$$

è evidente che tutte le radici dette immaginarie dell' unità potranno essere riportate alla medesima forma, e che possiamo in generale stabilire

$$(-1)^{p} \cdot (-1)^{\frac{p'}{n}} = a + b\sqrt{-1},$$

e

$$(-1)^{p} \cdot (-1)^{-\frac{p'}{n}} = a - b\sqrt{-1}.$$

Le radici date dall' espressione $(-1)^{p} \cdot (-1)^{\frac{p'}{n}}$ non dovranno differire da quelle date dall' espressione $(-1)^{p} \cdot (-1)^{-\frac{p'}{n}}$ che nel segno della quantità $\sqrt{-1}$.

Avremo egualmente

$$(-1)^{q} \cdot (-1)^{\frac{q'}{n}} = a' + b'\sqrt{-1},$$

$$(-1)^{'}\cdot(-1)^{-\frac{q'}{n}}=a'-b'\sqrt{-1}.$$

Resulta da queste considerazione una proprietà assai osservabile delle radici dell' unità. Infatti, moltiplicando termine per termine queste eguaglianze, le due prime danno

$$\left(a^2+b^2\right)=\left(-1\right)^{2p}\cdot\left(-1\right)^{0}=1,$$

e le due seconde

$$\left(a'^2+b'^2\right)=\left(-1\right)^{2q}\cdot\left(-1\right)^{0}=1.$$

Il che prova 1° *che il prodotto di due radici immaginarie dell' unità le quali non differiscono che per il segno della quantità* $\sqrt{-1}$, *è sempre l'unità;* 2° *che la somma dei quadrati delle due quantità reali che entrano nell' espressione di una radice immaginaria dell' unità, è sempre eguale all' unità*. Proprietà caratteristiche le quali completano la teoria di queste radici.

Esiste ancora un' altra specie di quantità dette immaginarie, che in altra parte esamineremo. (*Vedi* Logaritmi)

IMMAGINE (*Ottica*). Rappresentazione di un oggetto che si vede o per effetto di reflessione o di refrazione per mezzo di un apparecchio ottico. *Vedi* Specchio, Lente e Catottrica.

IMMERSIONE (*Astron.*). Si fa uso in astronomia di questa parola per indicare il principio di un ecclisse o di un' occultazione. Siccome la luna nei suoi ecclissi non rimane interamente oscurata, ma prende un colore rossiccio, e questo cangiamento di colore non succede che gradatamente a motivo della penombra, così riesce difficile a determinarsi per mezzo dell' osservazione il momento preciso della sua immersione, come pure quello della sua emersione. Al contrario nelle occultazioni delle stelle fisse il momento dell' immersione è istantaneo.

Talvolta si prende la parola immersione per indicare il tempo in cui un astro si avvicina tanto al sole da rimanere come inviluppato ne' di lui raggi e divenire affatto invisibile. Tale immersione si dice più comunemente *tramonto eliaco* dell' astro *Vedi* Tramonto eliaco.

IMPARI (*Arit.*). Nome che si dà, per opposizione, a tutti i numeri i quali non possono dividersi esattamente per 2; i numeri divisibili per 2 chiamandosi numeri *pari*.

La forma $2m+1$, nella quale m è un numero qualunque, compresovi lo zero, può rappresentare tutti i numeri impari; poichè se facciamo successivamente $m=0$, $m=1$, $m=2$, ec., si ottiene la serie dei numeri impari, 1, 3, 5, 7, ec.

IMPULSIONE. (*Mec.*). Si chiama *forza d' impulsione*, quella che agisce sopra un corpo con una velocità finita, in un istante di una durata infinitamente piccola, o almeno inapprezzabile. Per esempio il colpo di una racchetta col quale si lancia una palla è una forza d' impulsione.

INCHOFER (Malchiorre), gesuita ungherese, nato nel 1584 a Ginsin, e morto nel 1648 a Milano, insegnò per qualche tempo le matematiche a Messina. Abbiamo di lui: *Tractatus syllepticus, in quo quid de terrae solisque motu vel statione secundum Sacram Scripturam sentiendum*, ec., Roma, 1633, in-4. L'autore vi combatte il sistema di Copernico, cui piegare non poteva alle sue idee: ma adopera le citazioni piuttosto che i raziocinj.

INCIDENZA. (*Mec.*) Direzione seguendo la quale un corpo ne urta un'altro.

In *Ottica*, chiamasi *angolo d'incidenza*, l'angolo compreso da un raggio incidente sopra un piano e la perpendicolare elevata al punto d'incidenza. (*Vedi* CATOTTRICA).

INCLINATO. In *meccanica*, si chiama PIANO INCLINATO, quello che fa un angolo obliquo col piano dell'orizzonte. Il suo uso è quello di sostenere un corpo mettendolo in equilibrio con altre forze.

Se consideriamo un corpo V (*Tav.* CXLIV, *fig.* 2) situato sopra un piano inclinato, bisognerà, per impedire a questo corpo di strisciare, in virtù della sua gravità, applicargli una forza P la cui intensità dovrà variare secondo la sua direzione, e secondo l'inclinazione del piano, ma sarà sempre necessario, perchè l'equilibrio possa sussistere, che la resultante del peso Q del corpo e della forza P sia perpendicolare al piano inclinato, solo caso nel quale la resistenza di questo piano può distruggerla; bisognerà dunque ancora che le direzioni di tutte queste forze siano comprese in un medesimo piano. Così la direzione della forza P sarà in un piano verticale condotto per il centro di gravità del corpo, e che passa per la direzione della forza Q. Supponiamo queste condizioni soddisfatte, e cerchiamo il rapporto delle forze P e Q nel caso dell'equilibrio.

1. Sia G (*Tav.* XLI, *fig.* 1) il centro di gravità del corpo, GF la verticale che rappresenta la direzione del peso, e OP la direzione della forza P; prolunghiamo queste rette fino al loro incontro in O, e da questo punto si abbassi Om perpendicolare sopra AB, sezione del piano inclinato per il piano verticale delle forze. Poichè la resultante delle forze P e Q dev'essere diretta seguendo Om, se prendiamo sopra OF e sopra OP delle parti On e Op proporzionali alle forze P e Q, e se si compisce il parallelogrammo, $OnEp$, la sua diagonale OE, resultante di queste forze, sarà nella direzione di Om, ed avremo

$$On : Op \quad \text{ovvero} \quad Q : P :: \text{sen}\, pOE : \text{sen}\, nOE \ldots . (1).$$

Ma l'angolo nOE è eguale all'angolo BAC d'inclinazione del piano; così si ha

$$\text{sen}\, nOE = \text{sen}\, BAC = \frac{BC}{AB},$$

ovvero, $\text{sen}\, nOE = \frac{h}{l}$, chiamando l la lunghezza AB del piano inclinato e h la sua altezza BC. La proporzione precedente diventerà perciò

$$Q : P :: l\,\text{sen}\, pOE : h.$$

Così il rapporto delle forze P e Q dipende dall'angolo pOE, che la forza P fa con la perpendicolare Om, e questa forza dev'essere tanto maggiore quanto quest'angolo si allontana più dall'angolo retto. Quando la forza P è paralella al piano inclinato, l'angolo pOE diventa retto, e si ha semplicemente

$$Q : P :: l : h.$$

Vale a dire che, in questo caso, *la forza* P *sta al peso* Q *del corpo al quale essa deve fare equilibrio, come l'altezza del piano inclinato sta alla sua lunghezza.*

2. Se indichiamo con α l'angolo $On'm$ che fa la direzione della forza Q con

la lunghezza AB del piano inclinato, con α' l'angolo POP' che fa la direzione della forza P con questa medesima lunghezza, siccome con facilità si vede che α è il complemento di nOE, e α' quello di pOE; potremo mettere la proporzione (1) sotto la forma

$$Q : P :: \cos\alpha' : \cos\alpha,$$

donde otterremo

$$Q\cos\alpha = P\cos\alpha' \ldots\ldots (2),$$

per l'equazione di equilibrio sul piano inclinato.

3. Con facilità concluderemo da ciò che precede che due pesi V e P (*Tav.* CXLIV, *fig.* 3), ritenuti insieme per mezzo di un legame flessibile e che passano pel vertice di due piani inclinati, facendosi equilibrio, che essi starebbero tra loro nel rapporto inverso dei seni degli angoli d'inclinazione del loro piani respettivi, ovvero nel rapporto diretto delle lunghezze di questi piani, vale a dire che si avrebbe

$$V : P :: \text{sen ACB} : \text{sen ABC},$$

e

$$V : P :: AB : AC.$$

4. L'attrito e l'aderenza delle superficie in contatto potendo considerarsi come forze che distruggono una parte della forza Q, modificando necessariamente nella pratica, le condizioni di equilibrio sul piano inclinatu. Per tenerne conto, osserviamo prima di tutto che la pressione esercitata dal corpo sul piano inclinato, proviene non solamente dalla componente di Q, perpendicolare in m (*Tav.* XLI, *fig.* 1), ma ancora dalla componente di P, perpendicolare al medesimo punto, e che queste due componenti agiscono in senso inverso; la prima ha per espressione $Q\,\text{sen}\,\alpha$, e la seconda $P\,\text{sen}\,\alpha'$; questa pressione sarà perciò rappresentata da $Q\,\text{sen}\,\alpha - P\,\text{sen}\,\alpha'$. Così indicando con f il rapporto dell'attrito alla pressione, la forza dovuta a questo attrito sarà

$$(Q\,\text{sen}\,\alpha - P\,\text{sen}\,\alpha')f.$$

Quanto alla forza dovuta all'aderenza, se rappresentiamo con ψ l'intensità di questa forza sopra l'unità di superficie, $A\psi$ rappresenterà la sua intensità per la superficie A del corpo in questione.

Ma nell'azione della forza P si debbono considerate due casi: 1° quello in cui questa forza debba far salire il corpo; 2° quello in cui essa deve solamente impedirgli di discendere. Nel primo caso, la forza P deve vincere l'attrito e l'aderenza; l'equazione di equilibrio è dunque

$$P\cos\alpha' = Q\cos\alpha + (Q\,\text{sen}\,\alpha - P\,\text{sen}\,\alpha')f + A\psi.$$

Nel secondo caso, l'attrito e l'aderenza agiscono in favore di P, e l'equazione di equilibrio è

$$P\cos\alpha' = Q\cos\alpha - (Q\,\text{sen}\,\alpha - P\,\text{sen}\,\alpha')f - A\psi;$$

donde si ricava, in generale,

$$P = \frac{Q(\cos\alpha \pm f\,\text{sen}\,\alpha) \pm A\psi}{\cos\alpha' \pm f\,\text{sen}\,\alpha'},$$

i segni superiori a inferiori rispondendo respettivamente al primo a al secondo caso.

Quando P è paralella al piano, si ha $\alpha' = 0$, e

$$P = Q(\cos\alpha \pm f \operatorname{sen}\alpha) \pm A\psi.$$

INCLINAZIONE. Questa parola, che in generale indica la tendenza scambievola di due linee, di due superficie, o di due corpi l' uno verso l'altro, riceve diversa particolari accezioni secondo gli oggetti ai quali si applica, così:

L' Inclinazione di una retta rapporto ad un'altra retta, o rapporto ad un piano, è l' *angolo* che essa forma con questa retta o con questo piano.

L' Inclinazione di un pianeta, in *astronomia*, è l'angolo che il piano della sua orbita fa col piano dell' ecclittica.

L' Inclinazione di un piano, in *gnomonica*, è l'arco del circolo verticale compreso tra questo piano e il piano dell' orizzonte.

INCOGNITA. Nome che si dà alla quantità che si cerca nella soluzione di un problema.

Aristotile usò le lettera dell' alfabeto per indicare le quantità indeterminate; infatti nella sua fisica, esprime la forza, la massa, lo spazio e il tempo, ec., con le lettere α, β, γ, δ, ec.; esattamente come si farebbe al giorno d'oggi. Del rimanenta anche presso i moderni si erano impiegate le lettere per indicare l' Incognite molto tempo avanti al Viète, al quale bisognerebbe cessare di attribuira questa invenzione.

INCOMMENSURABILE. Due quantità si dicono *incommensurabili*, allorchè esse non possano avere una misura comune. Per esempio, il lato di un quadrato è incommensurabile con la sua diagonale, perchè il lato essendo rappresentato da 1, la diagonale è rappresentata da $\sqrt{2}$, ora non esiste alcun numero, per quanto piccolo sia, che possa esser contenuto esattamente in $\sqrt{2}$, ovvero che divida esattamente $\sqrt{2}$. Egualmente la circonferenza del circolo è incommensurabile col suo raggio.

In generale tutte le quantità della forma $\sqrt[m]{A}$ sono incommensurabili con l' unità, allorchè esse non si riducono a numeri interi per mezzo dell' estrazione delle radici (*Vedi* Algebra). Queste quantità prendono allora il nome di *Numeri irrazionali*. Vedi Irrazionale.

INCOMPRESSIBILITA'. Si ammette come un principio fondamentale nella ricerca delle leggi dell' equilibrio dei liquidi, che questi corpi siano incompressibili (*Vedi* Idrostatica), vale a dire che una massa liquida non provi diminuzione alcuna di volume per effetto delle pressioni che le si facciano subire. Questa ipotesi non è rigorosamente esatta: ma i liquidi rimangono compressi di una quantità tanto piccola sotto le più enormi pressioni, che senza errore sensibile può ammettersi nei calcoli la loro incompressibilità.

Le prime esperienza decisive della piccolissima compressibilità dei liquidi rimontano alla fine del secolo XVII, e sono dovute agli accademici di Firenze. Dopo aver introdotto dell' acqua in una sfera d' argento chiusa esattamente, quei dotti trovarono che comprimendo la sfera per diminuire il suo volume, il liquido trapelava a traverso alle sue pareti. L'acqua, che i medesimi accademici fecero

comprimere in un tubo diritto da una colonna di mercurio di 24 piedi di altezza, non provò diminuzione sensibile di volume, e fu per essi impossibile di scoprire la minima contrazione variando in molte maniere i loro apparecchi e le loro esperienze. Ne conclusero dunque che se l'acqua non era completamente incompressibile, la sua compressibilità non poteva almeno esser misurata.

Quest' ultima opinione era generalmente adottata, quando nel 1761 Giovanni Canton intraprese delle nuove esperienze con un apparecchio di sua invenzione, che gli permise non solo di riconoscere la compressibilità dell'acqua, ma ancora di misurarne la quantità, che calcolò $\frac{1}{22710}$ del volume primitivo, per ogni atmosfera di pressione (*Vedi* Forza elastica). Perkins nel 1819, e Oersted nel 1823, confermarono i fatti annunziati da Giovanni Canton, e trovarono con mezzi differenti, il primo una compressione di 0,000048 per atmosfera, e il secondo una compressione di 0,000045.

Nessuno di questi osservatori aveva preso in considerazione la compressione dei vasi, e restavano a farsi delle prove consimili sopra altri liquidi diversi dall'acqua: ciò fu fatto dai sigg. Coladon e Sturm, le cui esperienze si trovano descritte in una memoria presentata all' Accademia delle Scienze di Parigi nel 1827 e premiata da quel corpo scientifico.

Ecco i loro resultati.

Contrazione assoluta per un' atmosfera.

Mercurio a 0°	0,0000503
Acqua stillata priva d'aria a 0°	0,0000513
Acqua stillata non priva d'aria a 0°	0,0000495
Acool a 11,6 (per la 2ª atmosfera)	0,0000961
" (per la 9ª)	0,0000935
" (per la 12ª)	0,000089
Etere solforico a 0° (dalla 1ª alla 3ª)	0,000133
" (dalla 3ª alla 26ª)	0,000122
Etere solforico a 11°,4 (dalla 1ª alla 3ª)	0,00015
" (dalla 3ª alla 21ª)	0,000141
Acqua saturata d'ammoniaca a 10°	0,000038
Etere nitrico concentrato a 0°	0,0000715
Etere acetico a 12°	0,0000793
"	8,0000713
Etere cloridrico a 11°,2 (dalla 1ª alla 3ª)	0,0000859
" (dalla 6ª alla 12ª)	0,00008225
Acido acetico a 0°	0,0000422
Acido solforico a 0°	0,000032
Acido nitrico a 2.403 di densità	0,0000322
Essenza di trementina a 0°	0,000073

Queste esperienze, eseguite sotto le pressioni da 1 a 24 atmosfere, hanno pro-

vato che la contrazione dei liquidi non è proporzionale alla pressione, ma diminuisce sensibilmente a misura che la pressione è più grande.

I numeri di questa tavola, confrontati con quelli che esprimono la dilatazione dei liquidi per effetto del calore (*Vedi* Calorico), dimostrano la forza enorme che sviluppa il calorico per produrre questa dilatazione; poichè è evidente che la forza colla quale i corpi tendono ad aumentare di volume per effetto dell'aumentata di temperatura è eguale allo sforzo che bisognerebbe fare per comprimerli di una quantità eguale alla dilatazione. Profitteremo intanto di questa occasione per prevenire i nostri lettori che a proposito della dilatazione dei corpi è corso un errore gravissimo nelle tavole del nostro articolo Calorico: i numeri di queste tavole non esprimono la quantità di dilatazione corrispondente all'accrescimento di *un grado* di temperatura, come potrebbe credersi dal titolo delle tavole stesse, ma quella bensì che corrisponde ad un accrescimento di temperatura di *cento gradi* a partire da 0°. La dilatazione per 1° non è dunque che la *centesima parte* del numero dato dalla tavola, e il calcolo della pagina 245 è affatto inesatto perchè sarebbe stato necessario di fare $l=0{,}0000122$ invece di $l=0{,}00122$, il che avrebbe prodotto per la lunghezza cercata $L''=2^m{,}5001525$. Lo stesso errore si trova nell'ultima edizione del *Trattato di fisica* del sig. Péclet, dal quale abbiamo estratto le nostre tavole.

INCREMENTO. Sotto questo nome il Taylor, e dopo lui molti geometri, indicano l'accrescimento di una quantità variabile, o la Differenza di questa quantità. *Vedi* Differenza.

INDEFINITO. *Vedi* Infinito.

INDETERMINATO. Nelle matematiche, si chiamano comunemente, *quantità indeterminate* o *variabili*, quelle che possono cangiare di grandezza.

Un problema dicesi *indeterminato*, quando può ammettere un numero infinito di soluzioni differenti. Per esempio, se si domandasse un numero che sia nel medesimo tempo divisibile per 2 e per 3, si proporrebbe un problema indeterminato, poichè questo numero può essere 6, 12, 18, 24, 30, 36, ec. all'infinito.

Si è dato il nome di *Analisi indeterminata*, alla parte dell'algebra la quale tratta della soluzione dei problemi indeterminati.

Analisi indeterminata. Un problema dicesi *indeterminato*, quando il numero delle equazioni che esprimono le condizioni dimandate è minore di quello dell'incognite; poichè allora per risolverlo divien necessario, di determinare arbitrariamente una o più di queste incognite. Se, per esempio, si domandassero due numeri tali che la somma del *doppio* del primo e del *triplo* del secondo sia eguale a 20, indicando questi numeri con x ed y, si avrebbe l'equazione

$$2x+3y=20,$$

la quale è insufficiente per determinare l'incognite (*Vedi* Equazione); ora, risolvendo quest'equazione rapporto ad x, si ottiene

$$x=\frac{20-3y}{2},$$

ed è evidente che dando ad y un valore arbitrario, otterremo sempre per x un valore corrispondente, dimodochè questi due valori daranno la soluzione del problema, che può essere così risoluto in un'infinità di maniere differenti, poichè possiamo prendere per y tutti i numeri interi, frazionari e ancora irrazionali positivi, o negativi.

Ma se si mettesse, come condizione, che i due numeri x ed y fossero interi e

positivi, non vi sarebbero che sole tre soluzioni, cioè:

$$y=2, \text{ che dà } x=7, \text{ donde } 2.7+3.2=20,$$
$$y=4, \quad x=4, \quad 2.4+3.4=20,$$
$$y=6, \quad x=1, \quad 2.1+3.6=20.$$

Ed è propriamente questa soluzione, in numeri *interi positivi*, dalle equazioni indeterminate, che forma l'oggetto dell'ANALISI INDETERMINATA. Quando però si tratta di equazioni di grado superiore al primo, la soluzione generale comprende tutti i valori *razionali* positivi e negativi che possono soddisfarle.

Ma, considerata *in concreto* la soluzione in numeri interi o generalmente in numeri razionali di un'equazione indeterminata, si riporta sempre alla ricerca di una forma particolare di generazione dei numeri interi o frazionari capaci di dare quelli che possono soddisfare all'equazione. Per esempio, le due forme

$$1+3t, \quad 6-2t,$$

nelle quali t è un numero qualunque, daranno sempre evidentemente numeri interi per qualunque valore intero di t, e questi numeri, così formati, saranno positivi solamente da $t=0$ fino a $t=2$, poichè per $t=0$, si ha

$$1+3t=1, \quad 6-2t=6,$$

per $t=1$

$$1+3t=4, \quad 6-2t=4,$$

per $t=2$,

$$1+3t=7, \quad 6-2t=2;$$

qualunque altro valore di t darebbe valori negativi. Queste due forme contengono dunque la soluzione in numeri interi e positivi dell'equazione di sopra

$$2x+3y=20,$$

soluzione che effettivamente riposa sopra le eguaglianze

$$x=1+3t,$$
$$y=6-2t,$$

nelle quali t è un numero intero da 0 fino a 2.

La ricerca delle forme particolari della generazione dei numeri, e, più generalmente, le proprietà, tanto di *generazione*, quanto di *rapporto* dei numeri, costituiscono un ramo dell'algebra chiamato TEORIA DEI NUMERI, di cui l'*analisi indeterminata* è essa medesima una parte: quella in cui i numeri che si considerano dipendono dal valore delle quantità per mezzo delle quali essi sono dati, rimangono indeterminati. (*Vedi* TEORIA DEI NUMERI).

La Teoria dei numeri, o almeno l'Analisi indeterminata, sembra esser la parte della scienza generale dei numeri la cui conoscenza è più antica. Da alcuni principii consegnati nell'opera d'Euclide, si vede che ricerche assai estese erano di già state fatte, avanti di lui, sopra le proprietà dei numeri, e ciò che ci resta di Diofante non è che un trattato di analisi indeterminata, il quale contiene delle questioni difficili risolute con molta destrezza. Sembra egualmente, da un'*Algebra indiana*, pubblicata da pochi anni, che gl'Indiani sono da lunghissimo tempo in possesso delle diverse conoscenze sopra questo ramo della scien-

za, e che fino dal dodicesimo secolo essi avevano scoperto delle regole per la soluzione di certe equazioni indeterminate. Quello che possiamo dire di questa antichità della Teoria dei numeri, si è che, i suoi veri progressi non risalgono più lungi che al tempo del Viète e del Bachet di Meziriaco. Ed è a quest' ultimo che dobbiamo la soluzione generale dell' equazioni indeterminate del primo grado.

Poco dopo, il Fermat, uno dei più gran geometri del suo secolo, fece fare un passo immenso alla Teoria dei numeri scoprendo un gran numero di teoremi interessanti, di cui la dimostrazione di alcuni occupa ancora i moderni matematici; poichè, secondo ciò che erano consueti i geometri del secolo decimo settimo, nascondevano i loro metodi per proporsi delle disfide, il Fermat pubblicò le sue scoperte senza la dimostrazione e fra quelle che abbiamo ritrovate nelle sue carte, dobbiamo essere afflitti che le più importanti mancano.

L' Eulero, il cui nome si ritrova in tutte le parti delle matematiche, non poteva lasciare la teoria dei numeri nella dimenticanza che successe tutta ad un tratto alla specie di entusiasmo che essa aveva eccitato fino alla morte del Fermat. Dimenticanza assai naturale allora, poichè essa veniva cagionata dalla nuova direzione che apportava ai geometri la scoperta del calcolo differenziale. Nelle numerose memorie, pubblicate nei *commentarj di S. Pietroburgo*, l' Eulero ha esteso le nostre conoscenze sopra i numeri, e ad esso dobbiamo una folla di scoperte, fra le quali dobbiamo citare la risoluzione generale dell' equazioni indeterminate del secondo grado, nel caso in cui già si conosce una soluzione particolare. Finalmente il Lagrange, il Legendre e il Gauss, con i loro ulteriori lavori, hanno portato la teoria dei numeri ad un grado di sviluppo eguale a quello degli altri rami dell' Algebra.

Ed è al Gauss particolarmente, il quale ha dato una forma sistematica alla teoria dei numeri, introducendo nella scienza la considerazione del principio di *congruenza* (*Vedi* CONGRUENZA), del quale altrove esporremo la deduzione filosofica (*Vedi* TEORIA DEI NUMERI), che ne siamo debitori. In quest' articolo ci limiteremo, a far conoscere la risoluzione generale dell' equazione indeterminata del secondo grado, dovuta al Lagrange; quella dell' equazione del primo grado essendo già stata data alla parola CONGRUENZA, (n.° 10) Quanto all' equazioni dei gradi superiori al secondo non esistono ancora metodi generali per risolverle.

1. Possiamo sempre riportare un' equazione del secondo grado a due incognite alla forma

$$x^2-My^2=N,$$

poichè, quest' equazione interamente completa essendo (*Vedi* EQUAZIONE),

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

possiamo cominciare da scriverla, come segue

$$ax^2+(by+d)x=-cy^2-ey-f.$$

Moltiplichiamo quindi i due membri per $4a$ e si aggiunga da una parte e dal l' altra $(by+d)^2$, avremo

$$4a^2x^2+4a(by+d)x+(by+d)^2=(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f),$$

ma il primo membro essendo un quadrato perfetto, verrà

$$2ax+by+d = \sqrt{\left[(by+d)^2 - 4a(cy^2+ey+f)\right]}$$

$$= \sqrt{\left\{(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+d^2-4af\right\}}$$

così, facendo

$$b^2-4ac = \text{A},$$
$$bd-2ae = g,$$
$$d^2-4af = h,$$

e di più indicando il radicale con t, otterremo le due equazioni

$$2ax+by+d = t,$$
$$\text{A}y^2+2gy+h = t^2,$$

moltiplicando ora l'ultima per A, essa diventerà

$$\text{A}^2y^2+2g\text{A}y+\text{A}h = \text{A}t^2,$$

ovvero ancora

$$\text{A}^2y^2+2g\text{A}y+g^2+\text{A}h-g^2 = \text{A}t^2,$$

vale a dire,

$$(\text{A}y+g)^2-\text{A}t^2 = g^2-\text{A}h,$$

facendo dunque

$$\text{A}y+g = u,$$
$$g^2-\text{A}h = \text{B},$$

otterremo definitivamente

$$u^2-\text{A}t^2 = \text{B},$$

che è la forma in questione.

Risalendo ad x e y, si ha

$$y = \frac{u-g}{\text{A}}, \quad x = \frac{t-by-d}{2a},$$

donde si vede che, tutti i numeri che soddisfaranno alla trasformata, daranno immediatamente la soluzione dell'equazione generale.

2. I numeri u, t, potendo essere numeri interi o frazionari, se gli supponiamo ridotti al medesimo denominatore, ovvero se facciamo in generale

$$u = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z},$$

la trasformata diventerà

$$x^2 - \text{A}y^2 = \text{B}z^2,$$

nella quale x, y e z sono numeri interi. Ed è quest'ultima equazione che si tratta di risolvere.

3. Supporremo di più, 1° che i numeri x, y, z, siano primi tra loro, il che è sempre possibile, poichè nel caso in cui questi numeri avessero un comun divisore, si farebbe sparire dividendo; 2° che A e B non abbiano alcun divisore

quadrato, poichè in caso contrario, se, per esempio, si potesse porre $A = A'\alpha^2$, $B = B'\beta^2$; facendo $\alpha y = y'$ e $\beta z = z'$, l'equazione diventerebbe

$$x^2 - A'y'^2 = B'z'^2$$

e riunirebbe allora le condizioni domandate.

Premesso ciò, è evidente che due qualunque delle quantità x, y, z non possono avere alcun fattore comune, poichè se n dividesse x ed y, per esempio, n^2 dividerebbe x^2 e y^2, e dovrebbe conseguentemente dividere Bz^2, ma n^2 non potrebbe dividere z^2, poichè x, y, z non hanno verun comun divisore, esso non potrebbe nemmeno dividere B poichè questo numero non ha fattore quadrato; dunque x ed y sono primi tra loro, e segue il medesimo di x e z e di y e z.

4. Sia dunque proposta l'equazione

$$x^2 - Ay^2 = Bz^2 \ldots\ldots (1),$$

avente tutte le condizioni enunciate di sopra, e nella quale supporremo inoltre A e B positivi e $B > A$. Quest'ultima condizione è sempre possibile, poichè l'equazione proposta può mettersi sotto la forma

$$x^2 - Bz^2 = Ay^2,$$

vale a dire, che possiamo prendere per secondo membro il termine cha ha il più gran coefficiente.

Ora, se l'equazione (1) è risolubile in numeri interi, siccome i valori di x sono dipendenti da quelli di y, potremo dare ai primi la forma

$$x = ny - By'$$

n ed y' essendo due quantità indeterminate, sostituendo questa forma invece di x nell'equazione (1), otterremo, dopo aver diviso per B,

$$\left(\frac{n^2 - A}{B}\right) y^2 - 2nyy' + By'^2 = z^2 \ldots (2);$$

ma B ed y son primi tra loro, poichè qualunque divisore comune tra B e y^2, dividerebbe x^2 e noi abbiamo veduto che x ed y sono primi tra loro: così l'equazione (2) non può sussistere se $\frac{n^2 - A}{B}$ non è un numero intero. Facciamo dunque questo intero, che in seguito insegneremo a determinare, eguale a $B'k^2$, k^2 essendo il più gran quadrato che possa dividerlo, e l'equazione (2) diventerà

$$B'k^2y^2 - 2nyy' + By'^2 = z^2 \ldots (3).$$

Facciamo in quest'ultima, dopo averla moltiplicata per $B'k^2$,

$$B'k^2y - ny' = x', \quad kz = z',$$

essa diventerà

$$x'^2 - Ay'^2 = B'z'^2,$$

trasformata esattamente simile alla proposta, ma nella quale B' sarà minore di B. Infatti, se vi è un valore qualunque di n che renda $n^2 - A$ divisibile per B,

aggiungendo a questo valore un multiplo qualunque di B, ovvero sottraendolo, $n^2 \pm \mu B - A$ sarà ancora divisibile per B; così possiamo supporre che il valore di n sia compreso tra i limiti o e B, ed egualmente tra i limiti più stretti o e $\frac{1}{2}$B; dunque n essendo minore di $\frac{1}{2}$B, $\frac{n^2-A}{Bk^2}$, ovvero B', sarà $< \frac{1}{4}$B, e nel medesimo tempo positivo.

Se si avesse ancora $B' > A$, si potrebbe, operando nella medesima maniera, trasformare

$$x'^2 - Ay'^2 = B'z'^2,$$

in

$$x''^2 - Ay''^2 = B''z''^2,$$

nella quale B'' sarebbe $< \frac{1}{4}$B', e sempre positivo. Nel caso in cui si avesse ancora $B'' > A$, si continuerebbe questo sistema di trasformazione fintantochè non si giunga ad un' equazione

$$x^2 - Ay^2 = Cz^2,$$

tale che C sia più piccolo di A.

Allora dopo aver fatto passare nel primo membro il termine che ha il più piccolo coefficiente, il che dà

$$x^2 - Cz^2 = Ay^2,$$

si procederà, come qui sopra, alla riduzione del coefficiente A, fintantochè si trovi una trasformata

$$x^2 - Cz^2 = Dy^2,$$

nella quale D sarà $< C$.

Continuando queste riduzioni, giungeremo necessariamente ad un' ultima trasformata della quale uno dei coefficienti sarà l' unità, poichè i numeri B, A, C, D essendo positivi e decrescenti, debbono terminare con l' unità. Giunti a questo punto, l' equazione finale la quale sarà

$$x^2 - y^2 = Mz^2, \quad \text{ovvero} \quad x^2 - z^2 = My^2,$$

può risolversi immediatamente, e la sua soluzione farà conoscere quelle di tutte le equazioni precedenti, e finalmente quella della proposta.

5. Avanti di procedere alla soluzione dell' equazione finale, dobbiamo fare osservare che per passare da una trasformata

$$x'^2 - Ay'^2 = B'z'^2,$$

alla seguente

$$x''^2 - Ay''^2 = B''z''^2$$

non si ha bisogno di adempire una nuova condizione, e che avendo digià trovato

$$\frac{n^2-A}{B} = B'k^2, \quad \text{donde} \quad \frac{n^2-A}{B'} = Bk^2,$$

se si fa $n = mB' + n'$, e che si prenda l' indeterminata m in modo che n' sia

$< \frac{1}{2}B'$, si avrà necessariamente per

$$\frac{n'^2-A}{B'}$$

un numero intero positivo più piccolo di $\frac{1}{4}B'$.

6. Per risolvere l'equazione finale, che supporremo

$$x^2-y^2=Mz^2,$$

decomponiamo M in due fattori α e β, e concepiamo z decomposto ancora in due fattori p e q; avremo $M=\alpha\beta$, $z=pq$, e l'equazione diventerà

$$x^2-y^2=(y+y)(x-y)=\alpha\beta p^2q^2.$$

Potremo dunque porre

$$x+y=\alpha p^2, \quad e \quad x-y=\beta q^2,$$

il che darà

$$x=\frac{\alpha p^2+\beta q^2}{2},$$

$$y=\frac{\alpha p^2-\beta q^2}{2},$$

$$z=pq.$$

Così, le tre indeterminate saranno espresse per mezzo di due numeri arbitrari p e q. Se i valori di x e di y contenessero il fattore $\frac{1}{2}$ si farebbe sparire moltiplicando nel medesimo tempo x, y e z per 2.

La soluzione dell'equazione $x^2-y^2=Mz^2$ comprenderà perciò tante formule particolari quante maniere vi sono di decomporre M in due fattori. Per esempio, se $M=15$, siccome non vi sono che due decomposizioni, cioè 1 e 15, 3 e 5, otterremo le seguenti due soluzioni da $x^2-y^2=15z^2$.

I	II
$x=p^2+15q^2$,	$x=3p^2+5q^2$
$y=p^2-15q^2$,	$y=3p^2-5q^2$
$z=2pq$.	$z=2pq$.

7. L'applicazione di queste formule ai casi particolari, spesso conduce a lunghi calcoli che possiamo abbreviare, quando non vogliamo che valori interi, per mezzo di un gran numero di artifizi, ma noi non possiamo fermarcisi.

Questo metodo non è il più semplice nè il più corto, per giungere alla risoluzione effettiva dell'equazione proposta: ma la strada che esso prescrive per operare la diminuzione successiva dei coefficienti, è assai chiara, e quanto prima da ciò ne dedurremo un teorema generale sopra la possibilità dell'equazioni indeterminate del secondo grado.

8. È necessario prevenire una difficoltà che avrebbe luogo quando due coefficienti fossero eguali.

Sia perciò $A = B$; in questo caso per fare in modo che $\frac{n^2 - A}{B}$ sia un intero, sembra che si debba fare $n = 0$, e allora si avrebbe

$$B'k^2 = -1,$$

ovvero

$$B' = -1,$$

il che non si accorda con la supposizione che si fa sempre che B' sia positivo. Ma questa difficoltà si risolve con facilità, poichè se invece di prendere $n = 0$, si prende $n = B$, si avrà

$$\frac{n^2 - B}{B} = B - 1,$$

che sarebbe il valore di $B'k^2$.

Si vede dunque che l' equazione

$$y^2 - By^2 = Bz^2,$$

avrà per trasformata

$$x'^2 - By'^2 = B'z'^2,$$

nella quale B' sarà $< B$ e positivo. Si farebbe il medesimo, se nel corso dell'operazione si trovasse

$$C = B, \quad o \quad D = C, \text{ ec.}$$

Quest' osservazione fa vedere, che nel caso di $A = B$ e altri simili, il metodo esposto è ciò non ostante applicabile, e che quindi esso ha tutta la generalità possibile. Del rimanente, il caso di cui si tratta, può sciogliersi in un modo più semplice e più diretto; poichè se si ha l' equazione

$$x^2 - Ay^2 = Az^2,$$

si vede subito che x dev' essere divisibile per A, così possiamo fare

$$x = Au,$$

il che darà sostituendo

$$y^2 + z^2 = Au^2.$$

In quest' equazione, z ed A sono primi tra loro (poichè altrimenti y e z non lo sarebbero); così possiamo supporre

$$y = nz + Ay',$$

il che darà

$$\frac{n^2 + 1}{A} z^2 + 2nzy' + Ay'^2 = u^2.$$

Questa non può sussistere, se non che quando $\frac{n^2 + 1}{A}$ non sia un intero, si chiami quest' intero $A'k^2$, k^2 essendo il più gran quadrato che possa dividerlo, ed avremo

$$A'k^2z^2 + 2nzy' + Ay'^2 = u^2.$$

Moltiplicando da una parte e dall' altra per $A'k^2$, e facendo

$$k^2A'z+ny'=z',$$
$$ku=u',$$

si avrà

$$z'^2+y'^2=A'u'^2$$

dimodochè l'equazione proposta $z^2+y^2=Au^2$ sarà riportata ad un' equazione della medesima forma, nella quale A' è positivo e $< \frac{1}{4}A+\frac{1}{A}$. Continuando così di trasformata in trasformata, i numeri positivi e decrescenti A, A', A'', ec. finiranno necessariamente con l'unità, e allora l'ultima equazione essendo risolubile immediatamente, se ne dedorrà la soluzione di tutte le precedenti. Non vi sarà dunque in questo caso altra condiziona per la possibilità dell' equazione, che la prima

$$\frac{n^2+1}{A}=e,$$

poichè le altre sono una conseguenza di questa.

Nella soluzione generale, al contrario, oltre la prima condiziona

$$\frac{n^2-A}{B}=e,$$

bisogna che a misura che si passa da un sistema di trasformate ad un altro sistema, si possa soddisfare alle diverse condizioni

$$\frac{n'^2-B}{C}=e, \quad \frac{n'^2-C}{D}=e,$$

e così dell'altre.

9. Abbiamo fatto vedere, che qualunque equazione indeterminata del secondo grado può ridorsi alla forma

$$x^2-By^2=Az^2,$$

nella quale A e B sono numeri interi positivi, privi di qualunque fattore quadrato, e si ha nel medesimo tempo $A>B$.

Premesso ciò, per procedere alla risoluzione, bisogna cominciare a determinare un numero α più grande di $\frac{1}{2}A$, tale che $\frac{\alpha^2-B}{A}$ sia un intero. Questo numero essendo trovato, si forma la serie di equazioni:

$$\alpha^2-B=AA'k^2$$

$$\alpha'^2-B=A'A''k'^2 \qquad \alpha'=\mu A'\pm\alpha<\frac{1}{2}A'$$

$$\alpha''^2-B=A''A'''k''^2 \qquad \alpha''=\mu'A''\pm\alpha'<\frac{1}{2}A''$$

ec.

Nella prima, $A'k^2$ è il quoziente di α^2-B diviso per A, k^2 è il più gran quadrato che divide $A'k^2$, dimodochè A' non contiene che fattori semplici, come

pure A e B, e questo è ciò che osserveremo negli altri valori simili. A' essendo determinato, si ha α' dall'equazione $\alpha' = \mu A' \pm \alpha$, osservando di prendere l'indeterminata μ in modo che α' sia $< \frac{1}{2} A'$, (il segno $<$ non escludendo l'eguaglianza). α' essendo conosciuto, $\alpha'^2 - B$ è necessariamente divisibile per A'; s'indica il quoziente con $A'' k'^2$, e si continua egualmente a formare le altre equazioni.

Per mezzo di queste operazioni, la serie A, A', A'', ec. della quale ciascun termine è positivo e minore del quarto del precedente, decrescerà in una maniera rapida, fino a tanto che si giunga ad un termine $A^{(n)}$ o C minore di B; e l'eguaglianza proposta avrà per trasformate successive le equazioni seguenti, (ove per maggior semplicità lascio le indeterminate senza accenti):

$$x^2 - By^2 = A'z^2,$$
$$x^2 - By^2 = A''z^2,$$
$$\vdots$$
$$x^2 - By^2 = Cz^2,$$

equazioni talmente legate tra loro, che se si conosce la soluzione di una sola, si avrà immediatamente quella di tutte le altre, e per conseguenza quella dell'equazione proposta.

In questo primo sistema di trasformate, non vi è alcuna condizione da adempire, se non che la prima

$$\frac{n^2 - B}{A} = e.$$

Ma poichè C è $< B$, l'ultima trasformata essendo messa sotto la forma

$$x^2 - Cz^2 = By^2,$$

bisognerà perchè essa sia risolubile che si possa trovare un numero θ tale che $\theta^2 - C$ sia divisibile per B; questa condizione essendo adempita, si procederà alla diminuzione di B con un secondo sistema di trasformate,

$$x^2 - Cz^2 = B'y^2,$$
$$x^2 - Cz^2 = B''y^2,$$
$$\vdots$$
$$x^2 - Cz^2 = Dy^2,$$

nel quale la serie B, B', B'', ec. . . . . sarà prolungata fino a tanto che si giunga ad un termine $D < C$.

Si continuerà così la serie dei numeri decrescenti A, B, C, D, ec. fintanto che si giunga ad un termine eguale all'unità, e allora la questione sarà risoluta.

10. È facile vedere che in nessun punto saremo arrestati nel corso di quest'operazione, quando considerando una trasformata qualunque

$$x^2 - Fy^2 = Gz^2,$$

si potrà soddisfare alle due condizioni

$$\frac{\lambda^2 - F}{G} = e, \quad \frac{\mu^2 - G}{F} = e.$$

Ora se queste due condizioni sono adempite nell' equazione proposta

$$x^2 - By^2 = Az^2,$$

e nella sua prima trasformata

$$x^2 - By^2 = A'z^2,$$

dico che esse lo saranno in tutte le altre; dimodochè allora l' equazione proposta sarà necessariamente risolubile.

Supponendo dunque che le due condizioni menzionate abbiano luogo nelle due prime equazioni

$$x^2 - By^2 = Az^2,$$
$$x^2 - By^2 = A'z^2.$$

vale a dire che vi siano degli interi α, 6, α', $6'$ tali, che

$$\frac{\alpha^2 - B}{A}, \quad \frac{\alpha'^2 - B}{A'}, \quad \frac{6^2 - A}{B}, \quad \frac{6'^2 - A'}{B}$$

siano interi, bisogna provare che condizioni simili hanno luogo nella seguente trasformata

$$x^2 - By^2 = A''z^2.$$

Ora siccome abbiamo digià

$$\frac{\alpha''^2 - B}{A''} = A'k'^2,$$

è sufficiente far vedere che esiste un intero $6''$ tale che

$$\frac{6''^2 - A''}{B} = e.$$

Sia θ uno dei numeri primi che dividono B, abbiamo digià, dalle condizioni date:

$$\frac{6^2 - A}{\theta} = e, \quad \frac{6'^2 - A'}{\theta} = e.$$

Mediante ciò cerchiamo un numero λ tale che

$$\frac{\lambda^2 - A''}{\theta} = e.$$

Se A'' è divisibile per θ, non vi è alcuna difficoltà; supponiamo dunque che A'' non sia divisibile per θ, distinguo due casi, secondo che θ divide e non divide A'.

1.° Se θ divide A', esso dividerà α ed α' in virtù dell'equazioni

$$\alpha^2 - B' = AA'k^2, \quad \alpha' = \mu A' \pm \alpha.$$

D'altra parte si ha

$$A''k'^2 = \frac{\alpha'^2 - B}{A'} = \frac{(\mu A' \pm \alpha)^2 - B}{A'} = \mu^2 A' \pm 2\mu\alpha + Ak^2;$$

dunque $\dfrac{Ak^2 - A''k'^2}{\theta}$ è un intero; aggiungendo $\dfrac{6^2k^2 - Ak^2}{\theta}$ che è egualmente

uo intero, si avrà

$$\frac{6^2k^2 - A''k'^2}{\theta} = e.$$

Ma k' è primo con B, e per conseguenza con θ, poichè se k' e B avessero un comun divisore, bisognerebbe, dall'equazione $\alpha'^2 - B = A'A''k'^2$, che B fosse un fattore quadrato, il che è contro la sopposizione; dunque possiamo fare

$$k6 = nk' - m\theta,$$

e così avremo

$$\frac{n^2k'^2 - A''k'^2}{\theta} = e,$$

ovvero semplicemente

$$\frac{n^2 - A''}{\theta} = e.$$

2.° Se θ non divide A', nè per conseguenza $6'$, dall'eqoazione

$$\frac{6'^2 - A}{\theta} = e,$$

si comincerà dal dedurre

$$\frac{A''k'^2 6'^2 - A'A''k'^2}{\theta} = e,$$

ovvero

$$\frac{A''k'^2 6'^2 - \alpha'^2}{\theta} = e.$$

Inseguito, poichè $6'k'$ e θ sono primi tra loro, si potrà fare $\alpha' = n6'k' - m\theta$, il che darà

$$\frac{n^2 - A''}{\theta} = e.$$

Da questa dimostrazione, che ha luogo per tutti i fattori primi di B, si vede che non solamente l'equazione

$$\frac{6''^2 - A''}{B} = e$$

è possibile, ma che è facile di trovare *a priori* il valore di $6''$. Dunque tutte l'equazioni

$$x^2 - By^2 = A''z^2$$
$$x^2 - By^2 = A'''z^2$$
ec. ec.

ove B è il medesimo, non offriranno verun segno d'impossibilità.

Facciamo ora vedere che la medesima cosa ha luogo nel secondo sistema di trasformate ove, conservando un medesimo valore di C, si fa percorrere a B la serie decrescente B', B'', ec.

11. Le due ultime equazioni del primo sistema essendo

$$x^2 - By^2 = A^{(n-1)}z^2$$
$$x^2 - By^2 = A^{(n)}z^2 = Cz^2$$

(ove n ed $n-1$ sono degli indici e non degli esponenti), possiamo supporre che quest' equazioni soddisfacciano digià alle condizioni

$$\frac{\alpha^2 - B}{A^{n-1}} = e, \quad \frac{\beta^2 - A^{n-1}}{B} = e,$$

$$\frac{\alpha'^2 - B}{A^n} = e, \quad \frac{\beta'^2 - A^n}{B} = B'f^2;$$

e si tratta di provare che nella trasformata seguente,

$$x^2 - A^n y^2 = B's^2,$$

(che appartiene al secondo sistema), si può soddisfare alle due condizioni

$$\frac{\varphi^2 - A^n}{B'} = e, \quad \frac{\psi^2 - B'}{A^n} = e.$$

Ora la prima è immediatamente adempita dall' equazione

$$\frac{\beta'^2 - A^n}{B} = Bf^2,$$

rimane dunque da far vedere che possiamo sempre soddisfare alla seconda

$$\frac{\psi^2 - B'}{A^n} = e.$$

Indichiamo con θ uno dei numeri primi che dividono A^n e cerchiamo il numero ψ tale che si abbia

$$\frac{\psi^2 - B'}{\theta} = e.$$

Se B' è divisibile per θ, si avrà $\psi = 0$, o un multiplo di θ. Se B' non è divisibile per θ, vi saranno due casi da considerare.

1.° Se θ è divisore di B, esso lo sarà di α e di β', in virtù dell' equazioni

$$\alpha^2 - B = A^n A^{n-1} k^2,$$
$$\beta'^2 - A^n = BB'f^2,$$

si potrà dunque stabilire questo seguito d' interi i quali derivano gli uni dagli altri per mezzo delle sostituzioni, ovvero operazioni semplicissime:

$$\frac{\beta^2 - A^{n-1}}{\theta} = e,$$

$$\frac{k^2\beta^2 A^n - k^2 A^n A^{n-1}}{\theta^2} = e,$$

$$\frac{k^2\beta^2 A^n + B}{\theta^2} = e.$$

$$\frac{(\beta'^2-BB'f^2)k^2\beta^2+B}{\theta^2}=e,$$

$$\frac{BB'f^2k^2\beta^2-B}{\theta^2}=e,$$

$$\frac{B'f^2k^2\beta^2-1}{\theta}=e,$$

$$\frac{B'^2f^2k^2\beta^2-B'}{\theta}=e.$$

Sia dunque $\psi=B'fk\beta$, e si avrà

$$\frac{\psi^2-B'}{\theta}=e.$$

2.° Se θ non divide B, esso non dividerà nè α nè β', si avrà dunque successivamente

$$\frac{\alpha^2-B}{\theta}=e,$$

$$\frac{\alpha^2f^2B'-f^2BB'}{\theta}=e,$$

$$\frac{\alpha^2f^2B'-\beta'^2}{\theta}=e.$$

Ma αf e θ essendo primi tra loro, possiamo supporre

$$\beta'=\psi\alpha f-m\theta,$$

il che darà

$$\frac{\psi^2-B'}{\theta}=e.$$

Il medesimo ragionemento avendo luogo rapporto a tutti i divisori primi di A", ne segue che si potrà sempre soddisfare all' equazione

$$\frac{\psi^2-B'}{A''}=e.$$

12. Dunque l' eqnazione

$$x^2-By^2=Az^2$$

sarà risolubile, se possiamo soddisfare alle due condizioni

$$\frac{\alpha^2-B}{A}=e,\quad \frac{\beta^2-A}{B}=e,$$

e se, di più, nella prima trasformata

$$y^2-By^2=A'z^2,$$

possiamo soddisfare alla terza condizione

$$\frac{6'^2 - A'}{B} = e$$

Quest'ultima condizione sarebbe inutile, come quanto prima dimostreremo, se i due numeri A e B fossero primi tra loro; ma la proposizione generale è adatta ad essere presentata in un modo nel medesimo tempo più semplice e più elegante.

Cominciamo dall' osservare che qualunque equazione indeterminata del secondo grado può essere riportata alla forma

$$ax^2 + by^2 = cz^2,$$

nella quale i coefficienti a, b, c son positivi, non hanno due a due alcun divisore comune, e di più son privi di qualunque fattore quadrato. Ciò che concerne i segni è manifesto, poichè qualunque equazione formata con tre quantità, esiga che una di queste quantità sia eguale alla somma delle due altre. Inseguito se a contenesse un fattore quadrato θ^2, si farebbe

$$a = \theta^2 a', \quad x' = \theta x,$$

e il termine ax^2 si cangerebbe in $a'x'^2$, ove a' non ha più alcun fattore quadrato. Finalmente se due dei tre coefficienti a, b, c, per esempio a e b, avessero un divisore comune θ, si farebbe

$$a = a'\theta, \quad b = b'\theta, \quad c\theta = c', \quad z = z'\theta,$$

e l' equazione

$$ax^2 + by^2 = cz^2,$$

sarebbe cangiata in un' altra

$$a'x^2 + b'y^2 = c'z'^2,$$

nella quale a' e b' non hanno più un comun divisore.

Premesso ciò, la nuova equazione

$$ax^2 + by^2 = cz^2,$$

essendo messa sotto la forma

$$\left(\frac{cz}{x}\right)^2 - bc\left(\frac{y}{x}\right)^2 = ac,$$

può assomigliarsi alla formula

$$x^2 - By^2 = Az^2,$$

e il paragone darà

$$B = bc, \quad A = ac.$$

Si avrà dunque, prima di tutto le due condizioni da adempire

$$\frac{\alpha^2 - bc}{ac} = e, \quad \frac{6^2 - ac}{bc} = e.$$

Sia $\alpha = c\mu$, $\mathcal{C} = c\nu$, queste condizioni diventeranno

$$\frac{c\mu^2 - b}{a} = e, \quad \frac{c\nu^2 - a}{b} = e.$$

Per esprimere la terza

$$\frac{\mathcal{C}'^2 - A'}{B} = e,$$

osserviamo che si ha

$$\alpha^2 - B = AA'k^2, \quad \text{ovvero} \quad c\mu^2 - b = aA'k^2,$$

e siccome ak^2 non ha verun comun divisore con bc, l' ultima condizione sarà adempita se si ha

$$\frac{ak^2\mathcal{C}'^2 - c\mu^2 + b}{ac} = e.$$

Ora perchè il numeratore di questa quantità sia divisibile per b, basta che $ak^2\mathcal{C}'^2 - c\mu^2$ lo sia, ovvero mettendo $c\nu^2$ invece di a in virtù della seconda condizione, bisognerà che $k^2\mathcal{C}'^2\nu^2 - \mu^2$ sia divisibile per b, il che è sempre possibile, determinando $\mathcal{C}'$ per mezzo dell' equazione

$$\frac{k\nu\mathcal{C}' \pm \mu}{b} = e.$$

Da ciò si vede che quando A e B non hanno comun divisore (ovvero quando $c = 1$), la terza condizione è adempita per una conseguenza delle due altre.

Ma se essi hanno un comun divisore c, rimarrà ancora da soddisfare alla condizione

$$\frac{ak^2\mathcal{C}'^2 + b}{c} = e,$$

ovvero semplicemente

$$\frac{a\lambda^2 + b}{c} = e.$$

Ecco dunque un teorema generale, per mezzo del quale si potrà decidere immediatamente, e senza alcuna trasformazione, se un' equazione indeterminata del secondo grado è risolubile o non lo è.

TEOREMA.

13. *Essendo proposta l' equazione*

$$ax^2 + by^2 = cz^2,$$

nella quale i coefficienti a, b, c, *presi individualmente, ovvero due a due, non hanno nè divisore quadrato, nè divisore comune; dico che quest' equazione sarà risolubile, se possiamo trovare tre interi* λ, μ, ν *tali che le tre quantità*

$$\frac{a\lambda^2 + b}{c}, \quad \frac{c\mu^2 - b}{a}, \quad \frac{c\nu^2 - a}{b}$$

siano interi: essa sarà al contrario insolubile, se queste tre condizioni non possono essere adempite nel medesimo tempo.

Osservazione I. Queste condizioni si riducono a due, se uno dei tre numeri a, b, c, è eguale all'unità, e esse si riducono a una sola, come nel n.° 8, se due di questi numeri sono eguali all'unità.

Osservazione II. Possiamo sempre disporre i tre termini dell'equazione proposta, in modo che a, b, c siano positivi; ma questa condizione non è di rigore, e il teorema sarebbe ancora vero, quando anche alcuno di questi termini fosse negativo.

Ciò non ostante non bisognerebbe concludere da questo che un'equazione, come

$$x^2+5y^2+6z^2=0$$

sia possibile, solamente perchè possiamo soddisfare alle condizioni

$$\frac{\lambda^2+5}{6}=e, \quad \frac{\mu^2+6}{5}=e,$$

bisognerebbe concludere solamente che essa può riportarsi alla forma

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

In generale, qualunque equazione risolubile potrà, col metodo che abbiamo esposto in questo articolo, riportarsi alla forma

$$x^2+y^2-z^2=0;$$

ma basta riportarla alla forma

$$Ax^2+y^2-z^2=0,$$

per trovarne immediatamente la soluzione.

14. I nostri limiti c'impediscono di esporre il metodo più diretto di risoluzione, fondato sopra le frazioni continue, il quale riporta la soluzione dell'equazione

$$x^2-Ay^2=\pm B,$$

a quella dell'equazione particolare

$$u^2-nt^2=\pm 1.$$

Noi non possiamo che rimandare i nostri lettori alla *Théorie des nombres* del Legendre e alle *Disquisitiones arithmeticae* del Gauss. Esiste una traduzione francese di quest'ultima opera della quale ne siamo debitori al signore Poullet-Delisle.

INDIANO (*Astron.*). Costellazione meridionale situata al di sotto del Sagittario. È del numero di quelle formate nell'emisfero australe dai moderni navigatori dopo la scoperta del Capo di Buona Speranza e dell'America. La stella sua principale segnata colla lettera greca α è di terza grandezza.

INDICE (*Arit.*). Vien così talvolta chiamata la *caratteristica* dei logaritmi, cioè la cifra che esprime il numero degl'interi di un logaritmo: la parte decimale si chiama *mantissa*. Nei logaritmi ordinarj, l'indice o caratteristica aumentata di un'unità indica di quante cifre è composto il numero corrispondente; così la caratteristica 4 del logaritmo 4,6843785, se si aumenta di un'unità, indica che il numero corrispondente 48348 è di cinque cifre. *Vedi* Logaritmo.

INDIVISIBILI (*Geom.*). Sotto questa parola s' indicano gli elementi infinitamente piccoli, nei quali una figura geometrica può decomporsi.

Il *Metodo degli indivisibili*, il cui principio filosofico riposa sopra la generazione indefinita dell' estensione, è stato introdotto nella geometria dal Cavalieri nel 1635, nella sua opera intitolata: *Geometria indivisibilium*; in principio adottato da un gran numero di geometri, nel numero dei quali dobbiamo citare il Torricelli, l' abuso che ben presto se ne fece, volendolo impiegare nelle proposizioni le più elementari, fece in seguito mettere in dubbio l' esattezza dei suoi principii, e malgrado la sua utilità incontestabile e la sua fecondità prodigiosa, esso non potè sfuggire all' ostracismo gettato dalla pretesa filosofia dell' ultimo secolo sopra tutte le considerazioni matematiche fondate sopra l' idea dell' infinito. Ben lungi dunque dallo sviluppare un metodo il quale in fondo non è, per l' estensione, che ciò che il calcolo differenziale è per i numeri, i geometri moderni hanno creduto camminare per la via del progresso, adottando esclusivamente il *metodo di esaustione* degli antichi, il cui processo, puramente fondato sopra l' induzione non conduce alla verità che per mezzo di lunghi e tortuosi giri. (*Vedi* Metodo).

INDIZIONE (*Calend.*). Ciclo in uso nel calendario ecclesiastico, ma di cui s'ignora la vera origine. È un periodo affatto arbitrario, e non riposa sopra nessuna considerazione astronomica come il ciclo *solare* e il *lunare* (*Vedi* Calendario). La sua durata è di quindici anni.

Per trovare l' anno dell' *indizione romana*, si aggiunge 3 all' anno dell' era cristiana e si divide la somma per 15: il resto della divisione, se vi è, esprime l' indizione dell' anno proposto; se non vi è resto, l' indizione è 15. Se per esempio si cerca l' indizione dell' anno 1844, bisogna dividere 1844+3, ossia 1847 per 15 e il resto 2 è l' indizione cercata.

INDUZIONE. Giudizio per mezzo del quale si conclude dal particolare al generale, ovvero dai fatti alle leggi. Per esempio, se dopo aver dimostrato, nel caso in cui m ed n sono numeri interi e positivi, che

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

se ne concludesse che ciò deve aver luogo per tutti i valori possibili degli esponenti m ed n, ciò significherebbe giudicare per *induzione*. Un tal processo non dev' essere impiegato che con le più grandi precauzioni, poichè esiste un numero considerabile di casi nei quali un' espressione algebrica la cui generalità sembra appoggiata sopra numerosi valori particolari, si trova subitamente in difetto. Tale è per esempio la formula degna di osservazione

$$x^2+x+41,$$

la quale dà una serie di numeri primi, facendovi $x=1, 2, 3, 4, 5$, ec.; essa fu presentata come una legge generale, e tuttavia essa non è esatta che fino al quarantesimo termine.

L' *induzione*, considerata come funzione intellettuale, si aggira sopra il passaggio operato tra le facoltà della Ragione e dell' Intendimento per mezzo della facoltà intermediaria del giudizio, alla quale essa appartiene. Si vede dunque dalla sua origine, che essa non può condurre che a risultamenti continuamente più probabili, ma che per se stessa, essa non potrebbe giungere ad alcuna certezza.

INEGUAGLIANZA (*Astron.*). Parola di cui si fa spesso uso in astronomia per

indicare tutte le irregolarità del moto dei pianeti. Si dice *prima ineguaglianza*, *seconda ineguaglianza*, *ec. Vedi* Equazione, Luna, Pianeti.

INFINITESIMALE. Il calcolo *infinitesimale* non è altro che il *calcolo differenziale*, trattato, col *metodo degli accrescimenti infinitamente piccoli* e non col *metodo dei limiti* o qualunque altro metodo indiretto.

Metodo infinitesimale. *Vedi* Metodo.

Quantita' infinitesimale. Questa è una quantità infinitamente piccola.

INFINITO. Ciò che non ha limiti. Applicato alle quantità, questo termine indica quelle che sono maggiori di tutte le quantità assegnabili, o per le quali non esistono rapporti con le quantità finite. Abbiamo digià stabilito, alla parola Differenziale, la differenza che esiste tra le quantità finite e infinite, e tra le quantità finite e infinitamente piccole, come ancora la vera accezione della parola *indefinito*; ed è perciò che rimanderemo al citato articolo.

Una quantità infinitamente grande, si esprime in generale col segno ∞, ed una quantità infinitamente piccola con $\frac{1}{\infty}$.

Per conseguenza, ∞^2 è certamente grande rapporto a ∞, e $\frac{1}{\infty^2}$ infinitamente piccolo rapporto ad $\frac{1}{\infty}$, egualmente ∞^2 rappresenta una quantità infinitamente grande del *second' ordine*, $\frac{1}{\infty^2}$ una quantità infinitamente piccola del *second' ordine*, e ∞^3 e $\frac{1}{\infty^3}$ sono egualmente quantità infinitamente grandi e infinitamente piccole del *terz' ordine*, e così di seguito.

a essendo una quantità finita qualunque, si hanno le relazioni

$$\frac{a}{\infty}=0,\quad \frac{a}{0}=\infty,\quad 0\times\infty=a,$$

ma in questo caso *zero* deve considerarsi come una quantità infinitamente piccola e non come uno *zero assoluto*.

INFLESSIONE. (*Geom.*). Si chiama *punto d' inflessione* in una curva, il punto in cui da concava essa diviene convessa e reciprocamente.

Per esempio, il punto I (*Tav.* CXLIV, *fig.* 4) in cui la curva AI, la quale diviene convessa rapporto all' asse IB di concava che avanti era, è un *punto d' inflessione.*

Quando la curva cangia bruscamente di direzione come (*Tav.* CXLIV, *fig.* 5 *e* 6), e cangia il suo cammino, il punto in cui ciò ha luogo prende il nome di punto di *regresso*.

I punti tanto d' *inflessione* quanto di *regresso* sono compresi sotto la denominazione generale di *punti singolari*. *Vedi* Punto.

INFLESSIONE. (*Ott.*). Deviazione che provano i raggi luminosi, quando rasentano le estremità di un corpo opaco. È questo lo stesso fenomeno che più comunemente si chiama Diffrazione.

La scoperta di questa singolare proprietà, che contiene il solo carattere materiale che possiamo riconoscere nella luce, si deve al padre Grimaldi, detto gesuita; il dottor Hook l' aveva egualmente riconosciuto; ma effettivamente dobbiamo al Fresnel la conoscenza esatta di tutte le circostanze del fenomeno.

INFLESSIONE DELLE VOLTE (*Arch.*). I cangiamenti di curvatura che provano gli archi dei ponti e le volte, dopo che n'è stata tolta la centina, per effetto della contrazione delle commettiture delle pietre, danno luogo a parecchi problemi geometrici la cui soluzione interessa gl'ingegneri, e dei quali cercheremo di dare le formule le più semplici. Un'osservazione importantissima riferita dal barone de Prony, negli *Annales des Ponts et Chaussées* per l'anno 1832, sulle inflessioni che avevano sofferte, dopo un lasso di venti anni, le linee rette condotte nel piano delle spallette dell'arco di mezzo del ponte Luigi XVI, prima che ne fosse stata levata l'armatura, ha dato occasione a questo illustre scienziato di richiamare alla memoria dei geometri queste formule e di far conoscere dei nuovi mezzi di calcolo che crediamo utile di sviluppare. Ecco intanto l'osservazione.

L'arco di mezzo del ponte Luigi XVI, centinato con una freccia di $3^m,975$, aveva, prima che fosse disfatta la centina, uno sviluppo in linea retta di $32^m,519$, il cui valore angolare era di $57° 12' 24''$, e il raggio di $32^m,570$.

» La lunghezza del raggio, dice de Prony, superava quella della corda $1^m,334$; le commettiture erano convergenti a forma di cuneo volgente il suo taglio verso l'imbotte dell'arco. Queste commettiture, stoccate esattamente al di fuori dell'arco, erano ripiene di un cemento colatovi in uno stato di mezza fluidità: alcuni interstizj praticati dalla parte superiore dell'arco per fare refluire il cemento non occupavano che una parte piccolissima della superficie compresa tra due ordini di pietre. Il calcolo delle pressioni normali a questa superficie, che dovevano aver luogo immediatamente dopo che fosse stata tolta la centina, pressioni variabili dalla chiave dell'arco ai fianchi, mi ha dato, in numero tondo, i limiti di 92,000 a 78,000 chilogrammi per metro quadrato; ed è da osservarsi che queste valutazioni, relative unicamente alle masse di pietre sostenute dalle centine, dovevano in seguito subire un aumento considerabile quando sarebbero state ultimate le parti superiori del ponte.

» Dietro questi resultati dei calcoli, avrei potuto avere qualche inquietudine sugli effetti della compressione delle commettiture e dall'abbassamento della chiave che doveva aver luogo dopo che fosse stata levata l'armatura, se altri calcoli, i dati dei quali erano somministrati da costruzioni anteriori, non mi avessero rassicurato. Era dunque importante il facilitare agl'ingegneri i mezzi di dedurre con precisione tale abbassamento dai dati analoghi della costruzione del ponte Luigi XVI; per conseguenza furono condotte tre linee rette sulla faccia esterna della spalletta che guarda la parte superiore del fiume, cioè: 1° una orizzontale di circa 22 metri di lunghezza, della quale il punto di mezzo si trovava nella verticale che passa pel mezzo della chiave; 2.° due linee inclinate, ognuna di 6 metri di lunghezza, e dirette tangenzialmente ai punti in cui cominciava l'arco.

» Venti anni dopo che era stata tolta l'armatura, quando Lamandé faceva le sue disposizioni per la costruzione del ponte di Jena, egli verificò con estrema accuratezza lo stato di queste linee, e trovò che l'orizzontale del mezzo si era incorvata in basso con una freccia di $0^m,113$, e che le linee inclinate laterali si erano sollevate nel loro mezzo di $0^m,008$ dalla parte della riva sinistra e di $0^m,007$ dalla parte della riva destra. Il senso di queste inflessioni era precisamente conforme a ciò che era stato preveduto.

» Per calcolare, dietro queste misure, i cangiamenti che ha dovuto provare la curvatura dell'imbotte e la sua lunghezza sviluppata, si considererà la curva compressa come sensibilmente coincidente con un arco di circolo che passi per le due estremità dell'arco e pel suo vertice; questa ipotesi è compatibile con tutta l'esattezza esigibile per l'applicazione di cui si tratta. »

Di qui è facile il vedere come il problema viene ridotto a calcolare la grandez-

za angolare di un arco di circolo di cui si conosce la corda e la freccia; perchè dalla determinazione di questa quantità dipendono le determinazioni ulteriori della grandezza del raggio e di quella dell'arco sviluppato.

Sia dunque ADB (*Tav.* CXLV, *fig.* 2) un arco di circolo: indichiamo con

a, la sua metà AD, sviluppata o misurata in unità lineari;

k, la metà AC della sua corda AB;

r, il suo raggio AO o DO;

f, la sua freccia CD;

α, il valore angolare dell'arco AD, o la sua grandezza espressa in gradi del circolo.

Il triangolo rettangolo ACO dà

$$AO = \frac{AC}{\operatorname{sen} AOC}, \quad o \quad r = \frac{k}{\operatorname{sen}\alpha},$$

$$OC = \frac{AC}{\operatorname{tang} AOC}, \quad o \quad r - f = \frac{k}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Togliendo la seconda eguaglianza dalla prima, si trova

$$f = \frac{k(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{tang}\alpha} = \frac{k(1-\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} = k \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha,$$

d'onde si ottiene finalmente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{f}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Conoscendo l'angolo α, la prima delle eguaglianze precedenti

$$r = \frac{k}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

fa trovare il valore del raggio r. Per esempio, le misure prese da Lamandé avendo fatto conoscere che la freccia dell'arco del mezzo del ponte Luigi XVI aveva sofferto una depressione di $0^m,113$, il che riduce il suo valore primitivo $3^m,975$ a $3^m,975 - 0^m,113 = 3^m,862$, si hanno, per calcolare il valore angolare dell'arco compresso e il suo raggio, i dati $f = 3^m,862$ e $k = 15^m,5925$, perchè la corda rimane costante. Questi numeri, sostituiti nella formula (1), danno

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \operatorname{tang}(13^\circ\ 54'\ 40'',47),$$

e per consegnenza $\alpha = 27^\circ\ 49'\ 21''$. Così l'arco totale contratto è eguale a $2\alpha = 55^\circ\ 38'\ 42''$. Il valore di α, posto nella espressione (2), dà $r = 33^m,408$.

Il valore di r potrebbe dedursi immediatamente da quelli della corda e della freccia, ma i calcoli divengono più lunghi. Infatti, per la nota proprietà dei triangoli rettangoli si ha

$$\overline{AO}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CO}^2,$$

ossia

$$r^2 = k^2 + (r-f)^2;$$

sviluppando il quadrato a isolando r, si trova

$$r = \frac{k^2+f^2}{2f},$$

formula poco comoda pel calcolo dei logaritmi, e cha non deve impiegarsi che quando le quantità k ed f sono espresse da numeri di poche cifre. Nel nostro caso si ha

$$r = \frac{(15,5925)^2 + (3,862)^2}{2 \times 3,862} = \frac{258,04119025}{7,724} = 33,4076.$$

Per ottenere ora la lunghezza dell'arco sviluppato, bisogna osservare che se la lunghezza di un arco in parti del raggio preso per unità è espressa dal numero m, e se la sua grandezza angolare è espressa dal numero m'' di *secondi sessagesimali*, esiste necessariamente tra questi due numeri m e m'' lo stesso rapporto che tra i numeri π e 648000, il primo dei quali rappresenta la semicirconferenza del circolo di raggio 1, e il secondo il valore angolare o il numero dei secondi contenuti in una semicirconferenza; il che è quanto dire che si ha

$$m = m'' \frac{\pi}{648000}.$$

Se il raggio del circolo, invece di esser l'unità, fosse un numero qualunque r, si avrebbe

$$m = \frac{m''\pi r}{648000};$$

perchè gli archi di una stessa grandezza angolare in circoli differenti sono proporzionali ai loro raggi. Applicando queste considerazioni all'arco AD, si avrà, indicando con x'' il numero dei secondi contenuti nel valore angolare x,

$$a = x'' r \frac{\pi}{648000},$$

ovvero, sostituendo i numeri particolari del nostro quesito,

$$a = 100161 \times 33,408 \times \frac{3,1415926}{648000} = 16^m,223;$$

l'arco intero è dunque di $32^m,446$, e confrontandolo col valor primitivo $32^m,519$, si vede che la contrazione totale è eguale a $0^m,073$, il che non da presso a poco che un millesimo di metro di contrazione media per ogni commettitura.

Il calcolo del valore dell'arco sviluppato è troppo lungo per non dover fare uso dei logaritmi, perciò è necessario il dare all'espressione precedente la forma

$$\log a = -6 + 0,6855749 + \log x'' + \log r \;\ldots\; (3),$$

a motivo di

$$\log\left(\frac{3,14159\,2653G}{648000}\right) = -6 + 0,6855748668.$$

In questa guisa l'operazione si trova ridotta ad una semplice addizione.

Un quesito nei rapporti pratici più importante è quello di calcolare gli effetti del ristringimento che debbono provare gli archi nelle diverse ipotesi di contrazione delle commettiture. Supponiamo, per esempio, che sia stato progettato un arco il quale debba avere sulla sua armatura una corda di 30 metri ed un arco totale sviluppato di $31^m,12$, e sia composto di 39 cunei che presentino 80 commettiture delle quali siasi calcolata la contrazione media a $0^m,0015$, in modo che tolta la centinatura, l'arco totale contratto non sia più che di

$$31^m,12 - 80 \times 0,0015 = 31^m:$$

si tratta di trovare il valore angolare di questo nuovo arco e il suo raggio, la corda rimanendo sempre la stessa prima e dopo la contrazione.

Il sig. de Prony dà a tale oggetto la formula nuova ed elegante che adesso ci faremo ad esporre.

Sia sempre (*Tav.* CXLV, *fig.* 2) $2a$ l'arco ADB espresso in unità lineari, e $2k$ la grandezza della sua corda AB espressa essa pure nella stessa unità. Indichiamo con

- α il valore angolare del semiarco AD espresso in gradi e in frazioni decimali di grado;
- ρ il numero dei gradi contenuti nell'arco eguale al raggio, cioè: $57°,2957795$:

si avrà

$$\alpha = \left(\rho\sqrt{10}\right) \times \left\{1 - \left[1 - 1,2(1-n)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \ldots (4),$$

nella qual formula n è il rapporto delle quantità k ed a, vale a dire $n = \frac{2k}{2a}$.

Il logaritmo del primo fattore è

$$\log(\rho\sqrt{10}) = 2,2581226.$$

Prendiamo per esempio di un'applicazione $2a = 31^m$, $2k = 30^m$: si avrà

$$n = \frac{30}{31} = 0,967742,$$

$$\left[1 - 1,2(1-n)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,9612904} = 0,9804544,$$

$$x = (\rho\sqrt{10}) \times \sqrt{0,0195456}.$$

Terminando il calcolo coi logaritmi, si otterrà finalmente

$$\alpha = 25°,3309 = 25°\ 19'\ 51''.$$

L'arco totale contratto avrà dunque un valore angolare di $2\alpha = 50°\ 39'\ 42''$.

Facendo $k=15^m$ ed $\alpha=25^\circ\ 19'\ 51''$ nella formula (2), si troverà pel raggio di quest' arco

$$r=35^m,069.$$

La formula (4) non è che approssimativa, ma i suoi risultati sono di un'esattezza superiore a quella che esigono i bisogni pratici. Noi cercheremo adesso di supplire al silenzio di de Prony sulla sua deduzione, e quindi le daremo una forma che ci sembra atta a rendere i calcoli più semplici.

Sotto il rapporto geometrico, il problema può essere enunziato nella maniera seguente:

Conoscendo la lunghezza sviluppata di un arco di circolo ADB *e quella della sua corda* AB, *trovare il suo valore angolare* AOB.

Prendiamo Od per *unità*, e con questa retta come raggio descriviamo l'arco $ad=\varphi$; i due archi AD e ad hanno uno stesso valore angolare, e di più le loro lunghezze sviluppate stanno tra loro come i loro raggi AO e aO, o come le semicorde AC e ac degli archi doppj $2a$ e 2φ; così si ha

$$\frac{a}{\varphi}=\frac{AC}{ac}.$$

Ma nel circolo che ha per raggio l'unità la semicorda ac è il *seno* dell'arco φ, dunque $ac=\text{sen}\,\varphi$ e per conseguenza

$$\frac{a}{\varphi}=\frac{k}{\text{sen}\,\varphi},$$

donde si deduce

$$\frac{k}{a}\varphi=\text{sen}\,\varphi, \quad \text{o} \quad n\varphi=\text{sen}\,\varphi,$$

facendo $\frac{k}{a}=n$. Sostituendo in luogo di φ il suo sviluppo in funzione dell'arco φ, si ha

$$n\varphi=\varphi-\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5}-\frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{ec.}$$

Trascurando i termini che contengono le potenze di φ superiori alla quinta, e dividendo tutto per φ, si ha l'equazione

$$\varphi^4-20\varphi^2=120(n-1),$$

che può risolversi col metodo di quelle del secondo grado, facendo $\varphi^2=x$; donde si ottiene immediatamente

$$x=10\pm\sqrt{\left(100+120(n-1)\right)};$$

osservando che φ deve esser sempre minore dell'unità, si vede che il segno — del radicale è il solo ammissibile, e ponendo fuori il fattore 100 si ha

$$x=10-\sqrt{100}.\sqrt{\left(1+1,2(n-1)\right)}=10\left[1-\sqrt{\left(1-1,2(1-n)\right)}\right],$$

donde finalmente, a motivo di $x = \varphi^2$, si ottiene

$$\varphi = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\left\{1 - \sqrt{\left[1 - 1,2(1-n)\right]}\right\}}.$$

Ora, φ è la grandezza dell' arco ad in parti del raggio eguale all' unità; per aver dunque il suo valore angolare eguale a quello dell'arco $AD = \alpha$, bisognerà moltiplicare φ pel numero dei gradi contenuti nell' arco eguale al raggio o per $57°,2957795 = \rho$. Dunque finalmente

$$\alpha = \left(\rho\sqrt{10}\right) \times \sqrt{\left\{1 - \sqrt{\left[1 - 1,2(1-n)\right]}\right\}}.$$

I calcoli necessarj per ottenere il valore di α divengono facilissimi per mezzo delle tavole logaritmiche e trigonometriche. Infatti, conservando ad a e k lo stesso significato dato loro di sopra, tutto si riduce a calcolare un arco ausiliare A mediante la formula

$$\text{Log sen } A = \frac{1}{4}\left\{39,3010300 + \text{Log}(6k - a) - \text{Log } a\right\} \ldots . (5),$$

dopo di che si ottiene il valore angolare α in forza della relazione semplicissima

$$\text{Log } \alpha = \text{Log cos } A - 7,7418774 \ldots\ldots (6).$$

Ecco l' intero calcolo pei dati precedenti: $a = 15^m,5$, $k = 15^m$, donde si ha $6k - a = 74,5$:

Numero costante	=	39,3010300
Log(74,5)	=	1,8721563
Somma	=	41,1731863
Log(15,5).	=	1,1903317
		39,9828546
Quarto di questo numero . .	=	9,9957136 = Log sen A.

Le tavole trigonometriche fanno conoscere $A = 80° \, 57' \, 48''$, donde si ottiene

Log cos A	=	9,1455283
Numero costante	=	7,7418774
	=	1,4036509

Il valore di α corrispondente a questo logaritmo è, come si è trovato di sopra, $\alpha = 25°,3309$

Si possono ottenere i resultati delle nostre formule (5) e (6), o quelli della formula (4) di de Prony in una maniera molto più spedita mediante una piccola tavola annessa alla sua memoria la quale contiene i logaritmi dei rapporti tra gli archi di circolo e le loro corde; basta allora prendere nelle tavole ordinarie il logaritmo di $\frac{a}{k}$ e si trova immediatamente a colpo d' occhio il valore angolare dell' arco aa. Si veda la Nota sulle inflessioni citata di sopra, Parigi, 1832, presso Carilian Goeury.

INFORMI (*Astron.*). Nome che gli astronomi danno alle stelle, dette ancora *Sporadi*, che non si trovano comprese in ciascuna costellazione.

Tra tali stelle se ne contano alcune brillanti quanto le altre, ma essendo troppo lontane da quelle che componevano la massa delle costellazioni non vi si potevano includere facilmente senza rendere le figura deformi, e si pensò di lasciarle piuttosto senza denominazione speciale sotto il titolo di *informi*. Quelle degli antichi cataloghi furono per la maggior parte impiegate dai moderni astronomi a formare nuove costellazioni; ma queste non avendo bastato a riempiere tutti gl'interstizj, rimasero ancora delle stelle *informi*. Tali sono quelle del quadrilatero situato sopra i Pesci, di cui si servono spessissimo gli astronomi per esser vicinissime all'ecclittica.

INGRANAGGIO (*Mec.*). Sistema con l'aiuto del quale si trasmette il moto da una ruota a un'altra.

Le ruote potendo ingranare esternamente o internamente, ne segue che vi sono due specie d'ingranaggi; ma siccome la prima specie è quasi la sola impiegata, così è anche la sola che considereremo.

Per determinare qual'è la miglior forma da dare ai denti delle ruote che ingranano gli uni con gli altri; prima di tutto è necessario d'esaminare il moto di rotazione di due circoli che si toccano.

RUOTE I CUI ASSI SONO PARALELLI.

Cominciamo dal supporre che i due circoli siano in un medesimo piano e che essi possano prendere un moto di rotazione intorno della retta, che passa pel loro centro perpendicolarmente al loro piano. Se supponiamo che ad uno dei circoli si applichi una forza F diretta secondo la tangente all'uno o all'altro circolo, essi gireranno con velocità eguali, mentre, poichè essi girano l'uno sull'altro, gli archi descritti nel medesimo tempo da ciascuno dei punti della loro circonferenza sono egoali e questi archi sono la misura delle velocità. I momenti della forza F, rapporto ai centri dei due circoli, sono proporzionali al loro raggio, poichè essi hanno per espressione $F \times R$ ed $F \times R'$.

Se consideriamo i circoli dei raggi R ed R' come le basi di due ruote cilindriche, e le linee che terminano i denti come le basi di due cilindri, queste linee dovranno toccarsi in tutte le loro posizioni, e la normale comune, che varia con la posizione dei circoli, dovrà passare per il punto di contatto dei due circoli. Se si chiamano B e B' le perpendicolari abbassate dai centri fissi sulla normale comune, ed f la forza che è diretta secondo la normale, e il cui momento, rapporto al centro del circolo del raggio R, è eguale al momento della forza F, avremo

$$f \times B = F \times R,$$

donde

$$f = \frac{F \times R}{B}.$$

Il momento di questa forza, rapporto al circolo il cui raggio è R', è $f \times B'$; ma la normale passando per il punto di contatto dei due circoli, si ha la proporzione

$$R : R' :: B : B',$$

dunque

$$f \times B' = \frac{F \times R}{B} \times \frac{R' \times B}{R} = F \times R'.$$

Per conseguenza i momenti, rapporto ai centri dei circoli, non hanno cangiato, dunque i due circoli si muovono come se essi fossero instigati da una forza unica F, diretta secondo la tangente a uno dei due circoli.

Immaginiamo un circolo di un raggio AB (*Tav.* CXXVI, *fig.* 2) che giri intorno della linea dei poli projettata su A, vale a dire della retta che passa per il suo centro perpendicolarmente al suo piano, e cerchiamo come si potrà trasmettere il suo moto di rotazione ad un altro circolo di un raggio CB, che gli è tangente in B e che è situato nel medesimo piano. Se descriviamo un circolo sopra CB come diametro, e che lo facciamo girare sopra la circonferenza il cui raggio è AB, il punto B descriverà un'epicicloide piana; se esso girasse sopra la circonferenza il cui raggio è CB esso genererebbe una retta CB (*Vedi* Epicicloide). Se supponiamo che l'epicicloide BP sia fissata al circolo AB e che la retta BC lo sia ancora al circolo BC, quest'epicicloide condurrà questa retta in modo che le velocità di rotazione saranno eguali e i momenti costanti.

Supponiamo infatti che l'epicicloide sia giunta nella posizione $B'd'P'$, essa taglierà allora il circolo del diametro CB in un punto d' tale, che si avrà

$$\text{arco } Bd' = \text{arco } BB';$$

poichè se si suppone che la posizione primitiva del circolo sia tale che esso tocchi in B' il circolo AB sul quale esso gira, si avrà il punto d' della curva percorsa facendo l'arco $BB' = \text{arco } Bd'$.

La posizione corrispondente del raggio CB passerà ancora per il punto d', poichè dalla definizione dell'epicicloidi gli archi BB', Bb', Bd', sono della medesima lunghezza. Ma la retta Cb' è tangente all'epicicloide $B'd'P'$, dunque la pressione di quest'epicicloide contro il raggio Cb' avrà luogo secondo la normale $d'B$ che passa per il punto di contatto B dei due circoli AB e BC: dunque la forza che fa girare l'uno o l'altro circolo, e il momento di questa forza sono costanti.

Siano ora AB ed OB i raggi di due circoli situati nel medesimo piano e tangenti l'uno all'altro nel punto B. Immaginiamo un terzo circolo descritto con un raggio qualunque $O'B$ e tangente ai due primi nel medesimo punto B. Se esso si muove successivamente sopra i due circoli AB ed OB, uno dei suoi punti genererà due epicicloidi BP e BQ. La prima di queste epicicloidi essendo fissata sul circolo AB e le altre sul circolo OB, nella loro rotazione con i circoli, esse avranno velocità eguali e i momenti saranno proporzionali ai raggi AB ed OB. Supponiamo infatti le epicicloidi nelle posizioni $B''P''$ e $B''Q''$. Per costruzione essa avranno comune il punto d'' situato sulla circonferenza il cui raggio è $O'B$, per conseguenza una tangente comune Cd'', e la loro pressione l'una contro l'altra si eserciterà seguendo la normale Bd'', che passa necessariamente per il punto B. Seguirà da ciò che il momento di una forza applicata ad uno dei circoli essendo costante, il momento di una forza applicata all'altro circolo lo sarà ancora.

Occupiamoci ora a determinare la forma di due ruote cilindriche della medesima densità, comprese tra due piani paralelli e che girano intorno di due assi paralelli che passano pel loro centro, in modo tale, che esse si muovano come due circoli situati nel medesimo piano e costantemente tangenti l'uno all'altro.

Siano A e B (*Tav.* CXLIV, *fig.* 7) le projezioni di due assi paralelli intorno dei quali queste ruote debbono girare. Sopra la retta che unisce questi due punti, prendiamo un punto C che abbia sopra l'una e l'altra ruota la medesima velocità di rotazione, e dei raggi AC e BC, che chiameremo raggi primitivi,

tracciamo due circoli che saranno tangenti in C. Le circonferenze di questi circoli sono nel rapporto dei loro raggi, rapporto che è determinato dal numero dei denti delle ruote; dimodochè esso è sempre espresso in numeri interi.

Le grossezze dei denti, i quali sono eguali sopra l'una e l'altra ruota, si misurano sopra le circonferenze dei raggi primitivi; l'intervallo che gli separa e che si chiama vuoto, è ancora lo stesso per le due ruote e si misura sopra le medesime circonferenze. Esso è un poco più grande della grossezza dei denti. Si ha cura di prendere i due archi che determinano la grossezza di un dente e la larghezza del vuoto in un rapporto tale che la loro somma sia contenuta un numero esatto di volte nelle due circonferenze. Supponiamo che FI sia la grossezza dei denti della prima ruota, il cui raggio è CB, e FH la lunghezza del vuoto, e vediamo come determineremo le curve che debbono servire di base alle superficie cilindriche che terminano i denti. Sopra la retta AC, come diametro, descriveremo un circolo, la circonferenza del quale supporremo che giri sopra la circonferenza BC. In questo movimento il punto C descriverà un'epicicloide CM. Se ora prendiamo l'arco $CN = \frac{FI}{2}$, e che si conduca il raggio BNM, il punto M ove esso taglia l'epicicloide CM sarà l'ultimo punto della curva che deve servire di base alla superficie cilindrica del pieno del dente.

A quest'arco CM, del dente della gran ruota, corrisponde un fianco della piccola ruota che determineremo. Dal punto B come centro, e col raggio BM descriviamo un arco di circolo MPL. Quest'arco taglia la circonferenza del raggio AC al punto L, e la circonferenza del diametro AC al punto P. Tracciando una circonferenza dal punto A come centro col raggio AP, il punto Q, ove esso incontra il raggio AC, determinerà la lunghezza CQ del fianco domandato. La porzione di epicicloide CM, conducendo il fianco CQ da AC in AC′, passa dalla posizione CM alla posizione PP′, e allora essa ha per tangente il raggio APC′. Al di là di questa posizione il dente striscerebbe ancora sul fianco che esso spingerebbe al di là di AC′ fino a tanto, che le due estremità del dente e del fianco fossero riunite in L; ma allora le condizioni del moto non sarebbero più soddisfatte. Così quando il fianco AC è giunto in AC′, bisogna che un altro dente ingrani con un altro fianco e che esso comunichi alla ruota del raggio primitivo AC un movimento uniforme di rotazione. Tosto che quest'ingranaggio avrà luogo, il fianco CQ essendo giunto nella posizione APC′, cesserà di esser passato dal dente, e quando il dente sarà arrivato in LL′ il fianco sarà al di là di AL.

Si faranno assolutamente le medesime costruzioni per determinare i denti della piccola ruota e i fianchi della grande. Rimane ora da tracciare la forma del vuoto che separa due denti, poichè al punto ove siamo giunti, il moto non potrebbe aver luogo poichè gli archi di epicicloidi che terminano il contorno dei denti non potrebbero stare nello spazio praticato tra i denti. L'intervallo tra due denti della piccola ruota è terminato dalla curva che descrive l'estremità M del dente CM della gran ruota sul piano del circolo del raggio primitivo AC. Ora facendo girare i due circoli dei raggi AC e BC intorno del loro centro, il punto C descrive con un movimento riferito al raggio AC come asse fisso, un'epicicloide: nel mentre che, il punto M descrive un'epicicloide allungata (*Vedi* EPICICLOIDE). Ma tutti i punti del circolo che ha per raggio BNM descrivono la medesima linea. Se dunque si prende $Ca = MN$, i punti M ed *a* descriveranno la medesima epicicloide allungata. Sia *ab* l'epicicloide descritta da questo punto *a*. Descrivendo dal punto A come centro con AM per raggio un arco di circolo fin-

tantochè esso incontri ba in m si costruirà la retta Aa' che farà l'angolo $MAa' = mAa$; trasportando il ramo di curva amb in $a'Q$ e in $a'Md$, $Ma'Q$ sarà la curva descritta dal punto M sul piano del circolo primitivo della piccola ruota, riportando questa curva alla retta Ad, considerata come un asse fisso delle coordinate.

Supponendo il dente CM della gran ruota trasportata in PP' ove esso cessa di toccare il fianco della piccola ruota, il vuoto Qa' avrà preso la posizione PY; l'estremità del dente CM e l'origine della curva del vuoto si confonderanno in un medesimo punto P. Le curve PP' e PY hanno ancora in questo punto la medesima normale CP, poichè il punto P appartenendo all'epicicloide allungata, si ha un triangolo APB nel quale $PB = MB$, donde segue che la normale di quest' epicicloide passa pel punto C. Dobbiamo da questo concludere che al punto Q la curva del vuoto è tangente al raggio AQ.

Quest' esempio essendo bastante per far comprendere come si può tracciare i denti delle ruote che girano intorno degli assi paralelli tra loro, non considereremo il caso in cui una delle ruote diviene una lanterna, nè quello delle lame a pestelli, rimettendo il lettore per questo al trattato dell' Hachette.

Ruote i cui assi s' incontrano.

Immaginiamo ora che due circoli in contatto non siano in uno stesso piano e che essi siano mobili intorno dei loro centri. In questo caso una forza F passando pel loro punto di contatto, è equivalente ad un'altra forza f in un rapporto determinato con essa e diretta seguendo la tangente comune ai due circoli. Infatti la forza F, che passa pel punto di contatto dei due circoli, può decomporsi, rapporto al piano di ciascuno dei due circoli, in tre forze, una seguendo la perpendicolare al piano, la seconda seguendo un raggio del circolo situato in questo piano, e la terza f seguendo la tangente comune ai due circoli. Le due prime sono distrutte dalla resistenza degli assi fissi di rotazione dei due circoli. Per trovare il rapporto tra f ed F, basta osservare che decomponendo quest'ultima in due altre, l'una seguendo la tangente comune ai due circoli, e l'altra perpendicolare a questa tangente, la prima sarà eguale ad f, e per conseguenza questa forza f non dipende che dall'angolo formato dalla tangente comune ai due circoli con la direzione della forza F. Laonde, la forza f è la medesima, tanto se si decompone la forza F rapporto al piano dell'uno o dell'altro circolo. Ma i momenti di questa forza f, rapporto ai centri dei circoli, sono proporzionali ai raggi di questi circoli, dunque qualunque sia la direzione della forza F, rapporto al piano dei due circoli, purchè essa passi pel punto di contatto di questi circoli, è equivalente ad una forza f i cui momenti, rapporto ai centri dei circoli, sono proporzionali ai loro raggi, proposizione che è egualmente vera, se la forza F è nel piano di uno dei circoli.

Se si chiama α l'angolo della forza F con la tangente comune ai due circoli, il rapporto tra F ed f sarà determinato dall'equazione

$$f = F \cos \alpha ;$$

e i momenti della forza f, rapporto ai centri dei circoli dei raggi R ed R' saranno $RF \cos \alpha$, $R'F \cos \alpha$. Questo rapporto è perciò quello di R ad R', ed esso è indipendente dalla grandezza e dalla direzione di F.

Indichiamo con C e C' i due circoli che si toccano senza essere in uno stesso

piano, e consideriamoli come le basi di due coni retti C e C', che hanno per vertice comune il punto d'intersezione della loro linea dei poli.

Nel piano del circolo C' tracciamo un terzo circolo C'' che abbia per diametro il raggio di questo circolo e che gli sia tangente al punto di contatto che esso ha col circolo C. Facendo rotolare il cono C' sul cono C, un punto qualunque del circolo C'' descriverà un'epicicloide sferica la cui origine sarà sul circolo C. Prendiamo quest'epicicloide per base di un terzo cono avente il medesimo vertice dei due primi e che sia fisso sul cono C. Per la linea dei poli del circolo C' conduciamo un piano contenente il triangolo formato da un raggio del circolo C', la linea dei poli di questo circolo e una costola del cono C', e fissiamo questo triangolo sul circolo C', che vogliamo far girare intorno la linea dei poli come asse.

Una forza qualunque facendo girare il cono retto C sul suo asse, farà girare nel medesimo tempo il cono a base epicicloidale fissato sul circolo C. L'ultimo cono presserà il piano del triangolo fissato sul circolo C' e obbligherà questo circolo a girare.

Ma il cono a base epicicloidale è toccato in tutte le sue posizioni dal piano del triangolo seguendo una costola; e se per questa costola si conduce un piano normale al cono, questo piano passa per la costola di contatto dei due coni retti C e C', di cui l'uno è fisso e l'altro mobile (*Vedi* Epicicloide sferica). Ma la forza che conduce il piano del triangolo fissato al circolo C' è necessariamente perpendicolare a quest'ultimo piano, dunque essa è diretta nel piano normale al cono epicicloidale; per conseguenza essa passa per la costola di contatto dei due coni retti. La forza applicata tangenzialmente al circolo C, si cangia allora in un'altra forza che passa per il punto di contatto dei due circoli C e C', e diretta nel piano del circolo C'. Ma i momenti di questa forza, rapporto ai centri dei circoli C e C', sono proporzionali ai raggi di questi circoli, dunque i due circoli si muovono come se il moto di uno di essi si trasmettesse all'altro per mezzo del loro comune elemento.

Se i due circoli C e C' sono le basi di due ruote, il dente della prima sarà formato da un tronco del cono epicicloidale, ed esso condurrà la seconda ruota toccando continuamente una porzione del piano triangolare che è fissato al circolo C' e che porta il nome di fianco.

Siano AB il raggio del circolo fisso (*Tav.* CXLV, *fig.* 1) ed AH la linea dei poli; il circolo mobile ha per raggio Bd e per linea dei poli Hd. L'angolo dBG è quello del piano dei due circoli. Sopra Bd come diametro si descrive il circolo C'', il quale, soprapposto, prende la posizione BPd. Un punto di questo circolo descrive un'epicicloide sferica il cui centro è in O', punto d'intersezione della linea AH e della retta OO' perpendicolare sul mezzo di Bd.

Quando i due coni C e C', il cui vertice comune è in H, girano seguendo la costola BH, si suppone che il punto generatore dell'epicicloide sferica sia proiettato in EE', la sua vera posizione essendo in P. Allora il piano del fianco passa per le rette Pd e dH; esso è perpendicolare al piano BPd e tocca il cono epicicloidale seguendo una costola le cui projezioni sono AE, HE' e Pd. La posizione di questa costola, rapporto alla retta Hd, varia nel medesimo tempo della posizione del cono epicicloidale.

Una forza F applicata tangenzialmente al circolo C del raggio AB, e per conseguenza al circolo C' del raggio BO', si cangia in un'altra forza f che è diretta seguendo BP; dimodochè più il punto P si avvicina al punto d, più la forza f aumenta, e per conseguenza la pressione del dente contro il fianco. L'attrito crescendo con la pressione, è necessario, per diminuirlo il più che si può, che

il dente non faccia girare il fianco che di un piccolo arco. La differenza tra le due rette dB e dP determina la porzione del fianco contro il quale il dente ha strisciato per far girare il circolo C' di un arco eguale a BP.

Se si suppone che il cono epicicloidale abbia per base una porzione determinata di epicicloide, tale come quella la cui projezione è aE, in questa posizione il cono è toccato dal piano del fianco che passa per l'asse di rotazione Hd, seguendo la costola che si projetta in HE' e in Pd. Quando il punto a, origine dell'epicicloide, era in B, il cono epicicloidale toccava allora il piano del fianco che passa per l'asse di rotazione Hd, seguendo la retta HB che si projetta in Bd; donde segue, che nel mentre, che il cono epicicloidale gira intorno dell'asse AH di un arco Ba, il piano del fianco gira intorno di un arco eguale a quello che misura l'angolo PdB. Se dunque dal punto d come centro, con dP per raggio, si descrive un arco che tagli la retta dB al punto p, la porzione del fianco che passa per l'asse Hd, sulla quale striscia la porzione del cono epicicloidale, è compresa tra le due rette Hp e HB. L'angolo di queste due rette comprende la porzione utile del fianco, che corrisponde alla porzione del cono epicicloidale le cui costole estreme si proiettano in Aa e AE. Così, conoscendo l'arco descritto da un punto qualunque del cono epicicloidale intorno del primo asse di rotazione AH, se ne conclude la grandezza dell'arco epicicloidale che gli serve di base, l'angolo che comprende il fianco, e l'arco descritto da un punto qualunque di questo fianco intorno del secondo asse di rotazione Hd.

Quando il cono epicicloidale gira intorno dell'asse di rotazione AH, ciascuno dei punti dell'epicicloide sferica che gli serve di base, descrive un circolo intorno di quest'asse. Così, il punto estremo E' descrive un circolo che ha per raggio AE, il quale si projetta in FE'e. Se dunque si descrive l'arco di circolo Et dal punto A come centro con AE per raggio, e se si prende $et=n$E, eHF sarà l'angolo dell'asse AH con la costola estrema che si projetta in AE. In tutte le posizioni del cono epicicloidale questa costola fa con l'arco di rotazione un angolo costante, poichè il cono gira intorno di quest'asse. Conoscendo quest'angolo, possiamo concluderne la grandezza dell'arco che il cono epicicloidale fa descrivere ad un punto qualunque del fianco. Infatti, sia FHe quest'angolo riportato nel piano dei due assi di rotazione AH, Hd; He essendo la lunghezza della costola estrema del cono epicicloidale, la perpendicolare eF, abbassata sull'asse di rotazione AH, è il raggio del circolo descritto dall'estremità di questa costola intorno di quest'asse; il piano di questo circolo taglia il piano del circolo generatore dell'epicicloide seguendo PE'. Uniamo dunque P e d per mezzo di una retta, il fianco comincia ad avere per traccia Pd e quindi Bd; esso ha dunque girato di un angolo eguale a PdB.

Determineremo ora la forma dei denti di due ruote d'angolo appoggiandoci sopra le considerazioni che abbiamo stabilite.

Cominceremo dal considerare la ruota che ha per asse di rotazione la retta AC (*Tav.* CXXV, *fig.* 1). Essa è terminata esternamente e internamente da due tronchi di coni retti che hanno per asse comune la retta AC, e per generatrici uno la retta LI e l'altro la retta L'I'. Questi tronchi di cono hanno per base inferiore due circoli i cui raggi sono lL e l'L', e i centri in l ed l' sull'asse di rotazione. La distanza tra questi due circoli è eguale alla grossezza dei pezzi di legno che tengono legata insieme la ruota. Le dimensioni dei coni retti che terminano l'esterno e l'interno della ruota determinano la porzione di cono epicicloidale che forma il pieno di un semidente. Siano dunque DE la projezione dell'epicicloide sferica che serve di base al cono epicicloidale del dente, sopra un piano perpendicolare all'asse AC, e DME' la projezione sul medesimo piano

dell' intersezione del cono epicicloidale e del cono retto che ha per generatrice LI. Il circolo Mi, descritto dal puoto O come centro col raggio $OM = HI$, taglia la linea DM al punto M. Dnt essendo la grossezza di un dente e la larghezza di uo vuoto, si dividerà quest' arco in due parti Dn e nt, in modo tale che nt sia maggiore di Dn di circa $\frac{1}{16}$; si condurrà quindi la retta $O\alpha'$, che è la bissettrice dell' angolo nOD, e che determinerà il mezzo del pieno del dente. Sul circolo del raggio OM si prenderà l' arco $M'\alpha' = M\alpha'$ e, per quest' arco $M\alpha'M'$ e per il vertice del cono epicicloidale si farà passare un cono retto che terminerà il dente, e ne separerà le due parti. Il tronco di cono retto che forma l' interno della ruota è terminato al circolo che ha per raggio $Oi' = H'I'$. Se si conducono i raggi OM ed OM', essi intercetteranno sul circolo descritto dal raggio Oi', l'arco mm' e la projezione della faccia conica che separa le due parti di un dente sarà $MM'm'm$. Se ora si fa la curva $M'n$ eguale alla curva MD e che si traccino le curve dm e pm' simili alle curve DM e $M'n$ e similmente situate rapporto all' asse $O\alpha'$, si avrà la projezione del pieno della prima ruota. La seconda avendo per asse di rotazione A'C che fa con la prima l' angolo ACA'; si determinerà, nella medesima maniera, sopra un piano perpendicolare al suo asse, la projezione del pieno di uno dei suoi denti. Ma le dimensioni di questo dente determinando la lunghezza del fianco della prima ruota, è necessario per determinare questo fianco, di conoscere il circolo MM' descritto dal raggio $A'a'$ e che termina i denti della seconda ruota.

Il circolo BnD descritto dal raggio $A'a = BA'$, contiene l' origini di questi denti. I due cicoli dei raggi $A'a$, $A'a'$ possono considerarsi come basi di due coni retti, aventi per asse comune l' asse di rotazione della seconda ruota, e per vertice comune il punto d' incontro dei due assi di rotazione. Le estremità e l' origini dei denti della prima ruota, sono sopra i due circoli descritti con i raggi $O\alpha'$ e $O\alpha$ che possiamo ancora considerare come le basi di due coni retti, aventi per asse comune l' asse di rotazione della prima ruota, e per vertice comune il punto d' incontro dei due assi di rotazione. Le costole di questi coni contenuti nel piano che passa pel loro asse comune fanno tra loro un angolo che si prende per misura dell'aggetto del dente; ed è il rapporto degli aggetti delle due ruote, che determina il circolo MM' il quale limita i denti della seconda ruota. Nel caso del quale ci occupiamo supporremo gli aggetti eguali.

La retta che unisce il punto D e il punto d' incontro dei due assi di rotazione, si projetta paralellamente a se stessa in BC. Se si riporta il punto M in i, e che si elevi la perpendicolare iI alla retta OD, la misura della salita del dente della prima ruota sarà misurata dall' angolo BCI, poichè le due rette BC ed IC sono in un piano che passa per l'asse di rotazione, e di più esse appartengono ai due coni retti che hanno per base i circoli Dn e MM'. Conduciamo ora CQP che faccia con BC un angolo $PCB = BCI$, quest'angolo sarà la misura della salita dei denti della seconda ruota. Questa ruota è terminata esternamente e internamente da due tronchi di coni retti la cui sezione col piano dei due assi di rotazione, è composta di due parti eguali a quella che ha per contorno $PB\pi\zeta p'Q$. Questa figura girando intorno dell' asse di rotazione A'C, genera la superficie che termina la seconda ruota avanti che si siano tagliati i denti. Se dal punto P, si abbassa la perpendicolare PP' sopra A'B, A'P' sarà il raggio del circolo che termina i denti della seconda ruota.

Il cono epicicloidale che forma un semi-dente della seconda ruota ha per base l'epicicloide sferica che ha per projezione MD. Supponiamo che x e y siano i punti

mazzi delle AB ed OD. La retta γx perpendicolare ad OD taglia l'asse di rotazione A'C in un punto y, centro della sfera sulla quale è tracciata l'epicicloide MD, γB essendo il raggio di questa sfera. Se dunque dal punto y come centro e con questo raggio si descrive un arco di circolo, si avranno tutti i dati necessari per risolvere la questione proposta. Infatti, descriviamo il circolo γD dal punto γ come centro; dal punto β intersezione della retta CP e dell'arco Bγ, abbassiamo la perpendicolare $\beta\delta$ sull'asse di rotazione A'C, e projettiamo il punto ε ove essa taglia la retta AB, sul circolo descritto dal raggio γD. Riportiamo questo punto d'intersezione η sulla retta AB in θ; uniamo θC, e il punto ζ, ove questa retta taglia la retta BL, projettato in μ, determinerà il raggio Oμ del circolo che termina il fianco del dente della prima ruota. Il punto ζ', ove la retta Cζ taglia la retta l'L', projettato in ζ'', determinerà egualmente l'altra estremità di questo fianco, che così rimane projettato in $pp'n'n$. Nello spazio, questo fianco ha la forma di un trapezio, i cui due lati paralelli appartengono ai lati dei coni interno ed esterno della ruota, e i due altri lati concorrono al punto d'intersezione dei due assi di rotazione.

Determiniamo ora la forma del vuoto che deve esistere tra i due denti. Quando le due ruote girano intorno degli assi AC ed A'C, l'estremità M del dente della seconda ruota, descrive intorno del suo asse un circolo il cui raggio è A'M. Se si riporta il movimento del punto M alle rette AC ed AB, considerate come assi fissi, il punto descrive un'epicicloide sferica allungata. Il cono il cui vertice è al punto d'incontro dei due assi di rotazione e che ha per base l'epicicloide allungata descritta da un movimento relativo per mezzo del punto M, penetra il solido sul quale si è tagliato i denti della ruota, ed è questa penetrazione che determina il vuoto. La sua grandezza sopra una ruota dipende evidentemente dalla lunghezza dei denti dell'altra. Il contorno dei vuoti della prima ruota è in projezione composta delle due rette $n'p'$, rq che concorrono al punto O, e delle due curve $n'q$, rp' resultante dall'intersezione dei coni retti interni ed esterni della ruota, e del cono a base di epicicloide sferica allungata. Le due curve sono tangenti alla retta np'. La curva $q't'=q'n'$, l'intervallo che le separa essendo terminato da una porzione di superficie conica il cui vertice è al punto C, e la cui base è l'arco qq'.

Per tracciare i contorni del vuoto e del pieno di un dente, si sviluppano le superficie coniche rette che terminanò la ruota esternamente e internamente. Per le particolarità dei processi pratici impiegati per tracciare le diverse sorti d'ingranaggi, *vedi* i disegni delle macchine pubblicati dal signor *Leblanc*.

Farò in ultimo osservare, che le forme diverse degli ingranaggi hanno loro procacciato alcuni nomi particolari; cioè, *ingranaggio a lanterna, ingranaggio interno*, *ingranaggio a catena e ingranaggio a vite perpetua*; ma tanto per esaminare queste diverse forme d'ingranaggi, quanto per tutto quello che può concernere il perfezionarsi nella pratica dei medesimi, sarà utile consultare il *Trattato delle macchine* dell' Hachette, la *Meccanica* del Poncelet, la *Meccanica industriale* del Flachat e il *Trattato del disegno delle macchine* del Leblanc di sopra citato.

INGRANDIMENTO (*Ottica*). Dicesi così l'effetto che producono alcuni stromenti ottici di far comparire un oggetto più grande di quello che è realmente. Non si conosce una teoria pienamente soddisfacente di questa singolare proprietà. In generale, dipende essa dalla riflessione o refrazione dei raggi luminosi prodotta da uno specchio o da una lente, per cui tali raggi giungono all'occhio sotto un angolo più grande di quello sotto il quale vi giungerebbero venendo direttamente dall'oggetto: ma questo angolo non basta per determinare la grandezza dell'og-

getto, conviene combinarlo colla distanza apparente e conoscere per conseguenza il luogo dell' immagine. Qui appunto consiste la difficoltà, e qui è dove gli ottici non ci hanno somministrato per anche regole superiori ad ogni eccezione. *Vedi* Microscopio.

INSCRITTO. (*Geom.*). Una figura si dice *inscritta* in un' altra quando i vertici di tutti i suoi angoli toccano il perimetro di quest' altra.

Così un poligono è incritto in un circolo, quando tutti i lati di questo poligono diventano delle corde per il circolo.

Si chiama ancora *iperbola inscritta*, l'iperbola di un grado superiore, che è interamente racchiusa nell'angolo dei suoi asintoti, come l'iperbola apolloniana, o conica.

FINE DEL QUINTO VOLUME.

P.	V.	ERRORI	CORREZIONI
38.	14	$-(\pm a)$, ec. . . . . . $-(\pm a \mp 3r)$, ec.	$-(\pm a)$, ec. . . . . . $-(\pm a \pm 3r)$, ec.
40.	31	$m\left(m\text{I}3\right)+\left(m\text{I}2\right)=\frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+$	$m\left(m\text{I}2\right)+\left(m\text{I}3\right)=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+$
391.	28	$\alpha^2 - B' = AA'k^2$	$\alpha^2 - B = AA'k^2$
392.	12	$\frac{b'^2 - A}{\theta} = e$	$\frac{b'^2 - A'}{\theta} = e$,